Transparentní intensionální logika (TIL)

Marie Duží

http://www.cs.vsb.cz/duzi/

TIL Studijní podklady najdete na:

- http://www.cs.vsb.cz/duzi/TIL.html
  - Zejména monografie:
- http://www.cs.vsb.cz/duzi/aleph.pdf

- Duží M., Jespersen B., Materna P.: *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic* (2010) (Anglická monografie)

Logická sémantika

- Logika je věda o správném ***usuzování***, o umění správné ***argumentace***
- Jak ovlivňuje logická sémantika usuzování?
- Jestliže usuzujeme, argumentujeme, používáme ***jazyk.***
- Abychom mohli správně usuzovat a argumentovat, musíme *rozumět* jednotlivým výrazům a větám, tj. znát jejich ***význam***.
- To, jak přesně zachytíme význam v jazyce logiky, ovlivní podstatně, nakolik jsme schopni platné úsudky formalizovat a dokazovat, nakolik jsme schopni usuzování ***automatizovat***

Logická sémantika

- Výroková logika
  - Omezena na přiřazení **T**, **F** atomickým výrokům a skládání těchto atomických výroků pomocí logických spojek – algebra pravdivostních hodnot
- Predikátová logika
  - Navíc – struktura atomických výroků – vlastnosti a vztahy mezi individui
  - Těsnopis *matematiky*, zvládne mnohé, ale ne vše, zejména problémy s přirozeným jazykem

Logická sémantika

1. Některá prvočísla jsou sudá
2. Některá lichá čísla jsou sudá
3. Některří chytří lidé jsou líní
   - Formalizace v PL1: $\exists \boldsymbol{x}\ [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})]$

Otázky:

- Proč mají věty (1), (2), (3) stejnou analýzu?
- Jak je to možné, že výsledná formule má interpretace, ve kterých je pravdivá (modely) a interpretace, ve kterých je nepravdivá, když je to analýza vět (1) a (2)?
- Jak přispívá „překlad“ do formule PL1 k objasnění významu vět ?

Logická sémantika

1. Žádný starý mládenec není ženatý
2. Žádný starý mládenec není bohatý

PL1: $\forall \boldsymbol{x}\ [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \supset \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})]$ nebo
$\neg\exists \boldsymbol{x}\ [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})]$

Otázky:

- Proč mají obě věty stejné *dvě* formalizace a která z nich je ta „správná“ ?
- Vždyť (1) je *analyticky pravdivá*, zatímco (2) je *empirické tvrzení*, které je za jistých *okolností* pravdivé či ne.

Nedokonalá analýza předpokladů

Vadí to?

Pokud bychom na základě dané formalizace vždy platně odvodili relevantní důsledky, byla by analýza v pořádku

Můžeme vždy provádět korektní inference, korektní usuzování na základě analýzy premis v predikátové logice (např. PL1)?

Paradoxy

- Nutně, 8 > 5
- Počet planet je 8

- Nutně, počet planet je > 5
  - Modální logika, operátor
  - **Nesmíme substituovat v dosahu operátoru. OK, ale *proč?***

Paradoxy

- Je přikázáno doručit dopis
- Jestliže je dopis doručen, pak je doručen nebo spálen

- Je přikázáno dopis doručit nebo spálit
  - Deontické logiky, operátor *O*
  - **Nesmíme substituovat v dosahu operátoru, OK, ale *proč?***

Paradoxy

- Karel věří, že Praha má 1.048.576 obyvatel
- $1.048.576 = 100\,000_{(16)}$

- Karel věří, že Praha má $100\,000_{(16)}$ obyvatel
  - Doxastické a Epistémické logiky, operátory *B*, K

- Karel ví, že 1+1=2
- $1+1=2 \Leftrightarrow Sin(\pi) = 0$

- Karel ví, že $Sin(\pi) = 0$
  - Paradox logicko-matematické vševědoucnosti

Paradoxy

- Karel počítá 2 + 5
- 2 + 5 = 7

- Karel počítá 7
  - Logiky postojů, ... (?)

- Oidipus hledá vraha svého otce
- Oidipus je vrah svého otce

- Oidipus hledá Oidipa

Paradoxy

- President ČR je manžel Ivany
- Jan Sokol se chtěl stát presidentem ČR

- Jan Sokol se chtěl stát manželem Ivany

- Tom si myslí, že francouzský král je moudrý

- Francouzský král existuje

Extenzionální vs. intenzionální kontext

- Kdy je kontext extenzionální?
- Kontext je extenzionální, když v něm platí pravidla *substituce identit* a *existenční generalizace*
- A kdy tato pravidla platí?
- V extenzionálním kontextu
  - hmmm

TIL

- Bohatý strom různých logik
  - Extenzionálních, intenzionálních, …
  - Vyrostl zdola
- Je to OK? Jedna univerzální logika?

- **TIL – universální logický rámec**
  - **„top down“ přístup**

Procedural semantics of TIL

Expression

Sense (procedure, *construction*)

denotation

Ontology of TIL: ramified hierarchy of types

3) TIL: *three kinds of context*

- ***Hyperintensional***; *construction* of the denoted function is an object of predication
  - *Tom computes **Sin**(π)*
  - *Tom believes that the **Pope** is wise but does not believe that the Bishop of Rome is wise*
- ***Intensional***; the denoted *function itself* is an object of predication
  - ***Sine** is a periodic function*
  - *Tom wants to become the **Pope***
- ***Extensional***; *value* of the denoted function is an object of predication
  - ***Sin**(π) = 0*
  - *The **Pope** is wise*.

TIL Ontology (types of order 1)

(non-procedural objects)

- ***Basic types***

  truth-values {T, F} **(ο)**

  universe of discourse {individuals} **(ι)**

  times or real numbers **(τ)**

  possible worlds **(ω)**

- ***Functional types*** **$(\beta\ \alpha_1 \ldots \alpha_n)$**

  partial functions $(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n) \rightarrow \beta$

  - ***PWS Intensions*** – *entities of type* **$((\alpha\tau)\omega)$**; $\alpha_{\tau\omega}$

Constructions

- *Variables* $x, y, p, w, t, \ldots$ v-construct
- *Trivialization* ${}^0C$ constructs C (of any type)
  - a *fixed pointer, reference* to *C*.
  - In order to operate on *C*, *C* needs to be grabbed, or 'called', first. Trivialization is such a grabbing mechanism.
- *Closure* $[\lambda \underset{\alpha_1}{x_1} \ldots \underset{\alpha_n}{x_n}\ \underset{\beta}{X}] \rightarrow (\beta\ \alpha_1 \ldots \alpha_n)$
- *Composition* $[\underset{(\beta\ \alpha_1 \ldots \alpha_n)}{F}\ \ \underset{\alpha_1}{X_1} \ldots \underset{\alpha_n}{X_n}] \rightarrow \beta$
- *Execution* ${}^1\mathbf{X}$, *Double Execution* ${}^2\mathbf{X}$

TIL Ontology (higher-order types)

- *Constructions of order 1* ($*_1$)
  - → construct entities belonging to a type of order 1
  - / belong to $*_1$: *type of order **2***
- *Constructions of order 2* ($*_2$)
  - → construct entities belonging to a type of order 2 or 1
  - / belong to $*_2$: *type of order **3***
- *Constructions of order n* ($*_n$)
  - → construct entities belonging to a type of order $n \geq 1$
  - / belong to $*_n$: *type of order **n + 1***
- ***Functional entities***: $(\beta\ \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ / belong to $*_n$

  (n: the highest of the types to which $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ belong)

  And so on, *ad infinitum*

explicit intensionalization and temporalization

- constructions of possible-world intensions directly encoded in the logical syntax:

$$\lambda w\, \lambda t\, [\ldots w \ldots\ldots t \ldots]$$

- ${}^0Happy \rightarrow (o\iota)_{\tau\omega}$; ${}^0Pope \rightarrow \iota_{\tau\omega}$

$$\lambda w\, \lambda t\, [{}^0Happy_{wt}\ {}^0Pope_{wt}] \rightarrow o_{\tau\omega}$$

- In any possible world (λw) at any time (λt):
  - Take the property of being happy (${}^0Happy$)
  - Take the papal office (${}^0Pope$)
  - Extensoinalize both of them (${}^0Happy_{wt}$, ${}^0Pope_{wt}$)
  - Check whether the holder of the Papal office (if any) is happy at that *w*, *t* of evaluation ($[{}^0Happy_{wt}\ {}^0Pope_{wt}]$)

Metoda analýzy

1. Přiřadíme *typy* objektům, o kterých výraz *V* mluví, tj. objektům označeným podvýrazy výrazu *V* včetně *V* samotného.
2. *Spojujeme konstrukce* objektů ad 1) tak, abychom zkonstruovali objekt označený výrazem *V*.

   Přitom sémanticky jednoduchým výrazům přiřadíme *Trivializaci* označeného objektu
3. Provedeme *typovou kontrolu*, tj. sestrojíme derivační strom

Příklad: „Primátor Ostravy“

- Typy: *Primátor(něčeho)*/$(((\iota\iota)\tau)\omega)$ – zkr. $(\iota\iota)_{\tau\omega}$, *Ostrava*/$\iota$, *Primátor_Ostravy*/$((\iota\tau)\omega)$ – zkr. $\iota_{\tau\omega}$
- Syntéza: $\lambda w \lambda t\ [{}^{0}\mathit{Primátor}_{wt}\ {}^{0}\mathit{Ostrava}]$
- Typová kontrola:

$\lambda w\ \lambda t\ [[[{}^{0}\mathit{Primator}\quad w]\ \ t]\ \ {}^{0}\mathit{Ostrava}]$

$(((\iota\iota)\tau)\omega) \qquad \omega$

$((\iota\iota)\tau) \qquad \tau$

$(\iota\iota) \qquad \iota$

ι

$(\iota\tau)$

$((\iota\tau)\omega)$ zkráceně $\iota_{\tau\omega}$ (*individuový úřad*)

„Primátor Ostravy je bohatý“

- Typy: *Primátor(něčeho)*/$(\iota\iota)_{\tau\omega}$, *Ostrava*/$\iota$, *Primátor_Ostravy*/$\iota_{\tau\omega}$, (*Být*)*Bohatý*/$(o\iota)_{\tau\omega}$
- Syntéza:

$\lambda w \lambda t\ [{}^0Bohatý_{wt}\ \lambda w \lambda t\ [{}^0Primátor_{wt}\ {}^0Ostrava]]_{wt}]$

- Typová kontrola (zkráceně):

$\lambda w\ \lambda t\ [[[{}^0Bohatý_{wt}\ \ \lambda w \lambda t\ [{}^0Primátor_{wt}\ {}^0Ostrava]]_{wt}]$

$(o\iota)$ $\qquad\qquad$ ι

o

$(o\tau)$

$((o\tau)\omega)$ zkráceně $o_{\tau\omega}$ (*propozice*)

TIL vs. Montague's IL

- IL is an extensional logic, since the axiom of extensionality is valid:
  $\forall x\,(Ax = Bx) \rightarrow A = B$.
- This is a good thing. However, the price exacted for the simplification of the language (due to ghost variables) is too high;
  - the law of universal instantiation, lambda conversion and Leibniz's Law do not generally hold, all of which is rather unattractive.
- Worse, IL does *not* validate the Church-Rosser 'diamond'. It is a well-known fact that an ordinary typed λ-calculus will have this property. Given a term $\lambda x(A)B$ (the *redex*), we can simplify the term to the form $[B/x]A$, and *the order in which we reduce particular redexes does not matter*. The resulting term is uniquely determined up to α-renaming variables.
- TIL does not have this defect; it validates the Church-Rosser property though it works with *n*-ary partial functions
  - the functions of TY_2 are restricted to *unary total* functions (Schönfinkel)

TIL: *logical core*

- *constructions* + *type hierarchy* *(simple and ramified)*
- The ramified type hierarchy organizes all higher-order objects: constructions (types $*_n$), as well as functions with the domain or range in constructions.
- The simple type hierarchy organizes first-order objects: non-constructions like extensions (individuals, numbers, sets, etc.), possible-world intensions (functions from possible worlds) and their arguments and values.

Hyperintensionality

- was born out of a negative need, to block invalid inferences
  - Carnap (1947, §§13*ff*); there are contexts that are neither extensional nor intensional (attitudes)
  - Cresswell; any context in which substitution of necessary equivalent terms fails is hyperintensional
- Yet, which inferences are valid in hyperintensional contexts?
- How hyper are hyperintensions?
- **Which contexts are intensional / hyperintensional**?
- ***TIL definition is positive***:
  a context is *hyperintensional* if the very meaning *procedure* is an object of predication

Three kinds of context

- *hyperintensional context*: a meaning construction occurs *displayed*
  - so that the very *construction is an object of predication*
  - though a construction at least one order higher need to be executed in order to produce the displayed construction
- *intensional context*: a meaning construction occurs *executed* in order to produce a function *f*
  - so that *the whole function f is an object of predication*
  - moreover, the executed construction does not occur within another displayed construction
- *extensional context*: the meaning construction is *executed* in order to produce a particular value of the so-constructed function *f* at its argument
  - so that *the value of the function f is an object of predication*
  - moreover, the executed construction does not occur within another intensional or hyperintensional context.

Hyperintensionality

- *Extensional logic* of hyperintensions
- *Transparency*: no context is opaque
- The same (extensional) logical rules are valid in all kinds of context;
  - Leibniz’s substitution of identicals, existential quantification even into hyperintensional contexts, …
- Only the types of objects these rules are applied at differ according to a context
- Anti-contextualism: constructions are assigned to expressions as their context-invariant meanings