DELAUNAYOVA TRIANGULACE

Množina bodů v rovině P

Chceme vytvořit triangulaci jejího konvexního obalu

$\triangle$ v triangulaci mají vrcholy v bodech množiny P

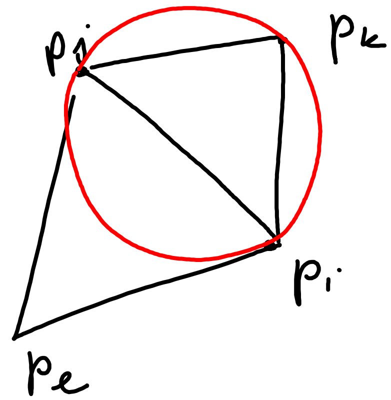
- triangulace úhlově optimální

= triangulace maximální v lexikografickém uspořádání
úhlů $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_M$

= legální triangulace je triangulace s legálními hranami

2

Hrana $p_i p_j$ je legální v triangulaci T

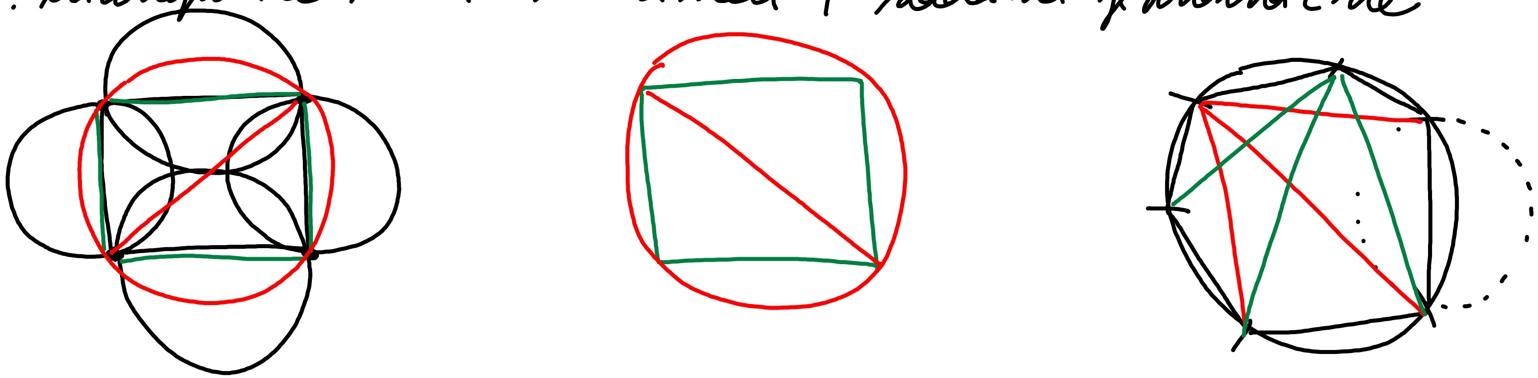


= Delaunayova triangulace je taková triangulace, která splňuje následující: (1) jsou-li $p_i, p_j \in P$ a existuje-li kružnice s tětivou $p_i p_j$, která neobsahuje uvnitř ani na hranici další bod, pak $p_i p_j$ je hranou

3

(2) Je-li $p_i p_j p_k$ trojúhelník v této triangulaci, pak kružnice jimi opsaná neobsahuje uvnitř další bod z množiny P.

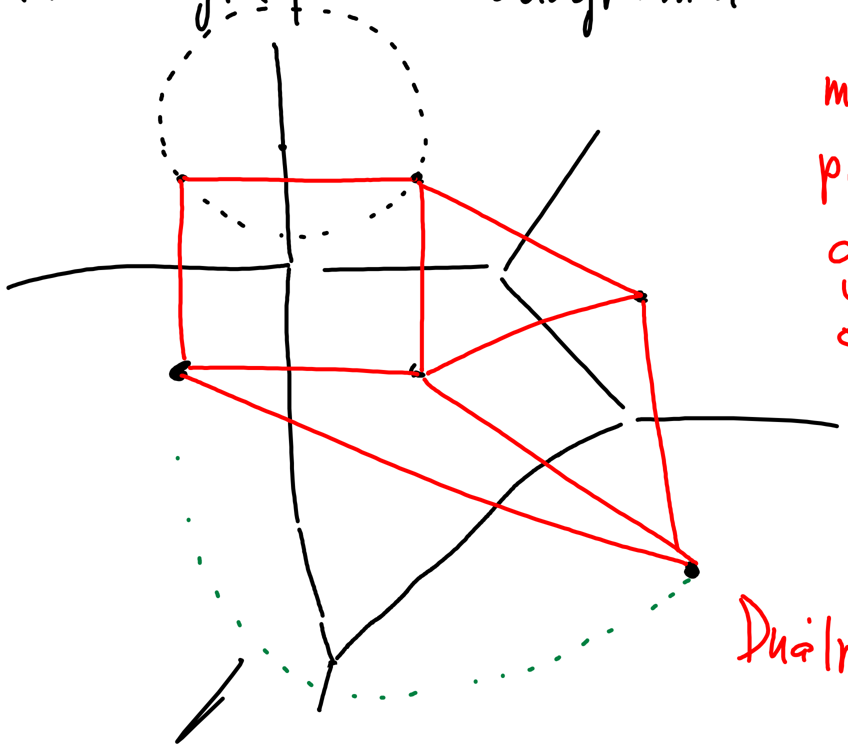
D. Triangulace není množinou P zadána jednoznačně



4

Vztah D. triangulace a diagramu Voronoia

Duální graf k diagramu Voronoia



má vlastnost $p_i p_j$ je hranou duálního grafu právě když existuje kružnice, která má na hranici p_i, p_j, ale žádný další bod z P není uvnitř ani na hranici

Duální graf se nazývá Delaunayův.

5

D graf obsahuje k-úhelníky s $k \geq 3$. Vrcholy každého k-úhelníku leží na kružnicích. Triangulací k-úhelníků pro $k \geq 4$ dostaneme D triangulaci.

Obráceně, každou D triangulaci dostaneme z D. grafu.

Tento vztah mezi diagramem Voronoia a D. triangulací umožňuje vzít algoritmus pro jeden problém a z něj jednoduše dostat algoritmus pro 2. problém

6

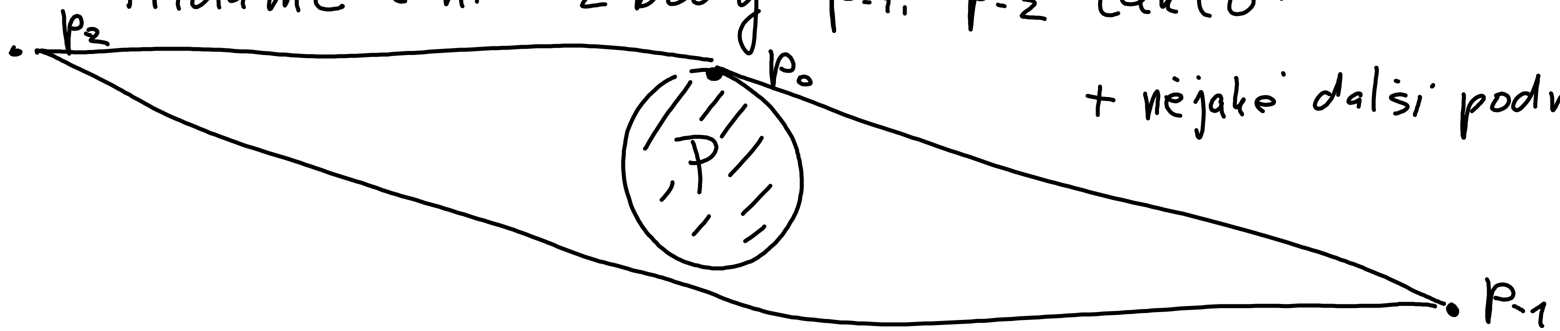
Přírůstkový náhodnostní algoritmus pro D. triangulaci

- využívá skutečnost, že triangulace je D. právě když je legální

Základní myšlenka algoritmu

Vstupem je množina $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$

Přidáme k ní 2 body p_{-1}, p_{-2} takto:



+ nějaké další podmínky

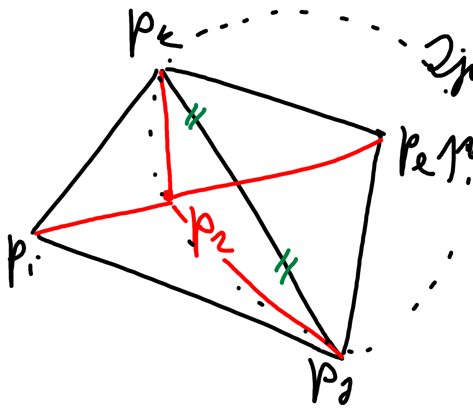
Náhodně uspořádáme body množiny $\{p_1, p_2, \ldots p_n\} = P \setminus \{p_0\}$

D. triangulace pro $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0\}$ je zřejmá.

Budeme postupně z D. triangulace $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \ldots p_{r-1}\}$ vyrábět D. triangulaci pro $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \ldots p_{r-1}, p_r\}$

Do D triangulace pro $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \ldots p_{r-1}\}$ přidáme bod p_r

(1)

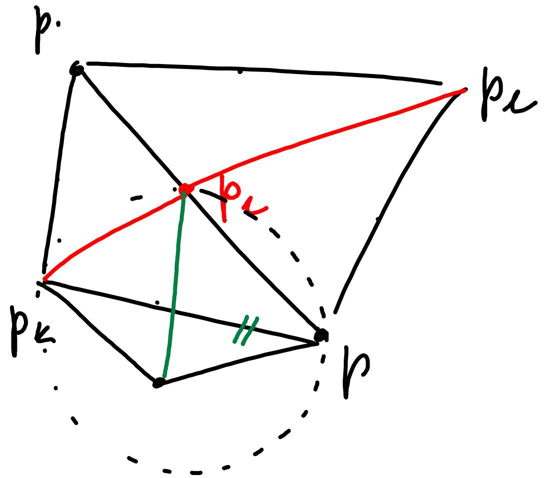


Zjišťujeme, zda $p_k p_j$, $p_j p_i$, $p_i p_k$ jsou legální hrany.

Takto můžeme pokračovat rekurentně

8

(2) p_r leží na hraně $p_i p_j$



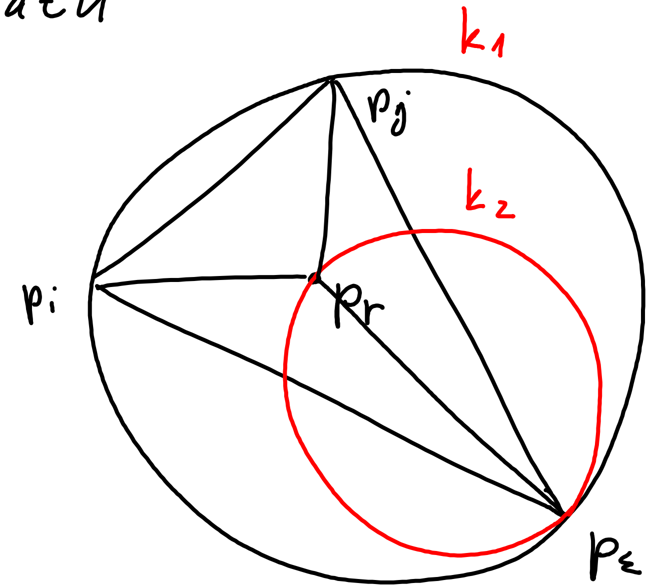
pak $p_i p_\ell$, $p_\ell p_j$, $p_j p_k$, $p_k p_i$ legální vzhledem k p_r?
Pokud ne, provedeme flip.

<u>Lemma:</u> Při této konstrukci jsou všechny hrany vedoucí z přidaného bodu p_r <u>legální</u>.
Dk za chvíli. Proces legalizace naznačený výše skončí v kon. čas

Důkaz Lemmatu

9

1. krok



kružnice opsaná $\Delta p_i p_j p_k$ neobsahuje uvnitř žádný bod z množiny $\{p_{-2}, p_{-1}, \ldots p_{r-1}\}$

k_2 je stejnolehlá s k_1

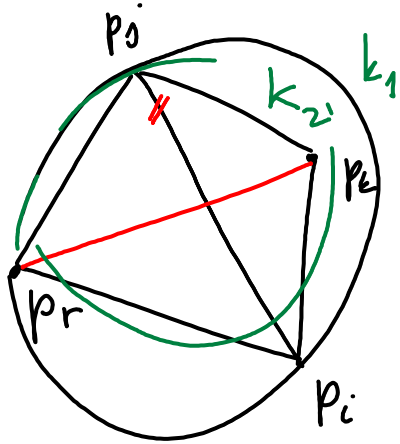
ve stejnolehlosti se středem p_k

k_2 leží uvnitř k_1, tedy neobsahuje na hranici ani uvnitř další body

Hrana $p_r p_k$ je Delaunayova $\Rightarrow$ je legální $\Leftarrow$

10

Další kroky



Nová hrana $p_r p_k$ je legální.

Proč?

Stejnolehlost se středem v p_r nám dá kružnici k_2

$p_r, p_k \in k_2$

Uvnitř ani na hranici neleží další bod

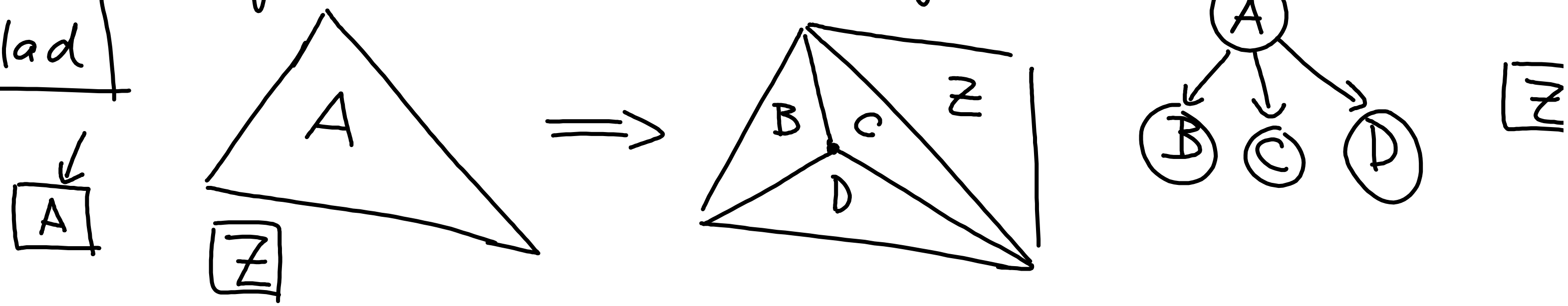
$p_r p_k$ je Delaunayova hrana $\Rightarrow$ legální hrana.

(11)

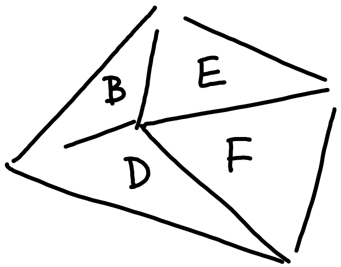
Součásti algoritmu musí být vyhledávací struktura, která nám umožní určit, v kterém $\triangle$ nebo na které hraně leží přidaný bod p_r.

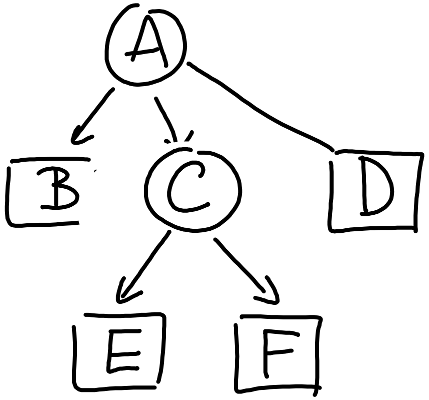
Je to orientovaný graf, kde v listech jsou trojúhelníky triangulace a jako uzly slouží trojúhelníky předchozích triangulací.

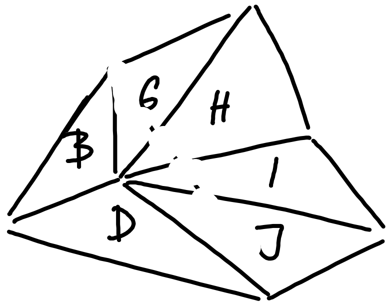
Příklad

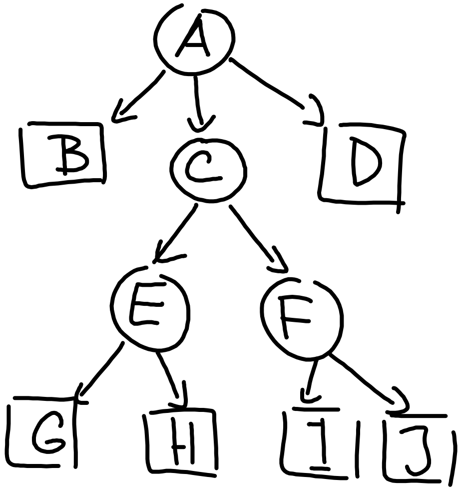


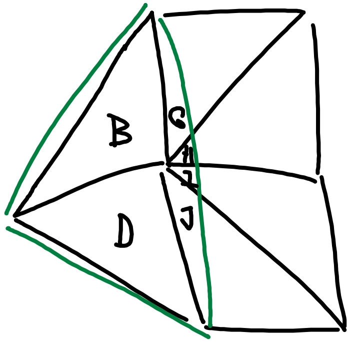
12

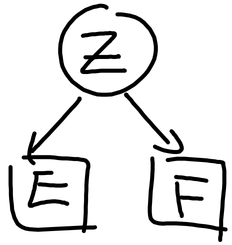








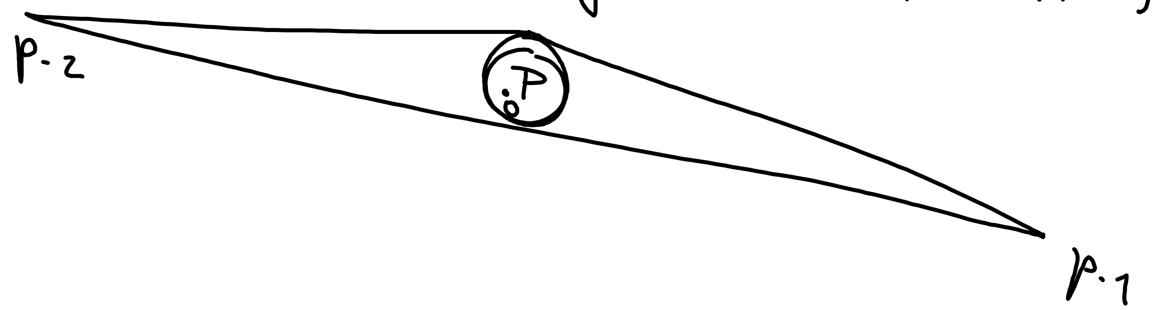




(13)

Algoritmus str 35 a 36

<u>Volba bodů p_{-1}, p_{-2}</u> musí být taková, že na konci algoritmu po vymazání p_{-1} a p_{-2} a všech hran z nich vycházejících dostaneme D. triangulaci konv. obalu množiny $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$



(14)

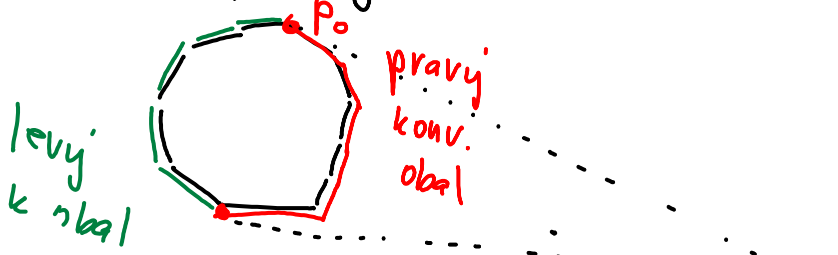
Pravidla pro výběr bodů p_0, p_{-1}, p_{-2}

(1) p_0 je ten prvek z P, který má největší souřadnici y (resp. x)

(2) p_{-1} leží vpravo a pod množinou P

p_{-1} leží vně všech kružnic opsaných $\Delta p_i p_j p_k$, $p_i, p_j, p_k \in$

Z p_{-1} je vidět pravý konv. obal množiny P



15

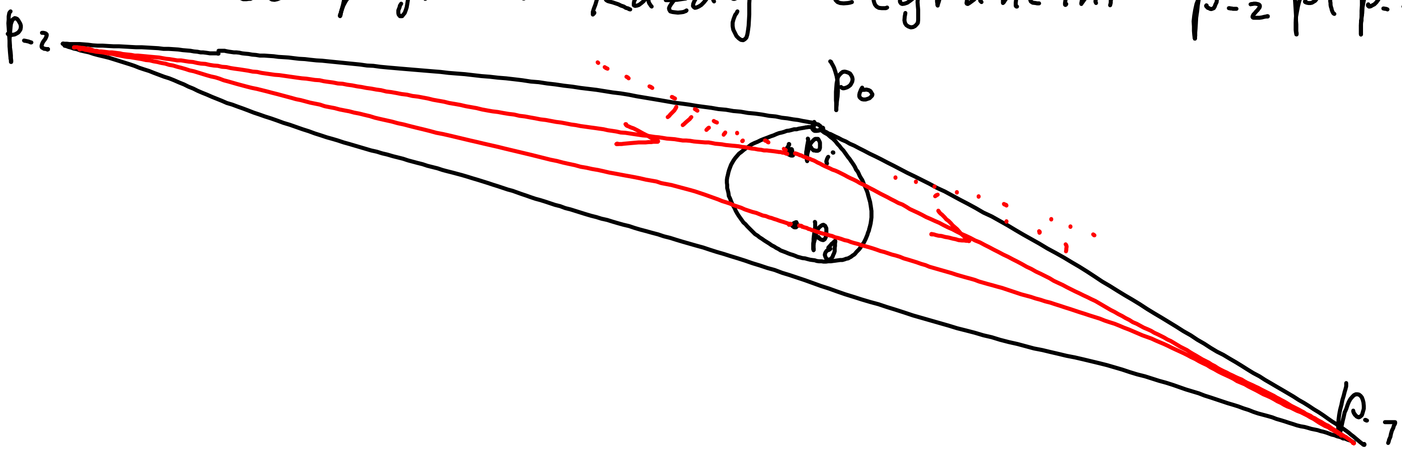
3. p_{-2} leží nad a vlevo od P

p_{-2} leží vně všech kružnic opsaných $\Delta p_i, p_j, p_k$, $p_i, p_j, p_k \in P \cup \{p_{-1}\}$

z p_{-2} je vidět levý konv. obal

P leží v $\Delta p_{-2} p_{-1} p_0$.

Z toho plyne: Každý čtyřúhelník $p_{-2} p_i p_{-1} p_j$ je nekonvexní



16

Z předchozích pravidel plyne, jak můžeme s p_{-2}, p_{-1} počítat bez toho, že bychom určovali jejich souřadnice:

Následující je ekvivalentní

- p_j leží vpravo od $\overrightarrow{p_i p_{-1}}$
- p_j leží vpravo od $\overrightarrow{p_{-2} p_i}$
- $p_j < p_i$ v lexikograf. uspořádání nejdřív podle y a pak podle x

Jak poznáme ilegalitu hrany obsahující p_{-1} nebo p_{-2}

17

- všechny hrany $\triangle p_0 p_{-1} p_{-2}$ jsou legální
- hrana $p_{-2} p_j$ s přilehlými vrcholy p_k a p_{-1} je legální (malujte si obrázky)
- hrana $p_{-1} p_j$ s přilehlými vrcholy p_k, p_{-2} je legální
- je-li právě jedno z čísel i, j, k, l záporné, $p_i p_j$ hrana, $p_k p_l$ přilehlé vrcholy, pak

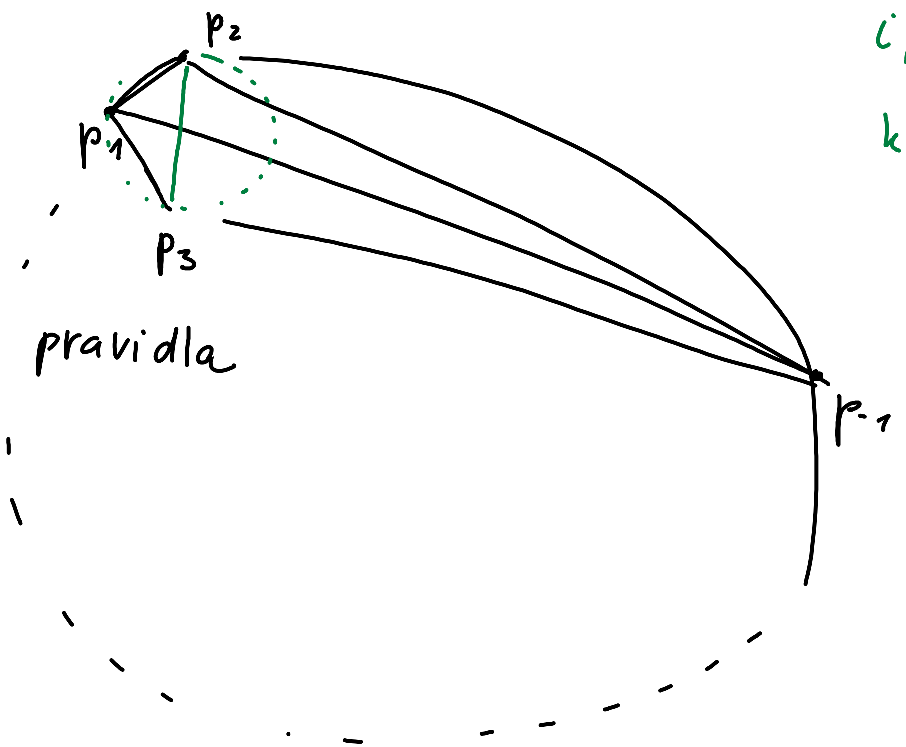
$$p_i p_j \text{ je legální} \iff \min(k,l) < \min(i,j)$$

(Rozeberte 2 případy, záporné číslo je k nebo l
záporné číslo je i nebo j

18

$i = -1,\ j = 1$ $\qquad$ $k = 2,\ l = 3$

$p_{-1}\ p_1$ $\qquad$ $p_2\ p_3$



$i, j = 2, 3$

$k, l = -1, 1$

$p_1 p_{-1}$ je ilegální podle pravidla