10. Delaunayova triangulace

Motivace. Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Její hodnoty známe pouze v konečné množině bodů P. Jeden způsob, jak takovou funkci aproximovat, je rozdělit konvexní obal množiny P na trojúhelníky s vrcholy v bodech množiny P a na těchto trojúhelnících aproximovat funkci f lineárně. To znamená následující: Každý bod x trojúhelníka $p_i p_j p_k$ je konvexní kombinací bodů p_i, p_j, p_k

$$x = t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3, \quad \text{kde } t_1 + t_2 + t_3 = 1,\ t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ t_3 \geq 0,$$

a proto položíme

$$f(x) = t_1 f(p_1) + t_2 f(p_2) + t_3 f(p_3).$$

Graf aproximace funkce f je tedy tvořen v $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ trojúhelníky s vrcholy $(p_i, f(p_i)$, $(p_j, f(p_j)$ a $(p_k, f(p_k))$.

OBR 10.1 Lineární aproximace funkce f

Tato aproximace podstatně závisí na tom, jakým způsobem provedeme triangulaci konvexního obalu naší množiny. Zdá se, že dobrá triangulace je taková, kde nejsou trojúhelníky a malými úhly. Takovým triangulacím se budeme věnovat v následujícím textu.

Úhlově optimální triangulace. Nejdříve ukážeme, že pro danou konečnou množinu P bodů v rovině mají všechny triangulace jejího konvexního obalu stejný počet trojúhelníků. To nám dá možnost porovnávat různé triangulace lexikograficky podle velikosti úhlů.

Věta 10.1. *Nechť P je množina n bodů v rovině. Nechť konvexní obal množiny P má k hran. Potom je každá triangulace konvexního obalu tvořena $2n - 2 - k$ trojúhelníky a má $3n - 3 - k$ hran.*

Důkaz. Označme počet trojúhelníků v triangulaci jako m. Každý trojúhelník má tři hrany. Ze všech hran je k hranou pouze jednoho trojúhelníku, zbývající jsou hranou právě dvou trojúhelníků. Celkový počet hran je tedy roven

$$h = \frac{3m + k}{2}.$$

Eulerova věta říká, že

$$n - h + (m + 1) = 2.$$

Dosazením za h odvodíme po krátké úpravě

$$m = 2n - 2 - k.$$

Odtud dosazením do výrazu pro h dostaneme

$$h = 3n - 3 - k.$$

□

Nechť je tedy $\mathcal{T}$ nějaká triangulace množiny P s $m = 2n - 2 - k$ trojúhelníky. Trojúhelníky této triangulace mají $3m$ úhlů. Seřaďme je podle velikosti do posloupnosti

$$\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}), \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3m}.$$

Na těchto posloupnostech úhlů definujme lexikografické uspořádání

$$\alpha(\mathcal{T}) < \alpha(\mathcal{T}'),$$

jestliže existuje $i \in \{1, 2, \dots, 3m\}$ tak, že

$$\alpha_j = \alpha'_j \quad \text{pro } j < i \quad \text{a} \quad \alpha_i < \alpha'_i.$$

Triangulace $\mathcal{T}$ se nazývá *úhlově optimální*, jestliže je maximální v tomto uspořádání.

Legální hrany a legální triangulace. Pro účely našeho algoritmu na vytváření vhodné triangulace budeme potřebovat pojem *legální hrany* a *legální triangulace*. Před tím, než je budeme definovat, si krátce zopakujme to, co ze středoškolské geometrie víme o obvodových úhlech.

Na kružnici $\mathcal{K}$ se středem s uvažujme body p a q. Ty rozdělují kružnici na dva oblouky. Na jednom z nich zvolme bod a, na druhém bod b. Úhly v trojúhelnících pqa a pqb u vrcholů a a b označme postupně jako α a β. Nazýváme je *obvodovými úhly* tětivy pq pro jednotlivé oblouky kružnice $\mathcal{K}$. Obvodové úhly mají tyto dvě důležité vlastnosti:

- Velikost úhlů α a β nezávisí na poloze bodů a a b v daných obloucích.
- Součet $\alpha + \beta = 180^o$.

Odtud lze snadno odvodit, že každý trojúhelník pqc, kde bod c leží v polorovině pqa uvnitř kružnice $\mathcal{K}$, má u vrcholu c úhel

$$\gamma > \alpha$$

a každý trojúhelník pqd, kde bod d leží v polorovině pqa vně kružnice $\mathcal{K}$, má u vrcholu d úhel

$$\delta < \alpha.$$

OBR 10.2 Obvodové úhly

Dále lze z vlastností obvodových úhlů ukázat, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici, právě když má součet protilehlých úhlů roven 180^o.

Nyní uvažujme triangulaci $\mathcal{T}$ a v ní hranu pq, která má v triangulaci $\mathcal{T}$ dva přilehlé trojúhelníky, a to pqr a pqt. Takovou hranu nazveme *ilegální hranou triangulace* $\mathcal{T}$, jestliže bod t leží uvnitř kružnice opsané trojúhelníku pqr. To je ekvivalentní s tím, že součet úhlů při vrcholech r a t obou trojúhelníků je větší než 180^o a tedy také s tím, že bod r leží uvnitř kružnice opsané trojúhelníku pqt.

OBR 10.3 Ilegální hrana pq

Hrany triangulace $\mathcal{T}$, které nejsou ilegální nazýváme *legální* a triangulaci bez ilegálních hran nazýváme *legální triangulací*. Bezprostředním důsledkem této definice je následující charakterizace legální triangulace:

Lemma 10.2. *Triangulace je legální, právě když pro každou hranu pq s přilehlými trojúhelníky pqr a pqt neleží bod t uvnitř kružnice opsané trojúhelníku pqr.*

Zásadní význam pro náš algoritmus má následující tvrzení.

Lemma 10.3. *Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace s ilegální hranou pq, která má v $\mathcal{T}$ přilehlé trojúhelníky pqr a pqt. Vytvořme z triangulace $\mathcal{T}$ novou triangulaci $\mathcal{T}'$ tak, že hranu pq nahradíme hranou rt. Tato hrana bude v triangulaci $\mathcal{T}'$ legální a navíc v uspořádání definovaném v předchozím paragrafu bude*

$$\alpha(\mathcal{T}) < \alpha(\mathcal{T}').$$

Výše uvedená výměna hrany pq za rt se nazývá flipem.

OBR 10.4 Flip

Důkaz. Protože hrana pq je ilegální hranou triangulace $\mathcal{T}$, je součet úhlů u vrcholů r a t ve čtyřúhelníku $prqt$ větší než 180^o a tedy součet úhlů u vrcholů p a q v témže čtyřúhelníku je menší než 180^o. (Součet všech úhlů ve čtyřúhelníku je 360^o.) Proto je hrana rt v triangulaci $\mathcal{T}'$ legální.

Označme úhly před flipem a po něm podle následujícího obrázku:

OBR 10.5 Označení úhlů str 4

Protože všechny další trojúhelníky mají obě triangulace stejné, stačí nám k tomu, aby

$$\alpha(\mathcal{T}) < \alpha(\mathcal{T}'),$$

dokázat že

$$\min\{\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6\} < \min\{\beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6\}.$$

Ukážeme postupně, že každé β_i je větší než některé α_j. Zřejmě

$$\beta_1 > \alpha_1 \quad \text{a} \quad \beta_4 > \alpha_5.$$

Dále β_2 je obvodový úhel pro tětivu pr v kružnici opsané trojúhelníku prt, zatímco bod q leží vně této kružnice, proto

$$\beta_2 > \alpha_5.$$

Obdobně β_6 je obvodový úhel pro tětivu pt v kružnici opsané trojúhelníku prt, proto

$$\beta_6 > \alpha_4.$$

Analogicky, pomocí kružnice opsané trojúhelníku qrt se přesvědčíme, že

$$\beta_3 > \alpha_1 \quad \text{a} \quad \beta_5 > \alpha_2.$$

□

Důsledek 10.4. *Úhlově optimální triangulace je legální.*

Důkaz. Kdyby úhlově optimální triangulace měla nějakou ilegální hranu, pak jejím flipem bychom dostali triangulaci, která v námi definovaném uspořádání je nad původní triangulací, což je spor s definicí úhlově optimální triangulace. □

Legální triangulace nemusí být úhlově optimální triangulace, jak ukazuje následující obrázek dvou triangulací pětiúhelníka $p_1p_2p_3p_4p_5$, kterému lze opsat kružnici. Navíc $p_1p_2p_3p_5$ je čtverec a $p_5p_3p_4$ rovnoramenný trojúhelník. Obě triangulace $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ jsou legální, ale protože $\alpha(\mathcal{T}) < \alpha(\mathcal{T}')$, není triangulace $\mathcal{T}$ úhlově optimální.

OBR 10.6 Příklad legální triangulace, která není úhlově optimální.

Delaunayův graf a triangulace. Kromě úhlově optimální a legální triangulace zavedeme ještě pojem Delaunayovy triangulace. Nejdřív ale definujme, co je Delaunayův graf.

Delaunayův graf je graf, který má jako uzly body množiny P. Dva uzly p_i, p_j jsou spojeny hranou, právě když existuje kružnice, na které leží tyto dva body a všechny další body z množiny P leží vně této kružnice. To znamená, že střed této kružnice leží na hraně diagramu Voronoia, která prochází mezi oblastí určenou bodem p_i a oblastí určenou bodem p_j. Tedy Delaunayův graf je duální k diagramu Voronia.

OBR 10.7 Dualita diagramu Voronia (čárkovaný) a Delaunayova grafu (červený)

Lemma 10.5. *Delaunayův graf je rovinným grafem.*

Důkaz. Předpokládejme, že p_ip_j a p_kp_l jsou dvě hrany Delaunayova grafu, které se jako úsečky protínají ve vnitřním bodě. Nechť čtyřúhelník $p_ip_kp_jp_l$ má součet úhlů u vrcholů p_k a p_l aspoň 180^o. Potom bod p_l leží uvnitř každé kružnice, která má tětivu p_ip_j a bod p_k leží v jejím vnějšku. (Kdyby ležel vně, tak součet protilehlých úhlů u p_k a p_l by byl menší než 180^o.) To je ale spor s tím, že p_ip_j je hranou Delaunayova grafu. □

OBR 10.8 Ilustrace k důkazu lemmatu 10.5

Omezené oblasti Delaunayova grafu jsou tedy mnohoúhelníky. Nechť body $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tvoří vrcholy jednoho z těchto mnohoúhelníků. Tento mnohoúhelník určuje vrchol v v duálním grafu, tedy v diagramu Voronoia. Tedy body $p_1, p_2, \ldots, p_k$ mají stejnou vzdálenost od vrcholu v a proto leží na jediné kružnici se středem v.

OBR 10.9 Čtyřúhelník $p_1p_2p_3p_4$ v Delaunayově grafu (černě) a diagram Voronoia (červeně)

Delaunayova triangulace je potom definována jako libovolná triangulace, která vznikne rozdělením těchto mnohoúhelníků v Delaunayově grafu na trojúhelníky. Delaunayova triangulace tedy nemusí být určena jednoznačně. Nicméně platí, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům v Delaunayově triangulaci vytvářejí množinu vrcholů diagramu Voronoia.

OBR 10.10 Delaunayův graf (černě) a Delaunayova triangulace (černě a červeně)

Jestliže žádné čtyři body množiny P neleží na kružnici, pak je Delaunayův graf již triangulací. V takovém případě je Delaunayova triangulace určena jednoznačně. Říkáme, že body množiny P jsou v obecné poloze.

Každou Delaunayovu triangulaci lze charakterizovat následující vlastností.

Lemma 10.6. *Triangulace konvexního obalu množiny P je Delaunayova, právě když pro každou její hranu p_ip_j platí: kružnice opsaná přilehlému trojúhelníku $p_ip_jp_k$ neobsahuje uvnitř žádný další bod množiny P.*

Důkaz. K důkazu použijeme dualitu mezi Delaunayovým grafem a diagramem Voronoia.

Nechť je triangulace Delaunayova. Pak trojúhelník $p_ip_jp_k$ vznikl rozdělením nějakého mnohoúhelníka Delaunayova grafu na trojúhelníky. Pak střed kružnice opsané trojúhelníku $p_ip_jp_k$ je rovněž středem tohoto mnohoúhelníka a vrcholem diagramu Voronoia. Proto uvnitř této kružnice nemůže ležet žádný další bod množiny P.

Nechť obráceně uvnitř kružnice opsané trojúhelníku $p_ip_jp_k$ leží bod $p_l \in P$. Potom střed této kružnice není vrcholem diagramu Voronoia na hranici oblastí bodů p_i, p_j a p_k, neboť má k těmto bodům větší vzdálenost než k p_l. A tedy trojúhelník $p_ip_jp_k$ nemohl vzniknout triangulací mnohoúhelníkových oblastí Delaunayova grafu (duálního k diagramu Voronoia). □

Použijeme-li toto lemma a charakterizaci legální triangulace pomocí lemmatu 10.2, dostáváme okamžitě, že každá Delaunayova triangulace je legální. Trochu obtížnější je dokázat, že každá legální triangulace je Delaunayova.

Věta 10.7. *Množina legálních triangulací se rovná množině Delaunayových triangulací.*

Důkaz. Dokažme sporem, že každá legální triangulace je Delaunayova. Nechť $\mathcal{T}$ je legální triangulace, která není Delauneyova. V této triangulaci tedy existuje trojúhelník $p_ip_jp_k$ a bod p_l tak, že p_l leží uvnitř kružnice opsané trojúhelníku $p_ip_jp_k$ a úhel $\angle p_ip_lp_j$ je maximální pro všechny takové trojúhelníky a body. Nechť $p_ip_jp_m$ je trojúhelník přilehlý k trojúhelníku $p_ip_jp_k$ v triangulaci $\mathcal{T}$. Protože je tato triangulace legální, neleží bod p_m uvnitř kružnice opsané trojúhelníku $p_ip_jp_k$. Bod p_l nemůže ležet uvnitř trojúhelníku $p_ip_jp_m$. Nechť p_l leží na opačné straně přímky p_jp_m než bod p_i. Potom je z následujícího obrázku vidět, že pro veliklosti úhlů platí:

$$\angle p_mp_lp_j > \angle p_ip_lp_j,$$

což je ve sporu s volbou trojúhelníka $p_ip_jp_k$ a bodu p_l. □

OBR 10.11 K důkazu věty 10.7

Odtud a z důsledku 10.4 plyne:

Důsledek 10.8. (1) *Každá úhlově optimální triangulace je Delaunayova.*

(2) *Jsou-li body množiny P v obecné poloze, tj. žádné čtyři neleží na jedné kružnici, pak existuje právě jedna Delaunayova triangulace, právě jedna legální triangulace a právě jedna úhlově optimální triangulace a tyto triangulace jsou totožné.*

Základní idea náhodnostního přírůstkového algoritmu. Jedna možnost algoritmicky konstruovat Delaunayovu triangulaci je využít algoritmus k nalezení diagramu Voronoia, k němu najít duální graf a jeho k-úhelníky rozdělit na trojúhelníky.

My si zde ukážeme jiný přístup, který je založen na tom, že každá legální triangulace je Delaunayova, a který spočívá v postupném odstraňování nelegálních hran.

Naivní verze takového algoritmu je následující: Vytvoříme nějakou triangulaci a v ní procházíme její hrany. Když nalezneme ilegální hranu, vyměníme ji flipem za hranu legální a stejným postupem pokračujeme dál. Tento proces je konečný, neboť po každém flipu dostaneme triangulaci, která je v popsaném lexikografickém uspořádání větší než ta předchozí. Vzhledem k tomu, že triangulací je konečný počet, musí tento proces někdy skončit.

Sofistikovanou verzí tohoto přístupu je náhodnostní přírůstkový algoritmus. Základní idea tohoto algoritmu je následující:

(1) K bodům množiny P přidáme body p_{-1} a p_{-2} tak, aby s bodem $p_0 \in P$, který má v P maximální y-ovou souřadnici (případně maximální x-ovou souřadnici), tvořily trojúhelník, v němž leží všechny ostatní body množiny P.

(2) Tyto body uspořádáme náhodně do posloupnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Body p_r pro $r = 1, 2, \ldots, n$ postupně přidáváme k legální triangulaci $\mathcal{T}_{r-1}$ trojúhelníka $p_0p_{-1}p_{-2}$, kde vrcholy jednotlivých trojúhelníků jsou

$$p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}.$$

(3) Pomocí současně konstruované vyhledávací struktury zjistíme do vnitřku kterého trojúhelníku $p_ip_jp_k$ nebo do které hrany p_ip_j triangulace $\mathcal{T}_{r-1}$ bod p_r padne. Potom hranami spojíme bod p_r s vrcholy tohoto trojúhelníku nebo s vrcholy přilehlých trojúhelníků, padne-li na hranu. Nově vzniklou triangulaci trojúhelníku $p_0p_{-1}p_{-2}$ s vrcholy trojúhelníků v množině

$$\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_r\}$$

"legalizujeme", tj. pomocí flipů měníme ilegální hrany za legální. Po odstranění všech ilegálních hran dostaneme triangulaci $\mathcal{T}_r$.

(4) Na závěr z legální triangulace $\mathcal{T}_n$ množiny $P \cup \{p_{-1}, p_{-2}\}$ odstraníme body p_{-1} a p_{-2} a hrany z nich vycházející. Díky vhodné volbě těchto dvou bodů, bude zbylá triangulace legální, tedy i Delaunayovou triangulací konvexního obalu množiny $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

OBR 10.12 Množina P v trojúhelníku $p_0p_{-1}p_{-2}$.

Nyní jednotlivé kroky popíšeme podrobněji. Začneme krokem (2) a (3).

Legalizace. Uvažujme legální triangulaci $\mathcal{T}_{r-1}$ popsanou v bodě (2). Jestliže pomocí vyhledávací struktury zjistíme, že bod p_r leží uvnitř trojúhelníka $p_ip_jp_k$, spojíme jej hranami s jednotlivými vrcholy.

OBR 10.13 Bod p_r v trojúhelníku $p_ip_jp_k$.

Tím vznikne nová triangulace. Podstatné je, že nově přidané hrany vycházející z bodu p_r jsou legální. To dokážeme takto: Nechť $\mathcal{K}$ je kružnice opsaná trojúhelníku $p_ip_jp_k$. Protože je triangulace $\mathcal{T}_{r-1}$ legální a tedy i Delaunayova, neleží uvnitř kružnice $\mathcal{K}$ žádný z bodů z množiny $P_{r-1} = \{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \ldots, p_{r-1}\}$. Nechť $\mathcal{L}$ je kružnice stejnolehlá s $\mathcal{K}$, která má tětivu p_rp_i. Viz obrázek. Uvnitř této kružnice neleží rovněž žádné další body P_{r-1}. Tedy hrana p_rp_i je hranou Delaunayova grafu pro množinu P_r a ta musí být legální. Analogicky se dokáže, že i hrany p_rp_j a p_rp_k jsou legální.

OBR 10.14 K důkazu, že p_rp_i je legální.

Může se ale stát, že některá z hran p_ip_j, p_ip_k a p_jp_k se v nové triangulaci stane ilegální hranou. Pak je potřeba ji pomocí flipu nahradit hranou vycházející z bodu p_r. Nechť například p_ip_j je ilegální. Pak je to hrana nejen trojúhelníku $p_ip_jp_r$ ale také dalšího trojúhelníku $p_ip_jp_l$. Nahradíme ji tedy hranou p_rp_l, která je již legální. Teď se ale může stát ilegální některá z hran p_ip_l a p_jp_l. Proto ji opět pomocí flipu nahradíme hranou vycházející z bodu p_r.

OBR 10.15 Hrana p_ip_j je ilegální.

V tomto postupu pokračujeme tak dlouho, až v triangulaci nebude žádná ilegální hrana. (Po každém flipu je nová triangulace v daném lexikografickém uspořádání větší než ta předchozí.) Postup zachycuje následující animace a pseudokód. Vstupem psedokódu je bod p_r, hrana p_ip_j a legální triangulace $\mathcal{T}_{r-1}$.

ANIMACE

PSEUDOKÓD 37 z pseudo.pdf Prosím nepsat pruh nad úsečkami, místo $\mathcal{T}$ použít $\mathcal{T}_{r-1}$ a místo p_k psát p_l.

Jestliže pomocí vyhledávací struktury zjistíme, že bod p_r leží na hraně p_ip_j, pak hranu p_ip_j nahradíme hranami p_rp_i a p_rp_j a vytvoříme další hrany spojením bodu p_r s vrcholy p_k a p_l přilehlých trojúhelníků ke hraně p_ip_j. Stejně jako v předchozím se dokáže, že nové hrany p_rp_i, p_rp_j, p_rp_k a p_rp_l jsou legální. Nelegálními se ale mohou stát hrany p_ip_k, p_jp_k, p_ip_l a p_jp_l. To opravíme postupným prováděním flipů stejně jako v předchozím případě.

OBR 10.16 Bod p_r na hraně p_ip_j.

Vyhledávací struktura. V průběhu algoritmu máme ke každé triangulaci příslušnou vyhledávací strukturu. Je to orientovaný graf, jehož listy jsou trojúhelníky aktuální triangulace a vnitřními uzly jsou trojúhelníky předchozích triangulací.

Na začátku má triangulace $\mathcal{T}_0$ jediný trojúhelník $p_0p_{-1}p_{-2}$ a vyhledávací struktura $\mathcal{D}_0$ jediný uzel, který je listem a odpovídá tomuto trojúhelníku. Pro triangulaci $\mathcal{T}_{r-1}$ máme vyhledávací strukturu $\mathcal{D}_{r-1}$. Nyní triangulaci $\mathcal{T}_{r-1}$ postupně měníme způsobem popsaným v předchozí části. Každému přechodu od jedné triangulace k další triangulaci odpovídá jednoznačně určený přechod od jedné vyhledávací struktury k další vyhledávací struktuře. Ukažme si to na obrázku:

OBR 10.17 Změna vyhledávací struktury při vytvoření hran uvnitř trojúhelníku.

OBR 10.18 Změna vyhledávací struktury při flipu.

Tímto postupem tedy současně s postupným vytvořením triangulace $\mathcal{T}_r$ vytvoříme postupně i vyhledávací strukturu $\mathcal{D}_r$. Ta závisí pouze na pořadí bodů $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Počáteční volba bodů p_0, p_{-1}, p_{-2}. Nyní si blíže objasníme kroky (1) a (4) našeho algoritmu. Budeme se přitom pro lepší pochopení odvolávat na geometrickou představu. Body p_{-1} a p_{-2} budou určeny svými vlastnostmi, žádné jejich konkrétní souřadnice určovat nebudeme. Rovněž o tom, zda je nějaká hrana legální či ilegální, a mezi čtyřmi body, které vstupují do hry, bude některý z bodů p_{-1}, p_{-2}, nebude rozhodovat výpočet, ale pouze pravidla, které vyplývají z vlastností bodů p_{-1} a p_{-2}.

Jak jsme již řekli, za bod p_0 zvolíme ten z bodů množiny P, který je maximální v lexikografickém uspořádání prvně podle souřadnice y a pak podle souřadnice x.

Bod p_{-1} zvolíme vpravo dole od množiny P. (Exaktněji řečeno, jeho y-ová souřadnice je menší než minimum y-ových souřadnic bodů množiny P a jeho x-ová souřadnice je větší než maximum x-ových souřadnic bodů množiny P.) Přitom volbu p_{-1} provedeme tak,

- aby ležel vně všech kružnic určených každou trojicí bodů z množiny P, které neleží na přímce,
- aby všechny body množiny P ležely pod přímkou p_0p_{-1}.

Bod p_{-2} zvolíme vlevo nahoře od množiny P tak,

- aby ležel vně všech kružnic určených každou trojicí bodů z množiny $P \cup \{p_{-1}\}$, které neleží na přímce,
- aby všechny body množiny P ležely pod přímkou p_0p_{-2},
- aby všechny body množiny P ležely nad přímkou $p_{-1}p_{-2}$.

Tedy všechny body množiny P leží uvnitř trojúhelníka $p_0p_{-1}p_{-2}$, každý čtyřúhelník $p_{-2}p_ip_{-1}p_j$ je nekonvexní a v důsledku toho bod p_{-2} leží vně všech kružnic opsaných trojúhelníkům $p_{-2}p_ip_j$.

OBR 10.19 Množina P v trojúhelníku $p_0p_{-1}p_{-2}$.

Za těchto předpokladů je každá Delaunayova (legální) triangulace složena

(1) ze spojnic bodu p_{-1} s vrcholy pravé části hranice konvexního obalu množiny P,
(2) ze spojnic bodu p_{-2} s vrcholy levé části hranice konvexního obalu množiny P,
(3) z Delaunayovy triangulace množiny P.

Díky tomu, získáme Delaunayovu triangulaci množiny P tak, jak je popsáno v kroku (4).

Pravidla pro práci s algoritmem vycházejí z lemmatu:

Lemma 10.9. *Při výše popsané volbě bodů p_0, p_{-1} a p_{-2} jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- *p_j leží vlevo od orientované přímky $p_i p_{-1}$.*
- *p_j leží vlevo od orientované přímky $p_{-2} p_i$.*
- *$p_j > p_i$ v lexikografickém uspořádání njedřív podle y, pak podle x.*

Místo provádění důkazu demonstrujme situaci obrázkem.

OBR 10.20 K lemmatu 10.9. Body p_{-1} a p_{-2} jsou vybrány tak, že v barevně vyznačených úhlech neleží žádný další bod množiny P.

Při zjišťování, zda je hrana legální či ilegální postupujeme takto:

- Všechny hrany trojúhelníka $p_0 p_{-1} p_{-2}$ jsou legální.
- Hrana $p_{-2} p_j$ s přilehlými vrcholy p_{-1} a p_k je legální.

OBR 10.21 Ilustrace předchozího tvrzení.

- Hrana $p_{-1} p_j$ s přilehlými vrcholy p_{-2} a p_k je legální.
- Nechť hrana $p_i p_j$ má přilehlé vrcholy p_k a p_l, čtyřúhelník $p_i p_k p_j p_l$ je konvexní a mezi čísly i, j, k, l je právě jedno záporné. Pak je hrana $p_i p_j$ legální, právě když
$$\min(k.l) < \min(i, j).$$

OBR 10.22 $\min(-2, l) < \min(i, j)$, hrana $p_i p_j$ je legální.

OBR 10.23 $\min(k, l) > \min(-1, j)$, hrana $p_{-1} p_j$ je ilegální.

Pseudokód algoritmu a jeho očekávaná časová náročnost. Stručný pseudokód algoritmu popsaného detailněji v předchozích částech můžeme podat takto:

PSEODOKÓD číslo 36 z pseudo.pdf

Bez důkazu, který lze najít v [Berg et al], uvedeme větu o očekávané časové náročnosti tohoto náhodnostního algoritmu.

Věta 10.10. *Očekávaná časová náročnost náhodnostního přírůstkového algoritmu pro Delaunayovu triangulaci množiny o $n + 1$ prvcích je $O(n \log n)$.*