Druhá vnitrosemestrální práce, MB103, 20. 11. 2017

Skupina A

Příklad 1. *(4b) Vyřešte diferenciální rovnici*

$$y' = \frac{y}{1+x} + 1.$$

Řešení.

$$y = (1+x)\ln(1+x) + cx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

, □

Příklad 2. *(6b) Určete těžiště části roviny ležící v prvním kvadrantu, uvnitř elipsy $3x^2 + y^2 = 2$ a pod přímkou $y = \sqrt{3}x$.*

Řešení. Provedeme lineární transformaci, která převede elipsu na kružnici a poté standardní polární transformaci. Celkem $x = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, pro determinant z Jakobiánu pak $|J| = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Přímka $y = \sqrt{3}x$ přejde na $\tan\varphi = 1$, neboli $\varphi = \frac{\pi}{4}$ Pro obsah pak máme

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r}{\sqrt{3}} \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

Bez integrace můžeme obsah určit tak ,že uvážíme lineární transformaci $x' = \sqrt{3}x$, $y' = y$, tedy pouze „natahujeme" rovinu podél osy x s koeficientem $\sqrt{3}$. Elipsu natáhneme na kružnici. U přímky změníme směrnici faktorem $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Obsahy se pak změní stejným faktorem, jakým natahujeme osu x, tedy koeficientem $\sqrt{3}$. Uvažovaná část elipsy přejde na čtvrtinu kruhu o poloměru $\sqrt{2}$, jejíž obsah je tedy $\frac{\pi}{4}$, uvažovaná část elipsy má pak obsah $\sqrt{3}$ krát menší.

Pro x-ovou souřadnici těžiště pak

$$x_T = \frac{1}{S} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2\cos\varphi}{3} \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r = \frac{8\sqrt{3}}{9\pi}.$$

Pro y-novou souřadnici

$$y_T = \frac{1}{S} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{3}} \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r = \frac{8(\sqrt{2}-1)}{3\pi}.$$

Pro souřadnice těžiště tedy

$$T = [\frac{8\sqrt{3}}{9\pi}, \frac{8(\sqrt{2}-1)}{3\pi}].$$

□