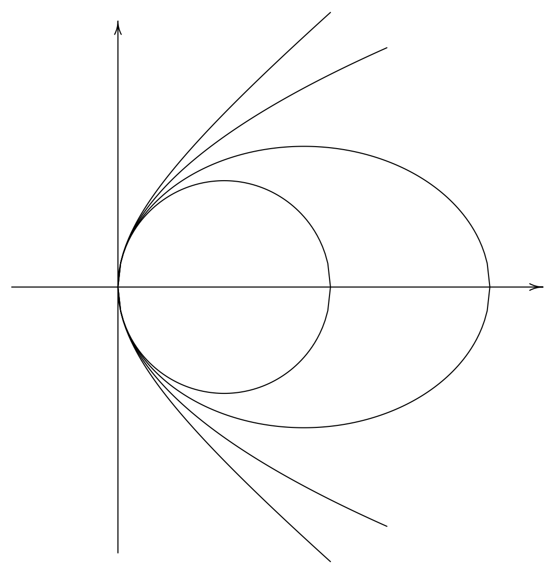
Kuželosečky



Obsah

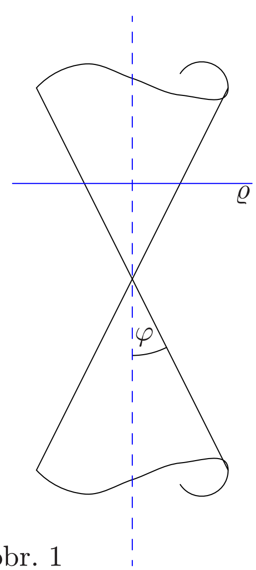
1 Kuželosečky

Jak název napovídá, kuželosečky dostaneme, sekneme-li kuželovou plochu nějakou rovinou. Kuželová plocha je rotační a sečná rovina neprochází ani osou kuželové plochy (to bychom dostali pouze dvě různoběžky) ani jejím vrcholem (to by výsledkem byl jediný bod – právě tento vrchol).

To, jaká kuželosečka vznikne, závisí na vzájemné poloze sečné roviny a osy kuželové plochy. Je-li rovina kolmá k ose, vznikne kružnice. Budeme-li zmenšovat úhel ψ mezi rovinou a osou, kružnice přejde v elipsu. Dalším stáčením sečné roviny (zmenšováním úhlu ψ) se elipsa protahuje a v okamžiku, kdy ψ nabyde hodnoty φ, tj. rovina je rovnoběžná s nějakou površkou kuželové plochy, je sečnou křivkou parabola. Jestliže $\psi < \varphi$, protne rovina obě části kuželové plochy a výsledkem bude hyperbola.

V dalším textu probereme jednotlivé kuželosečky podrobněji.

1.1 Kružnice



obr. 1

Kružnici jsme získali jako průsečnici rotační kuželové plochy a roviny kolmé k ose plochy. (Stejně tak jsme mohli seknout jakoukoli jinou rotační plochu rovinou kolmou k její ose.) Umístíme-li kružnici o poloměru r do soustavy souřadnic tak, že střed leží v počátku, bude mít rovnici:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kružnice se středem v bodě $S[m, n]$ má rovnici:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Obecná rovnice kružnice je:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad \text{kde} \quad a^2 + b^2 - 4c > 0.$$

Zde je střed $S\left[-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right]$ a poloměr $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$.

1.1.1 Tečna ke kružnici

Máme kružnici se středem $S[m; n]$ a poloměrem r a na kružnici bod $T[x_0; y_0]$. Rovnice tečny ke kružnici vedená bodem T má tvar:

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2.$$

Bystrý čtenář si všimne, že rovnice tečny je podobná rovnici kružnice, pouze jedno x ve výrazu $(x - m)(x - m)$ rovnice kružnice bylo nahrazeno x_0 a obdobně jedno y v $(y - n)(y - n)$ se zaměnilo za y_0.

Příklad 1

Kružnice je daná rovnicí: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 8$. Nalezněte rovnice těch tečen dané kružnice, které jsou rovnoběžné s přímkou $p:\ 2x + 3y = 0$.

Řešení

Nejprve určíme body dotyku hledaných tečen. Jsou to průsečíky kružnice s přímkou q, která prochází středem kružnice a je kolmá k přímce p. Střed kružnice má souřadnice $[4/2; -2/2] = [2; -1]$, takže přímka q má rovnici:

$$3(x-2) - 2(y+1) = 0.$$

Průsečíky přímky a kružnice najdeme vyřešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8, \quad \text{upravená rovnice přímky } q \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y &= 8. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do druhé rovnice. Po úpravě vyjde:

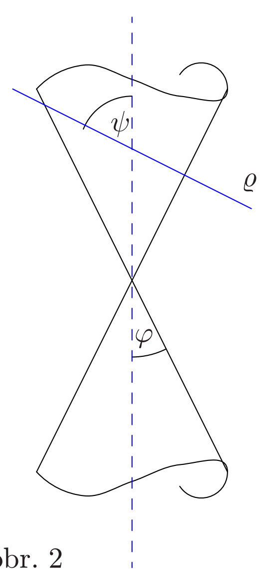
$$x^2 - 4x = 0, \quad \text{z toho } x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Body dotyku jsou tedy $T_1[0\,; -4]$, $T_2[4; 2]$. A můžeme psát rovnice tečen:

t_1: $2(x-0) + 3\,(y+4) = 0$, $\quad$ t_2: $2(x-4) + 3\,(y-2) = 0$, což upraveno dá

t_1: $2x + 3y + 12 = 0$, $\quad$ t_2: $2x + 3y - 14 = 0$.

1.2 Elipsa



obr. 2

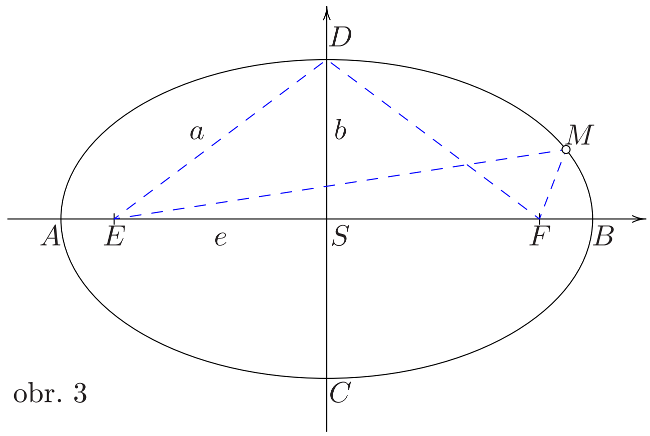
Elipsa je další z kuželoseček. Je to zároveň „válcosečka“, tj. průsečnice rotační válcové plochy a roviny, která není ani kolmá k ose plochy ani s ní rovnoběžná.

Geometrická definice říká, že **elipsa** je množina bodů X v rovině, které mají od dvou daných bodů E, F (ohnisek) konstantní součet vzdáleností,

$$|XE| + |XF| = k.$$

Z definice elipsy plyne, že je to křivka symetrická podle dvou os symetrie. Jedna osa prochází **ohnisky** E, F, říká se jí **hlavní osa**, druhá je k ní kolmá a prochází středem úsečky EF; nazývá se **vedlejší osa**.

Body A, B na obrázku 3 se nazývají **hlavní vrcholy** elipsy, body C, D jsou **vedlejší vrcholy** elipsy, S je její **střed**. Vzdálenost hlavního vrcholu od středu elipsy se nazývá **hlavní poloosa**, značí se písmenkem a, vzdálenost vedlejšího vrcholu od středu elipsy je **vedlejší poloosa**, značí se b a vzdálenost ohniska od středu elipsy je **excentricita neboli výstřednost**, značí se e. Spojnice libovolného bodu M elipsy s ohnisky se nazývají **průvodiče** bodu M.



obr. 3

Z obrázku je patrné, že konstanta k v definici elipsy je rovna dvojnásobku délky hlavní poloosy, $k = 2a$, neboť $k = |AE| + |AF| = (|AS| - |SE|) + |AS| + |SF| = 2|AS| = 2a$. Takže body elipsy splňují:

$$|XE| + |XF| = 2a, \quad \text{kde } \ a > e. \tag{1}$$

To znamená, že $|DE| = |DF| = a$ a z pravoúhlého trojúhelníka ESD dostáváme vztah mezi $a,\ b,\ e$:

$$e^2 + b^2 = a^2. \tag{2}$$

1.2.1 Rovnice elipsy

Odvodíme nyní rovnici elipsy pro případ, kdy elipsa je umístěna do soustavy souřadnic tak, že střed elipsy splývá s počátkem a osy elipsy jsou v osách soustavy souřadnic. Předpokládáme, že hlavní poloosa je a, vedlejší poloosa je b a excentricita je $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ohniska mají souřadnice $E[-e, 0],\ F[e, 0]$ a obecný bod elipsy je $M[x, y]$. Dosadíme do rovnice (1):

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

A máme rovnici elipsy s hlavní poloosou a a excentricitou e. Rovnici ještě převedeme na jednodušší tvar. Povýšíme na druhou a upravíme:

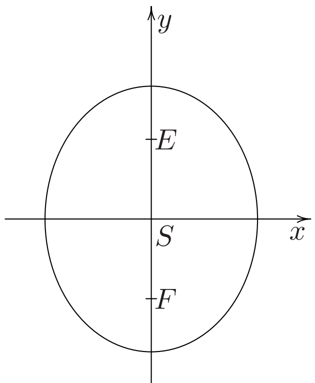
$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a^2 - x^2 - y^2 - e^2.$$

Dalším umocněním se zbavíme odmocniny a sečteme, co se sečíst dá. Získáme rovnici:

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Za závorku dosadíme z rovnice (2) a celou rovnici vydělíme součinem a^2b^2. Výsledkem je rovnice elipsy se středem v počátku a poloosami $a,\ b$ ve tvaru:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{kde} \quad a \geq b > 0.$$



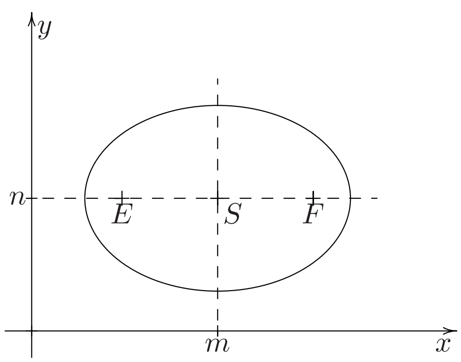
obr. 4

Stejná rovnice, kde ale $b \geq a > 0$, je rovněž rovnice elipsy (avšak tentokrát postavené „na hlavičku“). Hlavní poloosa je nyní b, vedlejší je a a ohnisková vzdálenost je $e = \sqrt{b^2 - a^2}$. Ohniska leží na ose y. Pokud $a = b$, je $e = 0$, ohniska splynou se středem a dostaneme kružnici.

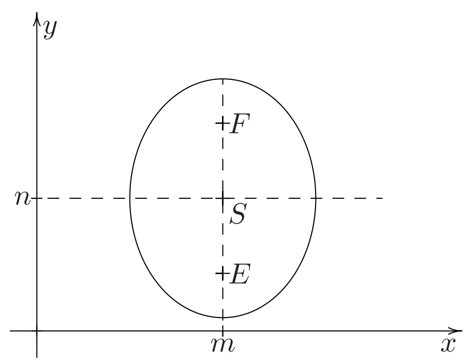
Je-li elipsa umístěna v soustavě souřadnic tak, že osy elipsy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, ale nemusí s nimi splývat (tj. střed nemusí být totožný s počátkem), je rovnice elipsy:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

tzv. středový tvar rovnice elipsy, $S[m; n]$ je střed elipsy.



obr. 5a)



obr. 5b)

Pro $a \geq b > 0$ leží ohniska na vodorovné ose (obr. 5a) a mají souřadnice

$$E[m - \sqrt{a^2 - b^2}; n], \; F[m + \sqrt{a^2 - b^2}; n].$$

Jestliže platí opačná nerovnost $b \geq a > 0$, ohniska leží na svislé ose (obr. 5b),

$$E[m; n - \sqrt{a^2 - b^2}], \; F[m; n + \sqrt{a^2 - b^2}].$$

Na závěr uvedeme **obecnou rovnici** elipsy:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

Aby rovnice představovala vůbec nějakou křivku, musí být splněno:

$$\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0$$

a o elipsu půjde v případě, že $A \cdot B > 0$.

Příklad 1

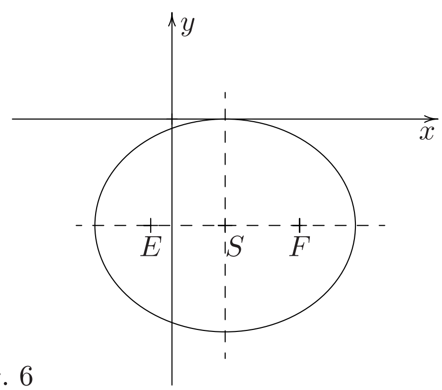
Elipsa je dána rovnicí:

$$2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0.$$

Nalezněte středový tvar rovnice elipsy, určete souřadnice ohnisek, načrtněte obrázek.

Řešení

Z výrazů $2x^2 - 4x,\ 3y^2 + 12y$ vytkneme 2 a 3 a doplníme na čtverec:



obr. 6

$$2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 2 + 12 - 2,$$

dále vydělíme pravou stranou

$$\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

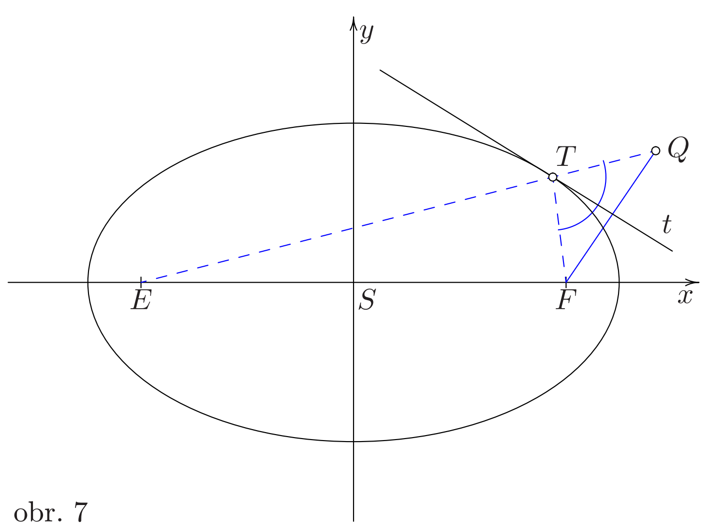
Získali jsme rovnici elipsy ve středovém tvaru. Z ní můžeme vyčíst souřadnice středu $S[1;-2]$ a velikost poloos: $a = \sqrt{6},\ b = 2$. Potom $e = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$, takže ohniska mají souřadnice $E[1-\sqrt{2};-2],\ F[1+\sqrt{2};-2]$.

1.2.2 Tečna k elipse

Geometricky je tečna k elipse osou vnějšího úhlu průvodičů bodu dotyku, viz obr. 7. Říkáme, že tečna půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku.

Analyticky podobně jako u kružnice stačí ve středové rovnici (3) elipsy nahradit jedno x, resp. y písmenkem x_0, resp. y_0, kde $[x_0, y_0]$ jsou souřadnice bodu dotyku, a rovnice tečny je tu:

$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1. \tag{4}$$



obr. 7

Odvození rovnice by dalo trochu práce. Vyjde se z podmínky, že tečna k elipse má s elipsou jediný společný bod (matematicky – příslušná kvadratická rovnice má jediné řešení, tj. diskriminant je roven nule) a dále bod dotyku musí ležet na elipse, tj. jeho souřadnice x_0, y_0 musí splňovat rovnici elipsy.

Příklad 2

Je dána elipsa: $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y = 6$ a přímka $t:\ y = -x/2 + q$. Určete hodnotu q tak, aby přímka t byla tečnou zadané elipsy, a nalezněte souřadnice bodu dotyku.

Řešení

Hodnotu q určíme z podmínky, že tečna má s elipsou společný jediný bod. Hledáme tedy průsečíky přímky t a elipsy a požadujeme, aby příslušná úloha měla pouze jedno řešení. Jinými slovy řešíme soustavu:

$$x^2 + 2y^2 + 4x + 4y = 6$$

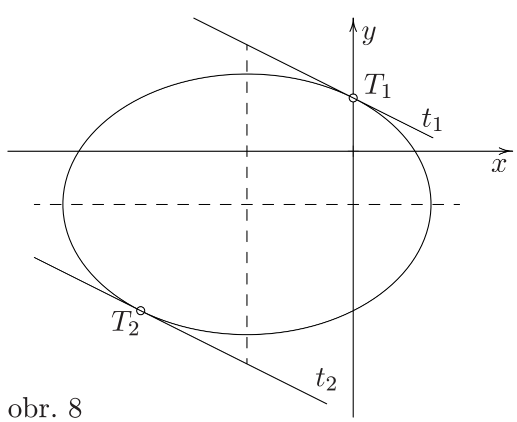
$$y = -x/2 + q$$

Z druhé rovnice dosadíme do první:

$$x^2 + 2(x^2/4 - xq + q^2) + 4x - 2x + 4q = 6$$

a upravíme

$$3x^2 + (-4q + 4)x + 4q^2 + 8q - 12 = 0. \tag{1}$$



obr. 8

Dostali jsme kvadratickou rovnici pro neznámou x (souřadnici bodu dotyku) s parametrem q. Hodnota parametru musí být taková, aby získaná kvadratická rovnice pro tuto hodnotu q měla jediné řešení. To znamená, že diskriminant rovnice musí být roven nule:

$$D = 16q^2 - 32q + 16 - 48q^2 - 96q + 144 = 0.$$

Rovnici postupně upravíme:

$$\begin{aligned} -32q^2 - 128q + 160 &= 0 / : (-32) \\ q^2 + 4q - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Hledaná q jsou: $q_1 = 1$, $q_2 = -5$. Daná elipsa má tedy dvě vzájemně rovnoběžné tečny o rovnici $y = -x/2 + q$. První je t_1: $y = -x/2 + 1$, druhá t_2: $y = -x/2 - 5$. x-ové souřadnice bodů dotyku získáme vyřešením rovnice (1) pro vypočtené hodnoty parametru q, y-ové dopočteme z příslušných rovnic tečen:

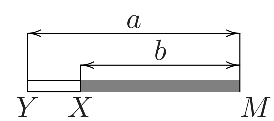
$q = 1:\ 3x^2 + 4 + 8 - 12 = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ \ y = -0/2 + 1 = 1.$

$q = -5:\ 3x^2 + 24x + 100 - 40 - 12 = 0 \ \Rightarrow\ \ x = -4,\ y = 4/2 - 5 = -3.$

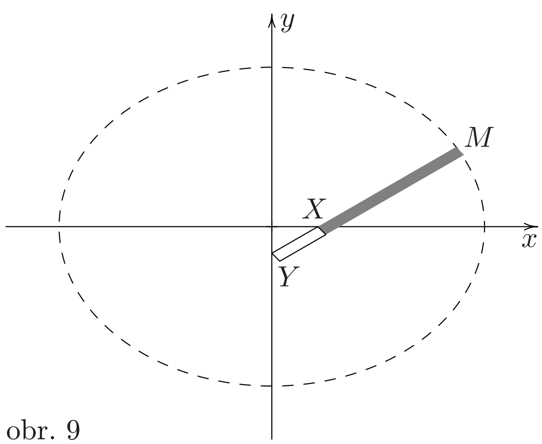
Body dotyku jsou $T_1[0; 1]$, $T_2[-4; -3]$.

1.2.3 Konstrukce elipsy

Povíme si, jak sestrojit elipsu, známe-li velikosti poloos a, b. Jeden způsob je tzv. proužková konstrukce. Proužková, protože při ní můžeme použít vhodně upravený proužek papíru, ale stejně dobře poslouží třeba pravítko. Na proužku papíru délky a si vyznačíme délku b podle obrázku. Nyní pohybujeme proužkem ve zvolené soustavě souřadnic tak, že bod Y se posouvá po ose y, bod X po ose x a bod M opisuje elipsu.

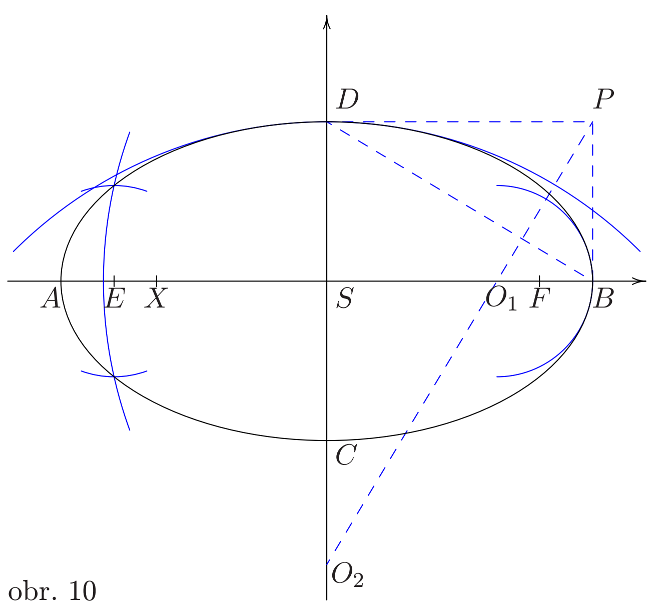


Jiná konstrukce bere na pomoc oskulační kružnice. To jsou kružnice, které mají v daném bodě křivky s křivkou společnou tečnu a v blízkém okolí bodu jsou „stejně zakřivené“, takže v okolí zmíněného bodu křivka a oskulační kružnice prakticky splývají. (Geometři to definují přesněji, ale my si vystačíme s tímto vymezením.) Budeme používat pouze oskulační kružnice ve vrcholech elipsy. Jak získáme jejich středy a poloměry, je vidět z obrázku 10. Trojúhelník BSD doplníme na obdélník $BSDP$. Sestrojíme úhlopříčku DB a z bodu P na ní kolmici. Ta protne hlavní osu v bodě O_1, středu oskulační kružnice v bodě B a vedlejší osu v bodě O_2, středu oskulační kružnice v bodě D. Poloměry těchto oskulačních kružnic jsou $\varrho_1 = |O_1B|$, $\varrho_2 = |O_2D|$.



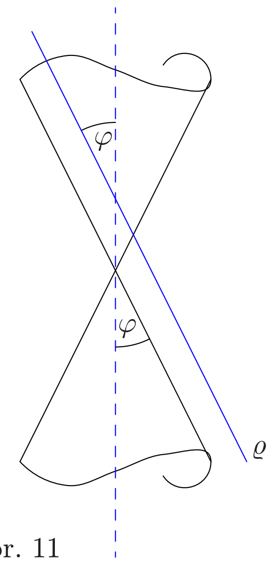
obr. 9

V místech, kde oskulační kružnice již elipsu špatně aproximují (odchylují se od ní), můžeme konstrukci doplnit několika body, sestrojenými na základě definice. Na úsečce AB si zvolíme pomocný bod X, čili $|AX| + |XB| = 2a$ a sestrojíme kružnicové oblouky $k_1(E,\ r_1 = |AX|)$, $k_2(F,\ r_2 = |XB|)$. Průsečíky kružnic jsou body elipsy - takto dostaneme dva body elipsy a další dva získáme záměnou ohnisek coby středů kružnic (na obr. 10 jsou kvůli přehlednosti konstrukce sestrojené pouze první dva body).



obr. 10

1.3 Parabola



obr. 11

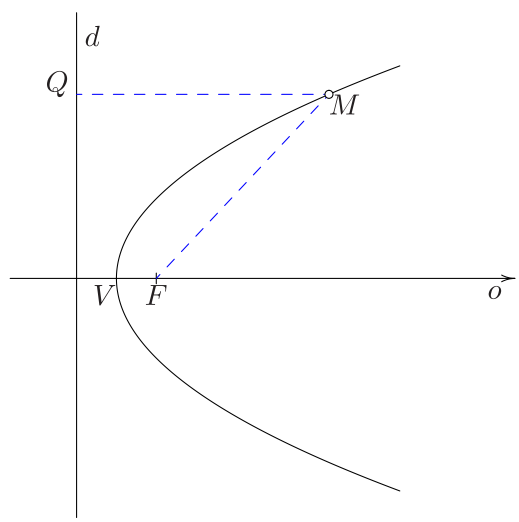
Další v pořadí kuželoseček je parabola. Jak již bylo zmíněno, je to průsečnice kuželové plochy a roviny, která je rovnoběžná právě s jednou površkou (přímkou kuželové plochy), tj. $\psi = \varphi$. Narozdíl od kružnice a elipsy je parabola otevřená křivka.

Geometrická definice: **Parabola** je množina bodů v rovině, jejichž vzdálenost od pevné přímky d je stejná jako vzdálenost od pevného bodu F, který na přímce neleží

$$|Xd| = |XF|.$$

Přímce d se říká **řídící přímka**, bod F je **ohnisko**.

Parabola má jednu osu symetrie (přímka o na obrázku 12), která prochází ohniskem a je kolmá k řídící přímce. V polovině vzdálenosti mezi ohniskem a řídící přímkou leží **vrchol** paraboly V. Spojnice FM a MQ, kde Q je pata kolmice z bodu F na řídící přímku d a bod M obecný bod paraboly, jsou **průvodiče** bodu M. Vzdálenost $|Fd|$ se obvykle značí písmenem p a nazývá se **parametr** paraboly (v některých učebnicích půlparametr).



obr.12

1.3.1 Rovnice paraboly

Umístíme parabolu do soustavy souřadnic tak, že osa paraboly splývá s osou x, vrchol je v počátku a ohnisko leží napravo od řídící přímky. Vzdálenost ohniska od řídící přímky označíme p, to znamená, že souřadnice ohniska jsou $F[p/2; 0]$, a rovnice řídící přímky d je: $x = -p/2$. Pro obecný bod $M[x, y]$ tedy platí.

$$|Md| = |MF|,$$

$$|x + p/2| = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} \quad / \,^2,$$

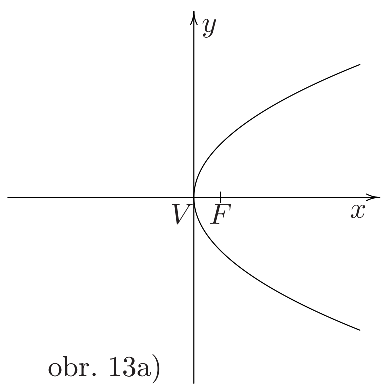
$$\cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2,$$

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

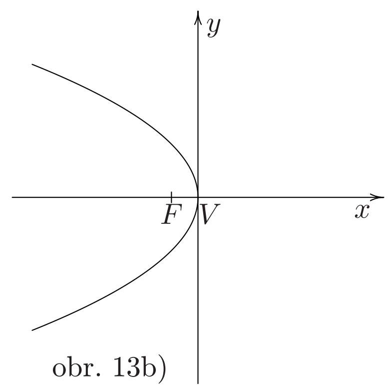
Rovnice (1) je rovnicí paraboly s vrcholem v počátku, osou v ose x a ohniskem napravo od vrcholu (obr. 13a). (Říkáme, že parabola je otevřená směrem doprava.) Pokud na pravé straně rovnice (1) změníme znaménko,

$$y^2 = -2px. \tag{2}$$

získáme rovnici pro parabolu s vrcholem v počátku, osou v ose x a ohniskem nalevo od vrcholu (obr. 13b) - parabola je otevřená doleva.



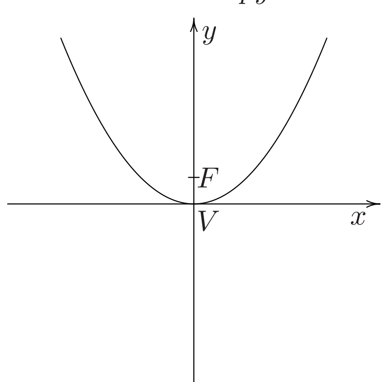
obr. 13a)



obr. 13b)

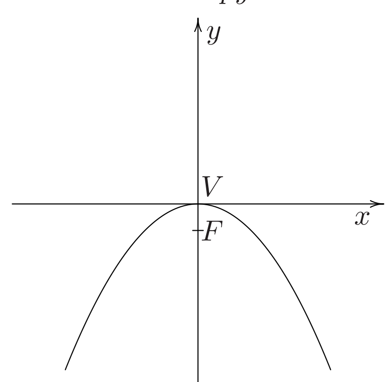
Leží-li osa paraboly v ose y, vrchol opět v počátku, dostaneme další dvě možnosti; parabola otočená nahoru (obr. 14a)) a parabola otočená dolu (obr. 14b)). Příslušné rovnice jsou:

$$x^2 = 2py$$



obr. 14a)

$$x^2 = -2py$$

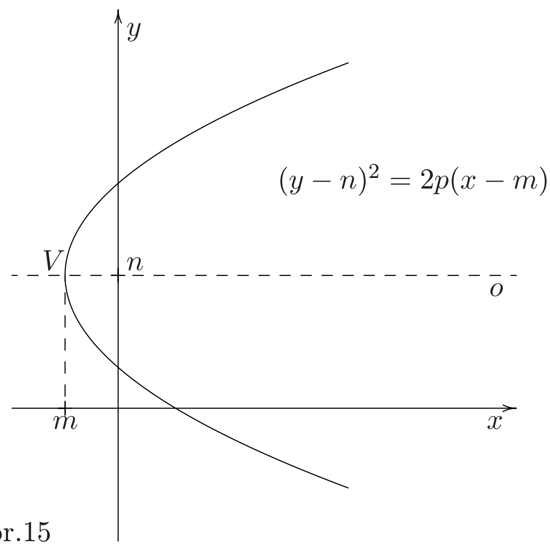


obr. 14b)

Jestliže je vrchol paraboly v bodě $V[m; n]$ a osa rovnoběžná s osou x, je parabola popsána rovnicí (3) (obr. 15 - odpovídá znaménku plus v rovnici (3)), v případě osy rovnoběžné s osou y rovnicí (4). Rovnice se nazývají **vrcholové rovnice paraboly**.

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m) \tag{3}$$

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n) \tag{4}$$



obr.15

Parabola může být zadána rovněž **obecnou rovnicí**:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \tag{5}$$

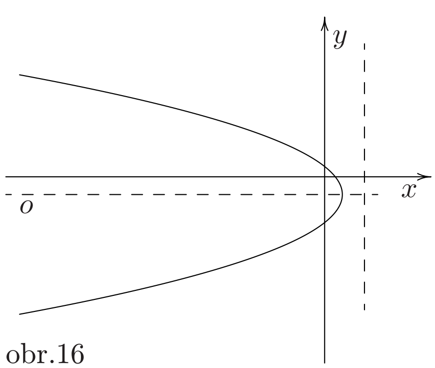
kde buď $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$, nebo $B = 0,\ A \neq 0,\ D \neq 0$.

Příklad 1

Parabola je dána rovnicí $3y^2 + 5x + 4y - 2 = 0$. Určete souřadnice vrcholu, souřadnice ohniska, rovnici osy paraboly a rovnici řídící přímky, načrtněte obrázek.

Řešení

Protože v rovnici je kvadratický člen v proměnné y, bude osa paraboly rovnoběžná s osou x. Abychom zjistili souřadnice vrcholu, převedeme rovnici na vrcholový tvar (bude odpovídat rovnici (3)).



obr.16

Dvojčlen $3y^2 + 4y$ doplníme na čtverec a provedeme další potřebné úpravy:

$$3\left(y^2 + \frac{4}{3}y\right) + 5x - 2 = 0,$$

$$3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{4}{9} = -5x + 2,$$

$$3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = -5x + 2,$$

$$3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = -5x + \frac{10}{3}.$$

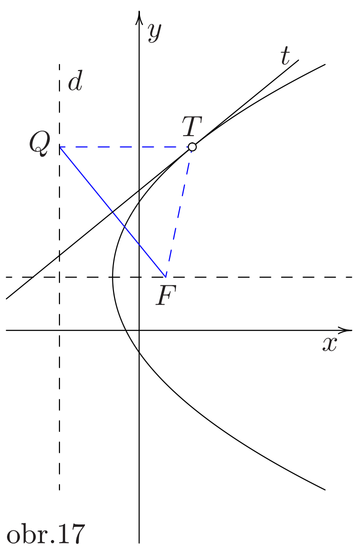
Z pravé strany poslední rovnice vytkneme -5 a poté rovnici vydělíme 3. Výsledkem je rovnice zadané paraboly ve vrcholovém tvaru:

$$\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right),$$

Z poslední rovnice „vyčteme“, že parabola je otevřená doleva (znaménko minus za rovnítkem), hodnota parametru je $p = \frac{5}{6}$ (srovnej s rovnicí (3)) a souřadnice vrcholu jsou $V\left[\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right]$. Nyní můžeme určit souřadnice ohniska. Protože ohnisko leží nalevo od vrcholu, je $F[m - p/2; n]$, vyčísleno $F\left[\frac{1}{4}; -\frac{2}{3}\right]$. Řídící přímka má rovnici $x = m + p/2$, tj. $x = \frac{13}{12}$ a rovnice osy paraboly je $y = -\frac{2}{3}$.

1.3.2 Tečna k parabole

Stejně jako u elipsy tečna k parabole půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku. Průvodiče jsou zde jednak kolmice z bodu T na řídící přímku (v obr. 17 je to spojnice QT), jednak spojnice FT. Analytické vyjádření tečny dostaneme podobně jako u kružnice a elipsy.



obr.17

Rovnici paraboly ve vrcholovém tvaru:

$$(y - n)^2 = 2p\,(x - m),$$

nejprve přepíšeme na tvar

$$(y - n)(y - n) = p\,(x - m) + p\,(x - m). \tag{6}$$

Nyní jedno x na pravé straně rovnice (6) a jedno y na levé straně nahradíme příslušnou souřadnicí x_0 resp. y_0 bodu dotyku. Získáme tak rovnici tečny:

$$(y_0 - n)(y - n) = p\,(x_0 - m) + p\,(x - m) \tag{7}$$

Analogicky se dostanou rovnice tečen pro další tři typy parabol. Parabola o rovnici:

$$(y - n)^2 = -2p\,(x - m),$$

má v bodě $T[x_0; y_0]$ tečnu vyjádřenou rovnicí:

$$(y_0 - n)(y - n) = -p\,(x_0 - m) - p\,(x - m). \tag{8}$$

Předešlé se týkalo parabol s osami rovnoběžnými s osou x. Paraboly s osami rovnoběžnými s osou y jsou popsány rovnicí:

$$(x - m)^2 = \pm 2p\,(y - n)$$

a jejich tečny mají analytické vyjádření:

$$(x_0 - m)(x - m) = \pm p\,(y_0 - n) \pm p\,(y - n), \tag{9}$$

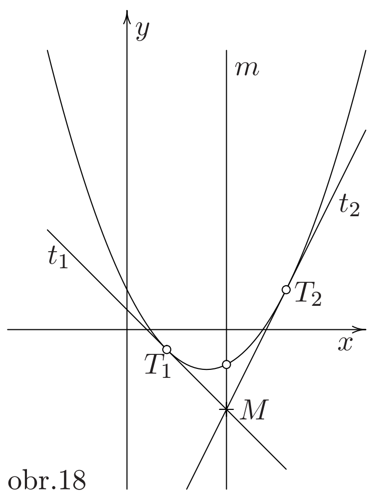
přičemž znaménku plus v rovnici paraboly odpovídá znaménko plus v rovnici její tečny a totéž pro znaménko minus.

Příklad 2

Parabola je dána rovnicí $2(y+1) = (x-2)^2$. Určete rovnice všech přímek, které prochází bodem $M[5/2; -2]$ a mají s parabolou právě jeden společný bod.

Řešení

Načrtneme-li si obrázek (obr. 18), je zřejmé, že M je vnější bod paraboly (vrchol paraboly je $V[2; -1]$, osa je rovnoběžná s osou y a parabola je otevřená nahoru).



obr.18

To znamená, že hledané přímky budou tři, dvě tečny a jedna přímka rovnoběžná s osou paraboly. Rovnici té poslední přímky (označíme ji m) můžeme napsat ihned;

$$m:\quad x = \frac{5}{2}.$$

Průsečík přímky m a paraboly je bod $M'\left[\frac{5}{2}; -\frac{7}{8}\right]$, jeho y-ovou souřadnici jsme vypočítali z rovnice paraboly. Rovnice tečen mají tvar (viz rce (9) kap. 1.3.2):

$$(y_0+1) + (y+1) = (x_0-2)(x-2), \tag{1}$$

kde $[x_0; y_0]$ je (zatím neznámý) bod dotyku. Pro určení jeho souřadnic potřebujeme dvě rovnice. Jedna z nich je daná podmínkou, že bod dotyku leží na parabole:

$$2(y_0+1) = (x_0-2)^2.$$

A druhou dostaneme z požadavku, aby tečna procházela bodem $M[5/2; -2]$, tj.

$$(y_0+1) + ((-2)+1) = (x_0-2)(\frac{5}{2}-2), \quad \text{což upraveno dá :} \quad y_0 = \frac{1}{2}x_0 - 1.$$

Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$y_0 = \frac{1}{2}x_0 - 1, \tag{2}$$

$$2(y_0+1) = (x_0-2)^2 \tag{3}$$

Z rovnice (2) dosadíme do rovnice (3):

$$2(\frac{1}{2}x_0 - 1 + 1) = (x_0-2)^2,$$

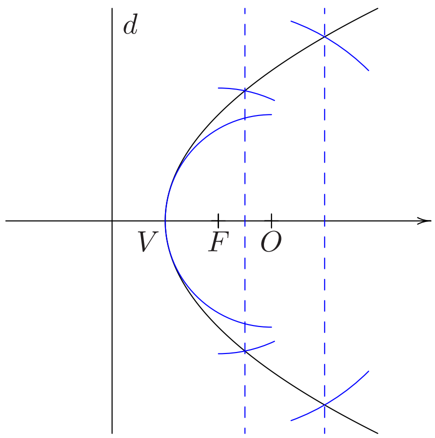
$$x_0 = x_0^2 - 4x_0 + 4,$$

$$x_0^2 - 5x_0 + 4 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = 1 \quad a\ z\ rce\ (2) & y_{01} = -1/2 \\ x_{02} = 4 & y_{02} = 1. \end{cases}$$

Získali jsme body dotyku $T_1[1; -1/2]$, $T_2[4; 1]$. Rovnice odpovídajících tečen dostaneme dosazením souřadnic bodů dotyku do rovnice (1). Vyjde t_1: $y = -x + 1/2$, $\quad t_2$: $y = 2x - 7$.

1.3.3 Konstrukce paraboly

Předpokládáme, že je zadáno ohnisko paraboly a řídící přímka. Sestrojíme osu paraboly (prochází ohniskem a je kolmá k řídící přímce) a vyznačíme vrchol paraboly (leží na ose a půlí vzdálenost mezi ohniskem a řídící přímkou). Oskulační kružnice ve vrcholu má střed (označíme ho O) na ose, poloměr $r = 2|FO| = p$ a samozřejmě prochází vrcholem.

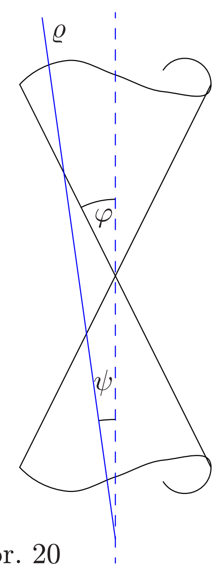


obr.19

Tam, kde se oskulační kružnice již výrazně odchyluje od paraboly, můžeme konstrukci doplnit několika body, sestrojenými na základě definice (bod paraboly musí mít od řídící přímky stejnou vzdálenost jako od ohniska). Zvolíme si tedy nějakou vzdálenost v a sestrojíme rovnoběžku q s řídící přímkou ve vzdálenosti v od řídící přímky. Aby bod M ležící na přímce q byl zároveň bodem paraboly, musí splňovat $|FM| = v$. To znamená, že je průsečíkem přímky q a kružnice $k(F; r = v)$. Takto získáme vždy dvojici bodů paraboly souměrných podle její osy.

1.4 Hyperbola

Poslední z kuželoseček hyperbolu dostaneme, jak již bylo psáno, protneme-li kuželovou plochu rovinou, která svírá s osou plochy úhel menší, než je úhel mezi osou a površkami kuželové plochy ($0 \leq \psi < \varphi$). Hyperbola stejně jako parabola není uzavřená křivka, ale na rozdíl od paraboly má hyperbola dvě vzájemně oddělené části – větve.



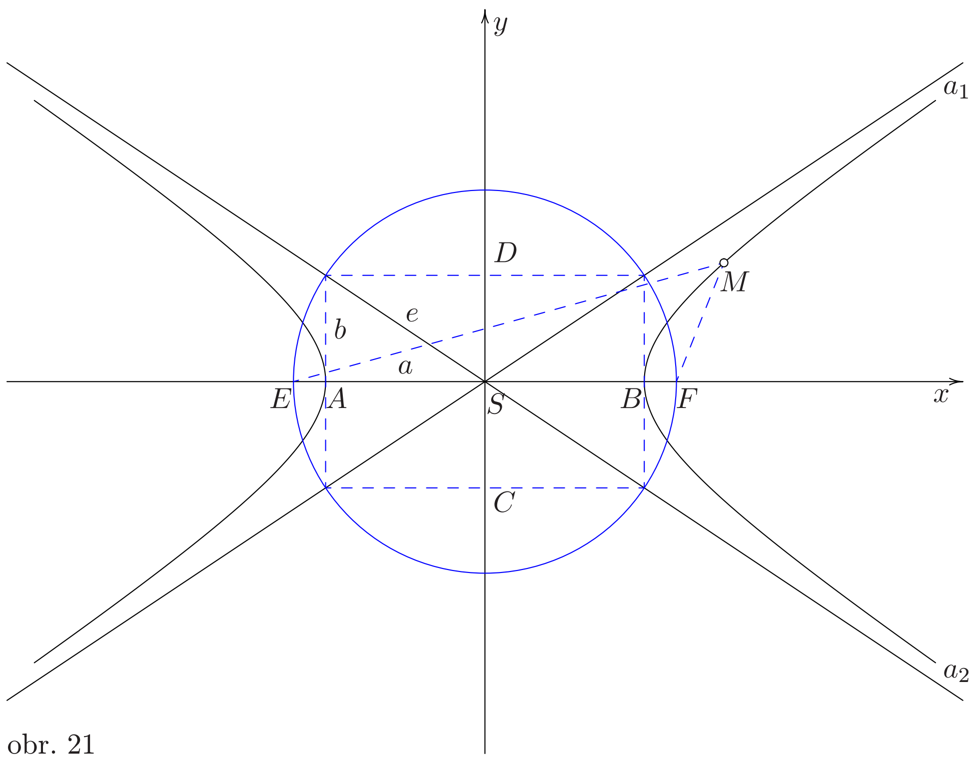
obr. 20

Geometrická definice: **Hyperbola** je množina bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů E, F (**ohnisek**) konstantní rozdíl vzdáleností (braný v absolutní hodnotě). Tj. obecný bod X hyperboly splňuje:

$$||EX| - |FX|| = k, \tag{1}$$

kde $0 < k < |EF|$. Stejně jako elipsa má hyperbola dvě osy symetrie; **hlavní osa** prochází ohnisky, **vedlejší osa** je osou úsečky EF, průsečík os je **střed hyperboly** S. Body hyperboly ležící na hlavní ose jsou **vrcholy hyperboly**, na obrázku 21 jsou to body A, B. Vzdálenost vrcholu hyperboly od jejího středu je **hlavní poloosa**, budeme ji značit a, vzdálenost ohniska od středu je **excentricita**, neboli **výstřednost** hyperboly, označíme ji e . Na vedlejší ose neleží žádný bod hyperboly, protože rozdíl vzdáleností libovolného bodu vedlejší osy od ohnisek je vždy nula. Nicméně se zavádí **vedlejší poloosa** b, pro kterou platí: $b^2 = e^2 - a^2$. Na obrázku 21 je to vzdálenost $|CS|$ nebo $|DS|$.

Novinkou v rodině kuželoseček jsou **asymptoty** hyperboly a_1, a_2. Jsou to přímky, které procházejí středem hyperboly a v případě, že osy hyperboly jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, mají směrnici $\pm b/a$. S hyperbolou nemají žádný společný bod. Přímky, které rovněž procházejí středem a mají směrnici z intervalu $(-b/a; b/a)$, protínají hyperbolu ve dvou bodech.



obr. 21

Konstanta k v rovnici (1) je rovna, stejně jako u elipsy, dvojnásobku délky hlavní poloosy, $k = 2a$. Je to vidět z obrázku: $k = ||EA| - |FA|| = ||FB| - |FA|| = |AB| = 2a$. To znamená, že body hyperboly vyhovují rovnici:

$$||EX| - |FX|| = 2a, \quad \text{kde } a < e. \tag{2}$$

a parametry a, b, e splňují:

$$e^2 = a^2 + b^2. \tag{3}$$

1.4.1 Rovnice hyperboly

Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby střed hyperboly ležel v počátku a osy v osách soustavy souřadnic. Pak ohniska mají souřadnice $E[-e; 0]$, $F[e; 0]$ a bod hyperboly $M[x; y]$ musí splňovat rovnici:

$$\left|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

kterou dále upravíme do zapamatovatelného tvaru. Nejprve obě strany rovnice umocníme na druhou a osamostatníme zbylou odmocninu:

$$-\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a^2 - x^2 - y^2 - e^2.$$

Znovu umocníme, abychom se odmocniny zbavili a posčítáme:

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2).$$

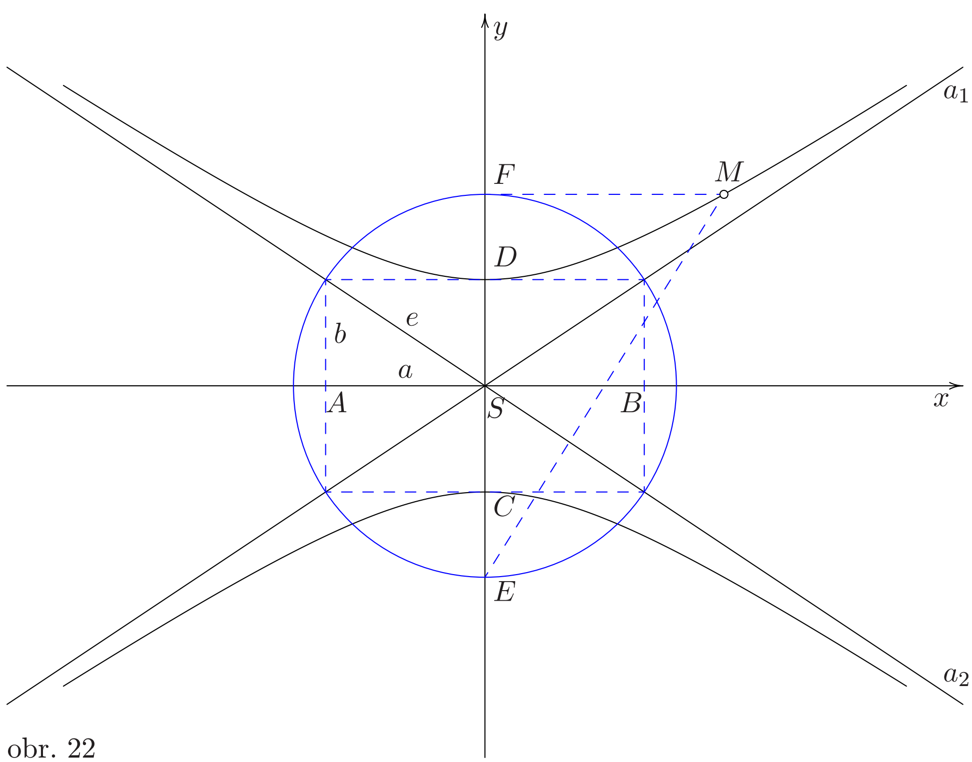
Za závorku dosadíme z rovnice (3) a vydělíme součinem a^2b^2. Získáme rovnici hyperboly se středem v počátku a poloosami $a,\ b$ ve tvaru:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Pokud by ohniska ležela na ose y, tj. $E[0; -e],\ F[0; e]$, dostali bychom pro hyperbolu obdobnou rovnici, jen by se na pravé straně změnilo znaménko:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{5}$$

a graf by mohl vypadat třeba jako na obr.22.



obr. 22

Vrcholy hyperboly jsou nyní body $C,\ D$, hlavní poloosa je $b = |SC|$ a vedlejší poloosa je $a = |AS|$. Vztah $e^2 = a^2 + b^2$ platí i tady a rovnice asymptot jsou pro hyperbolu (4) i (5) stejné.

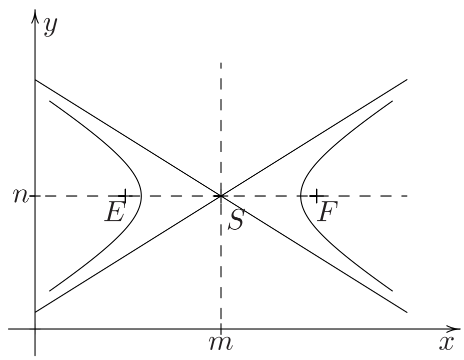
$a_1\colon\ y = \dfrac{b}{a}x, \quad a_2\colon\ y = -\dfrac{b}{a}x.$

Odsune-li se střed hyperboly do bodu $S[m; n]$, bude mít rovnice hyperboly (pro hlavní osu rovnoběžnou s osou x - obr. 23a) tvar:

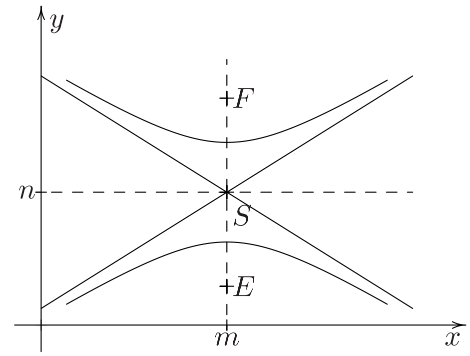
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

nebo (pro hlavní osu rovnoběžnou s osou y – obr. 23b):

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = -1. \tag{7}$$



obr. 23a)



obr. 23b

Rovnice asymptot jsou nyní: $y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m)$.

Konečně **obecná rovnice** hyperboly je:

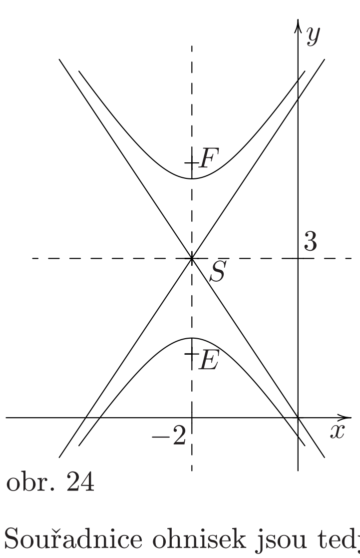
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \tag{8}$$

kde koeficienty A, B jsou oba nenulové a mají různá znaménka: $A \cdot B < 0$.

Příklad 1

Hyperbola je daná rovnicí: $9x^2 - 4y^2 + 36x + 24y + 9 = 0$. Určete souřadnice jejích ohnisek a rovnice asymptot a načrtněte obrázek.

Řešení



obr. 24

Nejprve zadanou rovnici převedeme na středový tvar (6) nebo (7). Příslušné dvojčleny doplníme na čtverec,

$$9(x+2)^2 - 4(y-3)^2 = -9, \qquad / \div 9$$

$$(x+2)^2 - \frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}} = -1$$

Z poslední rovnice vyčteme souřadnice středu: $S[-2; 3]$ a velikosti poloos $a = 1$, $b = 3/2$. Z toho získáme rovnice asymptot: $y = \pm 3(x+2)/2 + 3$. Excentricitu vypočteme ze vztahu (3):

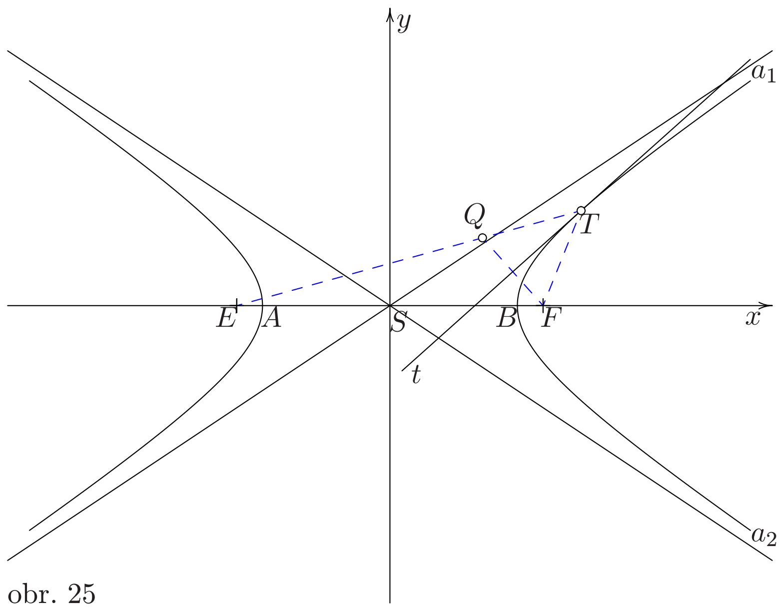
$$e = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Souřadnice ohnisek jsou tedy: $E[-2; 3 - \sqrt{13}/2]$, $F[-2; 3 + \sqrt{13}/2]$.

1.4.2 Tečna k hyperbole

I u hyperboly tečna půlí vnější úhel průvodičů (spojnic bodu dotyku s ohnisky) s tím, že vnějškem hyperboly se rozumí ta část roviny ohraničená hyperbolou, která obsahuje střed hyperboly. Rovnici tečny v bodě dotyku $T[x_0; y_0]$ dostaneme, obdobně jako u ostatních kuželoseček, z rovnice hyperboly záměnou jednoho x za x_0 a jednoho y za y_0. Pro hyperbolu popsanou rovnicí (6) resp. (7) je rovnice tečny:

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = \pm 1. \tag{9}$$



obr. 25

Bod Q na obr. 25 je souměrně sdružený s ohniskem F podle tečny, leží na přímce ET a jeho vzdálenost od ohniska E je $2a$. Podobné vlastnosti měl bod Q souměrně sdružený s ohniskem podle tečny u elipsy.

Příklad 2

Hyperbola je dána rovnicí:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = -1, \tag{1}$$

Nalezněte tečny hyperboly, které jsou rovnoběžné s přímkou: $3x - 4y - 14 = 0$.

Řešení

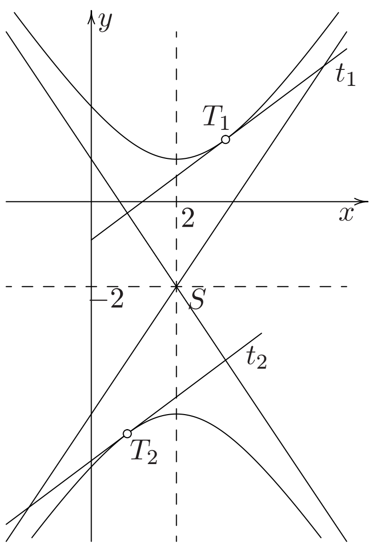
Výpočet si značně zjednodušíme, budeme-li úlohu řešit v soustavě souřadnic posunuté do bodu $S[2; -2]$, tj. provedeme substituci: $x' = x - 2,\ y' = y + 2$. Pak rovnice hyperboly přejde na tvar:

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = -1. \tag{2}$$

a rovnice přímky na:

$$3x' - 4y' = 0.$$

(Transformace přímky ovšem nebyla třeba, protože pro řešení úlohy potřebujeme pouze směrnici přímky $k = 3/4$ a ta se, jak vidno, posunutím soustavy souřadnic nemění.)



obr. 26

Nyní určíme souřadnice bodů dotyku. Tečna k hyperbole (2) v bodě dotyku $T[x'_0; y'_0]$ má rovnici:

$$\frac{x'x'_0}{4} - \frac{y'y'_0}{9} = -1, \tag{3}$$

Z toho

$$y' = \frac{9}{y'_0}\left(\frac{x'x'_0}{4} + 1\right),$$

takže směrnice tečny je $k = \dfrac{9x'_0}{4y'_0}$ a ta se musí rovnat směrnici zadané přímky $k = \dfrac{3}{4} = \dfrac{9x'_0}{4y'_0} \Rightarrow$

$$y'_0 = 3x'_0. \tag{4}$$

Získali jsme jednu rovnici pro neznámé x'_0, y'_0. Druhou rovnici dostaneme z podmínky, že bod dotyku leží na hyperbole, tzn. že jeho souřadnice musí splňovat rovnici (2)

$$\frac{{x'_0}^2}{4} - \frac{{y'_0}^2}{9} = -1. \tag{5}$$

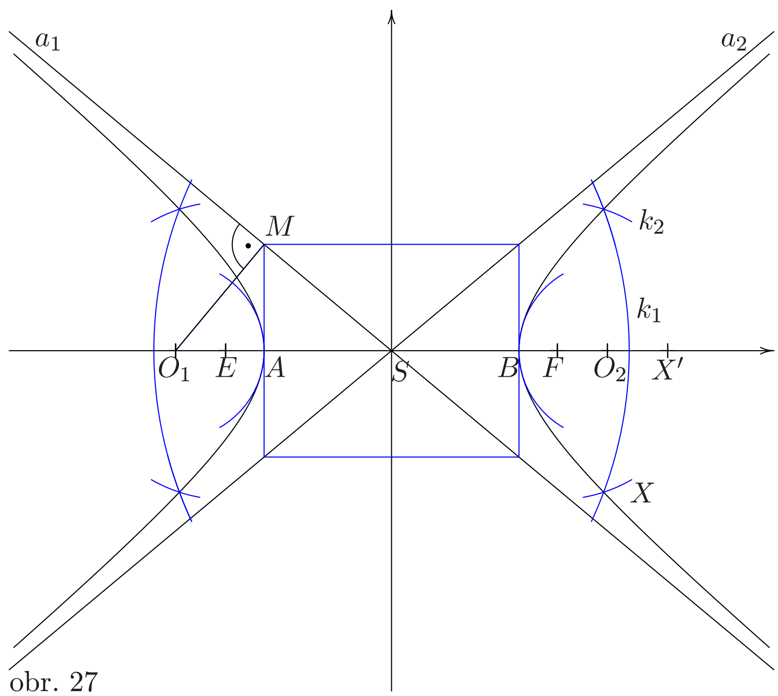
Z rovnice (4) dosadíme do (5) a určíme $x'_0 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ a $y'_0 = 3x'_0 = \pm\dfrac{6}{\sqrt{3}}$. Získali jsme souřadnice bodů dotyku v posunuté soustavě souřadnic. V původní soustavě jsou body dotyku $T_1\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 2; \dfrac{6}{\sqrt{3}} - 2\right]$, $T_2\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 2; -\dfrac{6}{\sqrt{3}} - 2\right]$ a tečny mají rovnice:

$$t_1:\quad y = 3x - 4y - 10\sqrt{3} - 14, \quad t_2:\quad y = 3x4y + 10\sqrt{3} - 14.$$

1.4.3 Konstrukce hyperboly

Nakreslíme hyperbolu, pro niž známe velikosti poloos a, b, kde a je hlavní poloosa a b vedlejší. Začneme tzv. charakteristickým obdélníkem se stranami $2a$, $2b$. Jeho úhlopříčky určují asymptoty hyperboly, středními příčkami procházejí osy hyperboly a střed obdélníka je středem hyperboly. Ve vrcholech hyperboly A, B sestrojíme oskulační kružnice. Jejich středy jsou průsečíky hlavní osy a kolmice k asymptotě vedené vrcholem charakteristického obdélníka. Na obr. 27 je O_1 průsečík hlavní osy a přímky, která je kolmá k asymptotě a_1 a prochází bodem M. Poloměr oskulační kružnice je $|O_1A|$.

Další body hyperboly získáme na základě definice. Na polopřímce AB zvolíme pomocný bod X' tak, aby $|AX'| > |AF|$. Nyní položíme $|EX| = |AX'|$, $|FX| = |BX'|$, potom rozdíl $||EX| - |FX|| = |AB| = 2a$ a tedy bod X je bodem hyperboly. Dostaneme jej jako průsečík kružnic $k_1(E\,;\ r_1 = |AX'|)$; $k_2(F\,;\ r_2 = |BX'|)$. Díky symetrii hyperboly takto získáme body dva, zaměníme-li ohniska coby středy kružnic k_1, k_2, dostaneme další dva body.



obr. 27

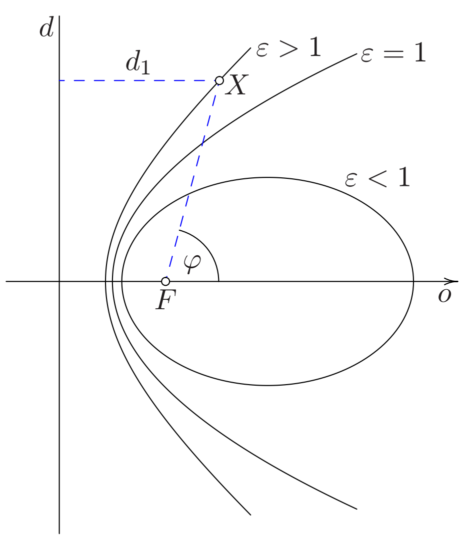
Malá poznámka nakonec

Všechny kuželosečky (s výjimkou kružnice, pokud nechceme pracovat s nekonečnem) lze schovat pod jednu ***definici*:**
kuželosečka je množina bodů v rovině, které mají konstantní poměr ε vzdáleností od pevného bodu F (ohniska) a od pevné přímky d (zvané řídící – direkční), která neprochází ohniskem.

Najdeme rovnici společnou pro všechny kuželosečky s tím, že tentokrát použijeme polární souřadnice r, φ. Polární osa bude kolmá k řídící přímce d a její počátek umístíme do ohniska F. Vzdálenost ohniska od řídící přímky označíme d_0, $X[r,\varphi]$ je libovolný bod. Jeho vzdálenost od ohniska je $|FX| = r$ a od řídící přímky je $d_1 = d_0 + r\cos\varphi$. Podle definice je: $\varepsilon = \dfrac{r}{d_0 + r\cos\varphi}$ a z toho

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad \text{kde } p = \varepsilon\, d_0,$$

což je hledaná rovnice pro všechny kuželosečky. Pro $\varepsilon > 1$ dostaneme hyperbolu, $\varepsilon = 1$ dá parabolu a $\varepsilon < 1$ elipsu ($\varepsilon = 0$ kružnici).



obr. 28

A TO JE PRO DNEŠEK VŠECHNO MILÉ DĚTI, DOBROU NOC.