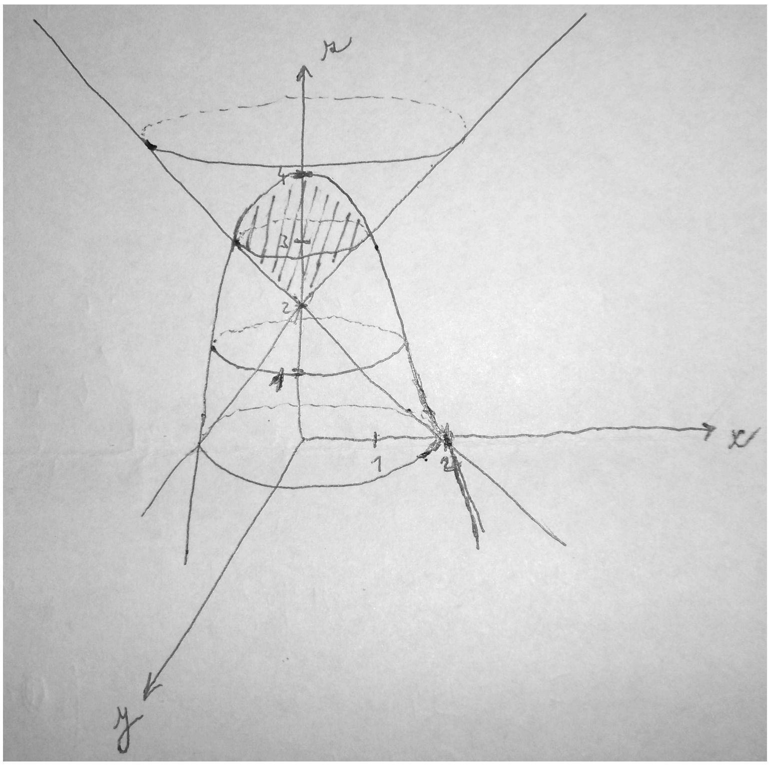
Spojité modely a statistika 2017
Řešení 2. příkladu ze zkoušky 10. 1. 2017

Příklad 2. *Načrtněte obrázek a spočítejte objem a těžiště oblasti ohraničené plochami ρ a σ.*

$$\rho\colon (z-2)^2 = x^2 + y^2$$
$$\sigma\colon 4 - z = x^2 + y^2$$

Řešení. Budeme-li zkoumat řezy rovinami $x = 0$ a $y = 0$ a vrstevnice obou ploch, zjistíme, že ρ zadává kužel a σ paraboloid.



Odečtením rovnice pro plochu σ od rovnice pro ρ

$$(z-2)^2 - (4-z) = 0$$
$$z^2 - 3z = 0 \Rightarrow z = 3 \text{ nebo } z = 0,$$

zjistíme, že průnikem[1] ploch je kružnice ve výšce $z = 3$ s poloměrem[2] $r = 1$.

[1]popravdě je průnik ještě v $z = 0$, ale ten uvažovat nebudeme
[2]ten zjistíme dosazením $z = 3$ do rovnice jedné z ploch

Vyšravovanou oblast označme $\mathcal{A}$. Pro výpočet objemu oblasti

$$V = \iiint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2+\sqrt{x^2+y^2}}^{4-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

použijeme transformaci válcových souřadnic $[r, \varphi, z]$ (místo souřadnic x,y se použijí polární souřadnice a souřadnice z se nechá).

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

Tato transformace má jakobián roven r. Meze válcových souřadnic pro r a φ lze snadno určit z obrázku; pro určení mezí z si uvědomíme, že $r^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{2+r}^{4-r^2} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot \big((4-r^2) - (2+r)\big)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 2r - r^2 - r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Protože $\mathcal{A}$ je symetrická podle rovin $x = 0$ i $y = 0$, bude x-ová a y-ová souřadnice těžiště nulová. Zbývá spočítat z-ovou souřadnici:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{A}} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{V} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r+2}^{4-r^2} z \cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{V} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_{r+2}^{4-r^2} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2V} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot \big((4-r^2)^2 - (r+2)^2\big)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2V} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^5 - 9r^3 - 4r^2 + 12r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{2V}\left(\frac{1}{6} - \frac{9}{4} - \frac{4}{3} + \frac{12}{2}\right) \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{31}{12} = \frac{31}{10}. \end{aligned}$$

Těžiště má tedy souřadnice $T = [0; 0; 3,1]$. $\triangle$