3. minipísemka — MB103 — podzim 2017 — 8. 11. — skupina A ŘEŠENÍ

Najděte všechna řešení následující diferenciální rovnice:

$$x^2 y' = y^2 + xy$$

Rovnici vydělíme x^2.

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

Vidíme, že pravá strana je funkcí $f(\frac{y}{x})$, tedy jedná se o homogenní diferenciální rovnici. Zvolíme substituci $u = \frac{y}{x}$, tedy $y = ux$. Potřebujeme vyjádřit y', derivujeme tedy $y = ux$ jako součin (x je proměnná, u a y jsou funkce v proměnné x). Získáme $y' = u'x + u$. Dosadíme.

$$u'x + u = u^2 + u$$

Postupnými úpravami získáme rovnici se separovatelnými proměnnými. Pamatujeme na to, že $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

$$u'x = u^2$$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2$$

$$\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Pozor! Dělili jsme u^2, předpokládáme tedy, že $u \neq 0$. Na případ $u = 0$ se později podíváme zvlášť.

$$\int \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{-1}{u} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$u = \frac{-1}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět za $u = \frac{y}{x}$ a vyjádříme y.

$$\frac{y}{x} = \frac{-1}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{-x}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Vrátíme se zpět k případu $u = 0$, to odpovídá $\frac{y}{x} = 0$, tedy $y = 0$ a $y' = 0$. Podívejme se, zda řeší zadanou rovnici: $x^2 \cdot 0 = 0 + x \cdot 0$, tedy $0 = 0$, a $y = 0$ je řešením zadané rovnice. Žádnou volbou c toho řešení z $y = \frac{-x}{\ln|x|+c}$ nedostaneme, obecné řešení je tedy:

$$y = \frac{-x}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$y = 0$$

3. minipísemka — MB103 — podzim 2017 — 8. 11. — skupina B
ŘEŠENÍ

Najděte všechna řešení následující diferenciální rovnice:

$$xy - y^2 = x^2 y'$$

Rovnici vydělíme x^2.

$$\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = y'$$

Můžeme si i přehodit strany.

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Vidíme, že pravá strana je funkcí $f(\frac{y}{x})$, tedy jedná se o homogenní diferenciální rovnici. Zvolíme substituci $u = \frac{y}{x}$, tedy $y = ux$. Potřebujeme vyjádřit y', derivujeme tedy $y = ux$ jako součin (x je proměnná, u a y jsou funkce v proměnné x). Získáme $y' = u'x + u$. Dosadíme.

$$u'x + u = u - u^2$$

Postupnými úpravami získáme rovnici se separovatelnými proměnnými. Pamatujeme na to, že $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

$$u'x = -u^2$$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -u^2$$

$$\frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Pozor! Dělili jsme $-u^2$, předpokládáme tedy, že $u \neq 0$. Na případ $u = 0$ se později podíváme zvlášť.

$$\int \frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$u = \frac{1}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět za $u = \frac{y}{x}$ a vyjádříme y.

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Vrátíme se zpět k případu $u = 0$, to odpovídá $\frac{y}{x} = 0$, tedy $y = 0$ a $y' = 0$. Podívejme se, zda řeší zadanou rovnici: $x \cdot 0 - 0 = x^2 \cdot 0$, tedy $0 = 0$, a $y = 0$ je řešením zadané rovnice. Žádnou volbou c toho řešení z $y = \frac{x}{\ln|x|+c}$ nedostaneme, obecné řešení je tedy:

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$