Diferenciální rovnice – příklady na procvičení

Typ I – rovnice se separovanými proměnnými

1. $2y - x^3 y' = 0$ $\qquad\left[y = ce^{-\frac{1}{x^2}} \right]$
2. $(x+1)\,dy + xy\,dx = 0$ $\qquad\left[y = c(x+1)e^{-x} \right]$ (Nápověda: $\frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1}$)
3. $(x+1)^{-1}dx - (y-1)^{-1}dy = 0$ $\qquad\left[y = c(x+1) + 1 \right]$
4. $1 + y^2 + xyy' = 0$ $\qquad\left[c = x^2(y^2+1) \right]$

(Nápověda: $\frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{1+y^2}$. Využijte, že $\int \frac{f'}{f} = \ln f$)

Typ II – homogenní rovnice

→ převedete na tvar $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ a zavedete substituci: $u = \frac{y}{x}$

$y' = u'x + u$

Platí $u' = \frac{du}{dx}$

→ dále se řeší jako Typ I v proměnných u a x.

5. $2xy' = 3y + x$ $\qquad\left[cx^3 = (x+y)^2 \right]$
6. $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$ $\qquad\left[y = ce^{\frac{y}{x}} \right]$
7. $(y^2 - xy) + x^2y' = 0$ $\qquad\left[x = ce^{\frac{x}{y}},\ y = 0 \right]$
8. $xy' = (2x + y)$ $\qquad\left[y = 2x \ln|cx| \right]$

Typ III – lineární rovnice

9. $y' = 6x - 2y$

→ zkuste si sami vyřešit metodou integračního faktoru jako na cvičeních (Př. 4)

Vyřešíme metodou variace konstanty:

$$y' = 6x - 2y$$

I. řešíme jen rovnici

$$y' = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{y} = -2\,dx$$

$$\ln y = -2x + c$$

$$y = e^{-2x} \cdot c$$

II. nyní předpokládáme, že konstanta je funkce x, tj. očekáváme řešení ve tvaru:

$$(*) \quad y = e^{-2x} \cdot c(x)$$

podle zadání

$$y' = e^{-2x} \cdot (-2) \cdot c(x) + e^{-2x} \cdot c'(x) = 6x - 2y$$

dosadíme za y

$$-2 \cdot e^{-2x} c(x) + e^{-2x} c'(x) = 6x - 2\left(e^{-2x} c(x)\right)$$

$$-2e^{-2x} c(x) + e^{-2x} c'(x) = 6x - 2e^{-2x} c(x)$$

$$e^{-2x} c'(x) = 6x$$

$$c'(x) = 6x \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c(x) = \int 6x e^{2x}\,dx$$ .... vyřešíme metodou per-partes ...

$$c(x) = e^{2x}\left(3x - \frac{3}{2}\right) + D \quad ; D \in \mathbb{R}$$

III. dosadíme tuto funkci zpět do $(*)$:

$$y = e^{-2x}\left(e^{2x}\left(3x - \frac{3}{2}\right) + D\right) = \underline{3x - \frac{3}{2} + De^{-2x}} \quad ; D \in \mathbb{R}$$

metodou integračního faktoru musíte dojít ke stejnému řešení

Typ IV - Bernoulliova rovnice

10. $xy' + y = xy^2 \ln x$

(substitucí $u = \frac{1}{y} \left(= \frac{y}{y^2} \right)$ převedeme na lineární rovnici, kterou dále řešíme buď metodou integračního faktoru, anebo metodou variace konstanty.

lineární rovnice vyjde :

$$u' = \frac{u}{x} - \ln x$$

integrační faktor je $e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

⋮

řešíme stejným způsobem jako na cvičeních

(nápověda $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2}$)

⋮

Ř: $y = \left(cx - \frac{x \ln^2 x}{2} \right)^{-1}$, $y = 0$