Integrály můžeme využít například při výpočtu následujících věcí:

(1) obsah plochy A je

$$\iint_A dx\,dy$$

(2) hmotná destička mající plochu A a hustotu v bodě $[x, y]$ danou funkcí $\rho(x,y)$ má hmotnost

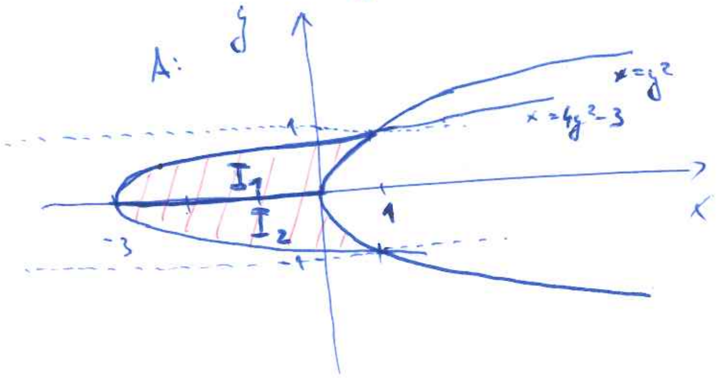
$$m = \iint_A \rho(x,y)\,dx\,dy$$

(3) souřadnice těžiště hmotné destičky z (2):

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_A x\rho(x,y)\,dx\,dy \qquad y_0 = \frac{1}{m}\iint_A y\rho(x,y)\,dx\,dy$$

<u>Př 7</u>: Určete obsah množiny A ohraničené křivkami $x = y^2$ a $x = 4y^2 - 3$

$$I = \iint_A dx\,dy = ?$$

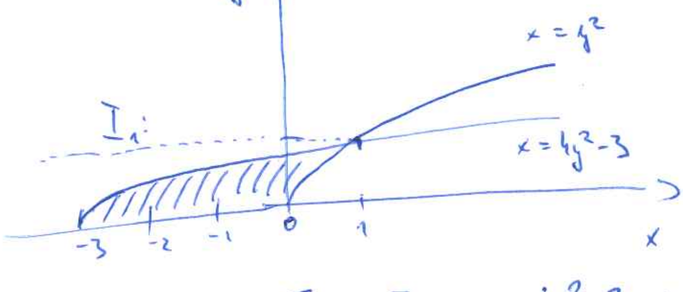


$I_1 = I_2$

Protože integrujeme fci $\equiv 1$ můžeme množinu A rozdělit na dvě poloviny podle osy x. Platí

$$I = I_1 + I_2 = 2I_1$$

při integraci $\longrightarrow$ volíme tento pohled



$$y \in [0; 1] \qquad 4y^2 - 3 \le x \le y^2$$

a můžeme psát:

$$I = 2\cdot I_1 = 2\cdot\int_0^1\left(\int_{4y^2-3}^{y^2} dx\right)dy = 2\int_0^1 y^2-4y^2+3\,dy =$$

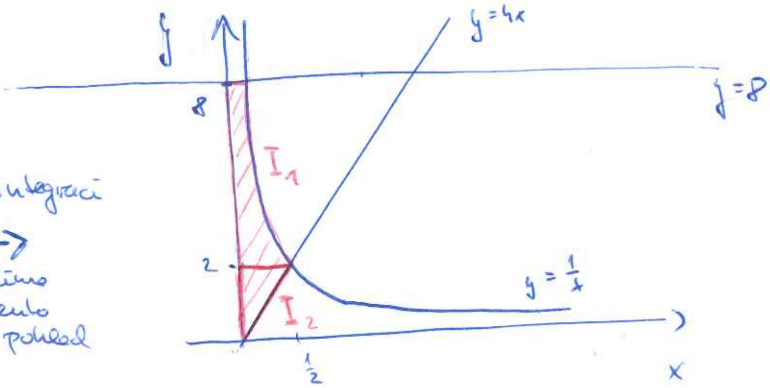
$$= (-6)\cdot\int_0^1 y^2-1\,dy = (-6)\left(\frac{y^3}{3}-y\right)_0^1 = (-6)\left(\frac{1}{3}-1\right) =$$

$$= (-6)\left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{4}}$$

Př 8: Urči obsah rovinného obrazce omezeného křivkami o rovnicích

$$x=0\ ,\ y=\frac{1}{x}\ ,\ y=8\ ,\ y=4x$$

při integraci $\longrightarrow$ volíme tento pohled



$$I = I_1 + I_2$$

vypočítáme průsečík:

$$\underbrace{y=4x \qquad y=\frac{1}{x}}$$

$$4x = \frac{1}{x}$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$x = \pm\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ zápornou x neuvažujeme

$y = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ ... průsečík je v bodě $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

Pro snadnější počítání rozdělíme množinu přes kterou integrujeme (viz. obrázek) a celkovou plochu (rozumějte obsah) spočítáme jako součet obsahů dílčích ploch.

$$I_1: \quad y \in [2;8] \qquad \underbrace{0 \le x \le \frac{1}{y}}_{\text{funkce ohraničující } x}$$

$$I_1 = \int_2^8 \left(\int_0^{\frac{1}{y}} dx \right) dy = \int_2^8 [x]_0^{\frac{1}{y}} \, dy = \int_2^8 \frac{1}{y} \, dy = [\ln y]_2^8 =$$

$$= \ln 8 - \ln 2 = 3 \ln 2 - \ln 2 = 2 \ln 2$$

$$I_2: \quad y \in [0;2] \qquad 0 \le x \le \frac{y}{4}$$

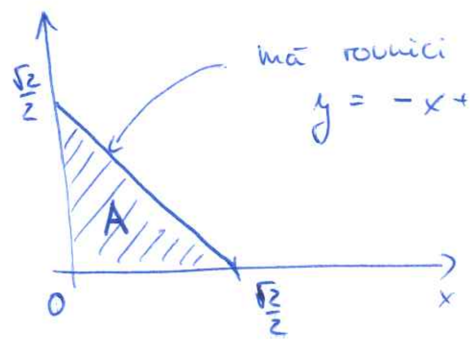
$$I_2 = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{y}{4}} dx \right) dy = \int_0^2 \frac{y}{4} \, dy = \frac{1}{4} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{4}(2-0) =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$I = I_1 + I_2 = \underline{\underline{2 \ln 2 + \frac{1}{2}}}$$

<u>Př 9</u>: Máme destičku ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 1, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen a v protějším vrcholu je rovna 2. Najděte těžiště destičky.

Uvažujme následující destičku:



Víme, že hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen, proto:

$$\rho(x,y) = k \cdot y$$

A taky víme, že v protější vrcholu je rovna 2:

$$\rho\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad k\sqrt{2} = 4$$

$$k = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

tj.: $\rho(x,y) = 2\sqrt{2} \cdot y$

Nejprve spočítáme hmotnost:

$$m = \iint_A \rho(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_0^{-x+\frac{\sqrt{2}}{2}} 2\sqrt{2}\, y\, dy \right) dx =$$

$$x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$0 \le y \le -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\left[y^2\right]_0^{-x+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2} - \sqrt{2}\,x + x^2 \, dx =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{1}{3} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12} \right) =$$

$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Nyní můžeme dosadit do vzorečků pro souřadnice těžiště:

$$x_0 = 6\cdot\iint_A yx\,2\sqrt{2}\,dx\,dy = 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\int_0^{-x+\frac{\sqrt{2}}{2}} 2\sqrt{2}\,xy\,dy\right)dx =$$

$$= 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\left[y^2\right]_0^{-x+\frac{\sqrt{2}}{2}}dx = 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)^2 dx =$$

$$= 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x^3-\sqrt{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx = 6\sqrt{2}\left(\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) =$$

$$= 6\sqrt{2}\left(\frac{\cancel{4}}{16}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}-\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{2}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= 6\sqrt{2}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 3\sqrt{2}\,\frac{3-8+6}{24} = \cancel{3}\sqrt{2}\,\frac{1}{\cancel{24}_8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$y_0 = 6\iint_A y^2\,2\sqrt{2}\,dx\,dy = 2\cdot 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\int_0^{-x+\frac{\sqrt{2}}{2}} y^2\,dy\right)dx = 12\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{-x+\frac{\sqrt{2}}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{8}-3\cdot\frac{2}{4}x+3\,\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-x^3\right)dx =$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\frac{2\sqrt{2}}{8}x-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

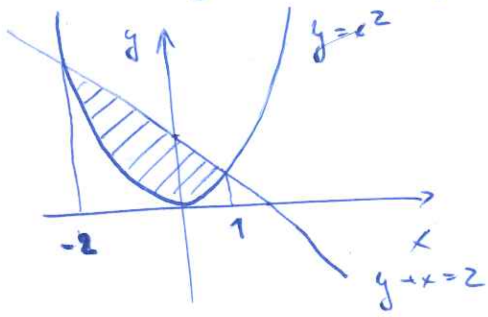
$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{4}\,\frac{4}{16}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\,\frac{4-6+4-1}{16} = 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$ (chyba ve výsledcích v eSu)

Souřadnice těžiště jsou $\left[\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

<u>Poznámka</u>: Pokud zvolíme $\rho(x,y) = 2\sqrt{2}\,x$, pak $T = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right]$
(zkuste sami za DÚ :-))

Př 10: Určete souřadnice těžiště homogenní destičky ohraničené grafy křivek $y = x^2$ a $y + x = 2$



↑ volíme tento pohled

Vypočteme průsečík

$$2 - x = x^2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$
$$x_1 = -2 \qquad y_1 = 4$$
$$x_2 = 1 \qquad y_2 = 1$$

Spočteme hmotnost:

$$x \in [-2; 1] \qquad x^2 \le y \le 2 - x$$

$$m = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2}^{2-x} dy \right) dx = \int_{-2}^{1} 2 - x - x^2 \, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} =$$

$$= \underline{\frac{9}{2}}$$

$$x_0 = \frac{2}{9} \int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2}^{2-x} x \, dy \right) dx = \frac{2}{9} \int_{-2}^{1} x \left(2 - x - x^2 \right) dx = \frac{2}{9} \int_{-2}^{1} \left(2x - x^2 - x^3 \right) dx =$$

$$= \frac{2}{9} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{1} = \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \left(4 + \frac{8}{3} - \frac{16}{4} \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cancel{4} - \frac{8}{3} + \cancel{4} \right) = \frac{2}{9} \left(-2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{9} \left(-\frac{9}{4} \right) = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$y_0 = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} y\,dy\right)dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2-x}dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left((2-x)^2-x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1}\left(4-4x+x^2-x^4\right)dx = \frac{1}{9}\left[4x-4\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(4-2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\left(-8-8-\frac{8}{3}+\frac{32}{5}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+8+8+\frac{8}{3}-\frac{32}{5}\right) = \frac{1}{9}\left(21-\frac{33}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\,\frac{105-33}{5} = \frac{1}{9}\cdot\frac{72}{5} = \underline{\underline{\frac{8}{5}}}$$

$$\underline{\underline{T = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{8}{5}\right]}}$$