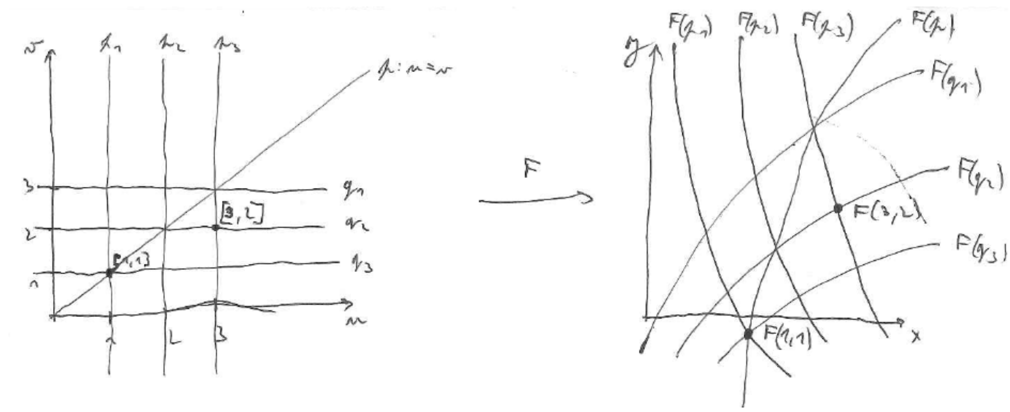
Spojité modely a statistika 2017

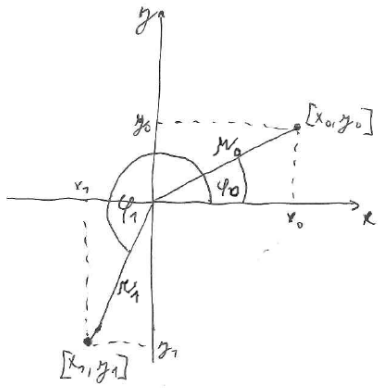
Doplnění ke 2. cvičení

Transformace souřadnic. Zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lze vnímat jako transformaci z jedné soustavy souřadnic do druhé. Předpokládejme transformaci souřadnic u, v na souřadnice x, y, dané nějakým zobrazením $F(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. To můžeme ilustrovat zobrazením souřadnicové mřížky:



Stejně tak můžeme libovolnou křivku (množinu bodů) zobrazit do druhých souřadnic, nebo naopak křivku v souřadnicích x, y vyjádřit v souřadnicích u, v.

Polární souřadnice. Každý bod v rovině $\mathbb{R}^2$, kromě bodu $[0,0]$, můžeme jednoznačně vyjádřit pomocí vzdálenosti $r \geq 0$ od počátku a úhlu $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ s osou x (viz obrázek). Tedy každému bodu $[x,y]$ můžeme jednoznačně přiřadit[1] dvojici čísel $[r,\varphi]$, čímž získáváme polární souřadnice.

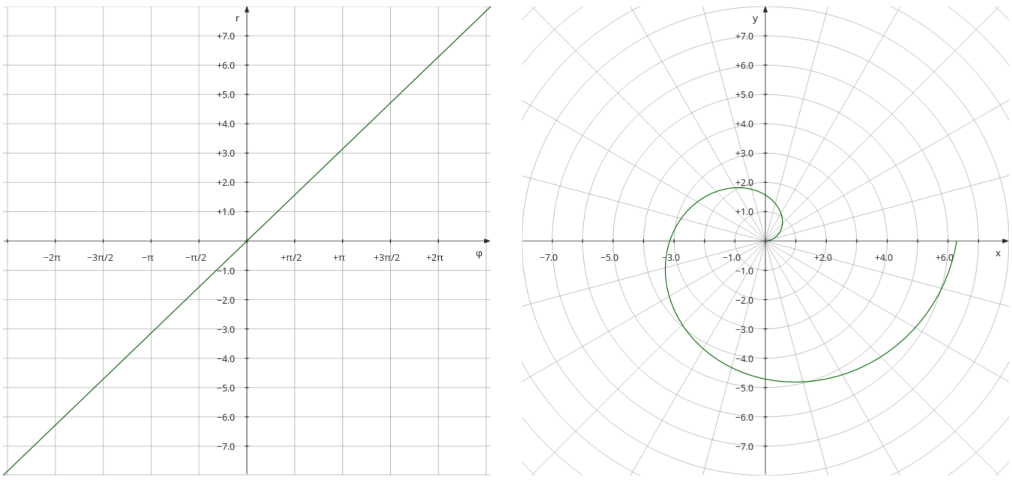


[1]tím přiřazením myslím tu transformaci

V bodě $[0, 0]$ je ten problém, že mu můžeme přiřadit libovolnou dvojici $[0, \varphi]$. Sice také každému bodu $[x_0, y_0]$ můžeme přiřadit kromě bodu $[r_0, \varphi_0]$ i libovolný bod $[r_0, \varphi_0+2k\pi]$, kde $k \in \mathbb{Z}$, ale to nám nevadí, neboť v dostatečně malém okolí každého bodu $[r_0, \varphi_0 + 2k\pi]$ je přiřazení jednoznačné.

Některé křivky mají v polárních souřadnicích jednodušší zápis než ve obyčejných kartézských souřadnicích. Např. následující spirála je zadaná rovnicemi v polárních (zadané explicitně) a obyčejných souřadnicích (zadané parametricky) takto:

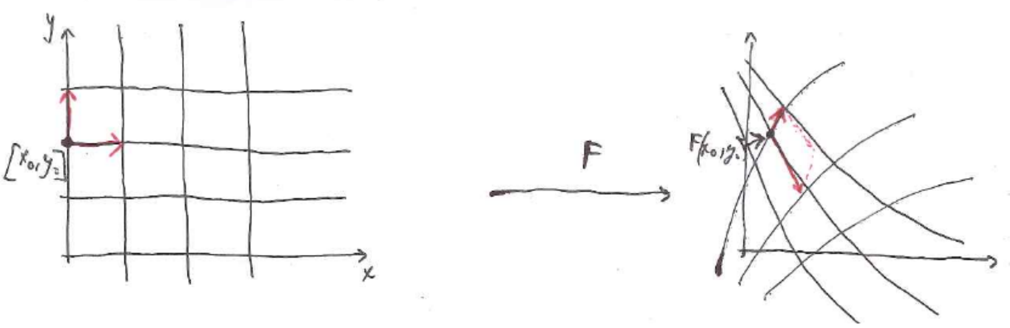
$$r(\varphi) = \varphi \qquad \begin{aligned} x(t) &= t \cdot \cos(t) \\ y(t) &= t \cdot \sin(t) \end{aligned}$$



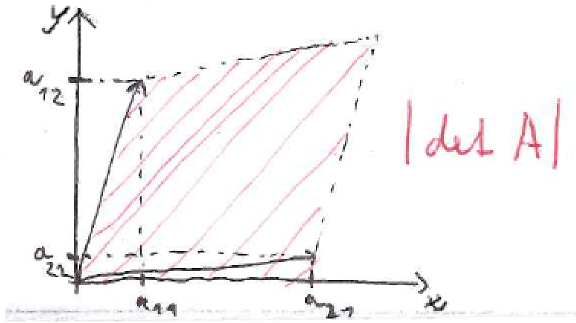
Jacobiho matice zobrazení $F(x, y) = F\big(f(x, y), g(x, y)\big)$ je definován následovně:

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ g'_x(x, y) & g'_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Geometricky lze $F'(x_0, y_0)$ interpretovat tak, že řádkové vektory zadávají směrnice tečen ke zobrazené souřadnicové mřížce v bodě $F(x_0, y_0)$.

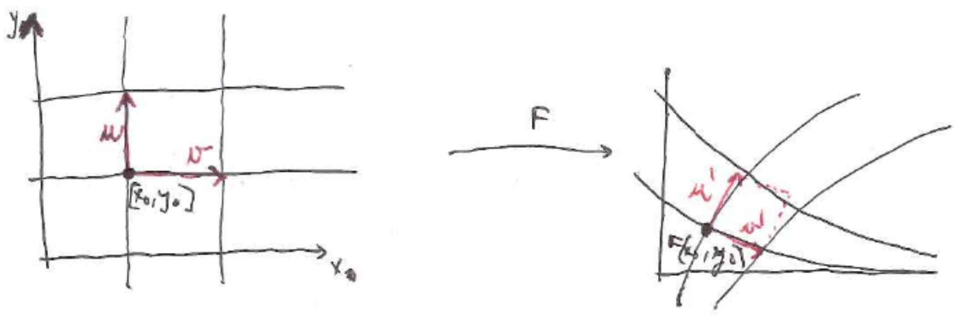


Jacobián je determinant Jacobiho matice. Absolutní hodnotu determinantu matice $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ lze interpretovat jako obsah rovnoběžníku o stranách zadaných řádkovými vektory matice A.



Tedy jacobián nám aproximuje, na „čtverečky" jakého obsahu se nám transformuje souřadnicová mřížka (přitom čím menší čtverečky mřížky transformujeme, tím přesněji vyjde obsah „transformovaného čtverečku"). Viz následující obrázek, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou vektory. Když tedy vezmeme $\mathbf{u} = (0, 1)$ a $\mathbf{v} = (1, 0)$ dostaneme

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} \cdot F'(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$
$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot F'(x_0, y_0) = (g'_x(x_0, y_0), g'_y(x_0, y_0))$$



Zřejmě to, co nechceme, je, aby vektory $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$ byly na sebe rovnoběžné (splývaly) nebo byl jeden z nich nulový. V takovém „čtverečku" pak nejsme schopni jednoznačně lokalizovat body, neboli F není prosté.

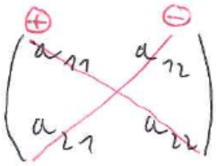
Připomenutí determinantu a inverze maticemi

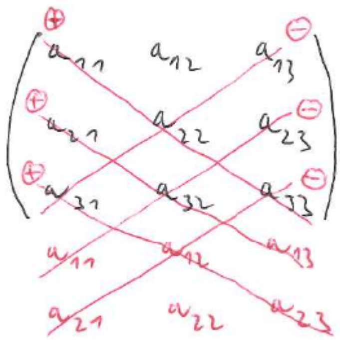
Determinant matice se počítá pro matici 1×1:

$$\det(a_{11}) = a_{11},$$

matici 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$





matici 3×3, dle Sarrusova pravidla (viz obrázek výše):

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - \dots.$$

Pro výpočet determinantu matice 4×4 a větší již musíme matici upravit elementárními řádkovými operacemi, popř. použít Laplaceův rozvoj, atd.

Inverzní matici matice 3×3, můžeme spočítat následovně

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T,$$

kde

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{matice } A \text{ bez } i\text{-tého řádku a } j\text{-tého sloupce});$$

pozor, všimněte si, že matici je nutné ještě transponovat.

Pro matici 2×2 je to stejné, ale o hodně jednodušší:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Pro determinanty matic navíc platí

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B), \qquad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$