Spojité modely a statistika 2017
Řešené příklady k 11. cvičení

Příklad. *Mějme zadánu spojitou náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti $f_X(x)$ a distribuční funkcí $F_X(x)$. Určete hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ a distribuční funkci $F_Y(y)$ transformované náhodné veličiny $Y = \frac{1}{X}$, kde $X > 0$.*

Řešení. Uvědomme si, že tentokrát je transformace klesající funkce. Nejprve určíme distribuční funkci:

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(\tfrac{1}{X} \leq y) = \mathrm{P}(\tfrac{1}{y} \leq X) = 1 - \mathrm{P}(X \leq \tfrac{1}{y}) = 1 - F_X(\tfrac{1}{y}).$$

Nyní derivací obou stran rovnice získáme hustotu pravděpodobnosti:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = (1 - F_X(\tfrac{1}{y}))' = -f_X(\tfrac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2} = f_X(\tfrac{1}{y}) \cdot \left|\frac{-1}{y^2}\right|.$$

△

Poznámka. Obecně pro transformaci $Y = g(X)$, kde g je rostoucí nebo klesající, platí[1]:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|(g^{-1}(y))'\right|.$$

Příklad. *Mějme zadánu spojitou náhodnou veličinu X s pravděpodobností rovnoměrného rozdělí na intervalu $\langle -1, 2\rangle$. Určete hustotu náhodné veličiny Y získané trasformací $Y = |X|$. Dále určete střední hodnoty EX a EY a kovarianci $C(X, Y)$.*

Poznámka. Můžeme si například představit, že generujeme náhodná čísla od -1 do 2. Náhodná veličina X udává, které číslo se vygenerovalo. Náhodná veličina Y udává absolutní hodnotu čísla, které se vygenerovalo, tedy jevům „vygenerovalo se x_0“ a „vygenerovalo se $-x_0$“ přiřadí stejnou číselnou hodnotu[2]. Protože se generují čísla od -1 do 2, pravděpodobnost, že absolutní hodnota vygenerovaného čísla bude v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, bude vyšší než pravděpodobnost, že bude v intervalu $\langle 1, 2\rangle$.

[1] g^{-1} značí inverzí funkci

[2] Připomeňme, že náhodná veličina je zobrazení $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Nápověda. Můžete využít toho, že pro střední hodnotu trasformované spojité (obdobně pro diskrétní) náhodné veličiny $Y = g(X)$ platí:

$$EY = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

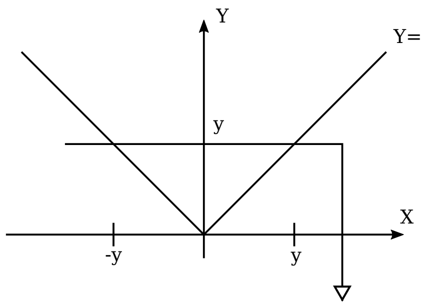
Řešení. Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle -1, 2\rangle$ je zadána následovně:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3} & \text{pro } x \in \langle -1, 2\rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nejdříve musíme určit distribuční funkci transformované náhodné veličiny Y a teprve potom můžeme spočítat její hustotu pravděpodobnosti[3]. Počítejme tedy

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(|X| \leq y) = \mathrm{P}(-y \leq X \leq y) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pro } y \leq 0 \\ \int_{-y}^{y} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2y}{3} & \text{pro } y \in \langle 0, 1\rangle \\ \int_{-1}^{y} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{3} + \frac{1}{3} & \text{pro } y \in \langle 1, 2\rangle \\ 1 & \text{pro } y \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

To můžeme ilustrovat následujícím obrázkem - pro výpočet $F_Y(y)$ integrujeme hustotu $f_X(x)$ přes množinu hodnot x takových, které se zobrazí na hodnotu menší než y, tj. $\{x \mid |x| \leq y\} = \{x \mid -y \leq x \leq y\}$.



Hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ nyní získáme jednoduše derivací $F_Y(y)$.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{pro } y \in \langle 0, 1\rangle \\ \frac{1}{3} & \text{pro } y \in (1, 2\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

[3]Nemůžeme použít vzoreček nahoře, protože transformace není prostá a na $\langle -1, 0\rangle$ je klesající, na $\langle 0, 2\rangle$ je rostoucí.

Nyní spočítejme střední hodnoty EX a EY. Pro výpočet EY nepotřebujeme znát hustotu $f_Y(y)$, protože můžeme využít nápovědy. Při integrování $|x|$ rozdělíme integrál na dva integrály, neboť $|x| = -x$ pro $x \leq 0$ a $|x| = x$ pro $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-1}^{2} x \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{6}\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \\ EY &= E|X| = \int_{-1}^{2} |x| \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x) \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-x^2}{6}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{6}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Pro výpočet kovariance ještě potřebujeme spočítat $E(X \cdot Y)$. K tomu opět využijeme nápovědy.

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) = E(X \cdot |X|) &= \int_{-1}^{2} x \cdot |x| \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{-x^2}{3}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-x^3}{9}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{9}\right]_{0}^{2} = \frac{-1}{9} + \frac{8}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Nyní již můžeme spočítat kovarianci

$$C(X,Y) = E(X \cdot Y) - (EX) \cdot (EY) = \frac{7}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{28 - 15}{36} = \frac{13}{36}.$$

△