Spojité modely a statistika 2017

Řešené příklady k 12. cvičení

Čísla v závorce u příkladů udávají čísla příkladů v učebnici Matematika drsně a svižně.

Příklad (9.77). *Ze základního souboru, z rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 0,06$, jsme pořídili náhodný výběr s realizacemi $1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7$. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu.*

Řešení. Protože známe σ^2 a chceme určit interval, ve kterém na 95% leží střední hodnota μ, použijeme vzoreček pro interval

$$\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right)$$

Pro výběrový průměr máme vzorec $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $n = 7$ je velikost náhodného výběru (počet zadaných hodnot) a X_i jsou ty hodnoty. Tedy $M = \frac{1}{7}(1,3 + 1,8 + 1,4 + 1,2 + 0,9 + 1,5 + 1,7) = 1,4$.

Chceme 95% interval spolehlivosti, tedy $1-\alpha = 0,95$, tedy $\alpha = 0,05$. Potřebujeme tedy najít kvantil (normovaného normálního rozdělení) $u_{1-\frac{0,05}{2}} = u_{0,975}$, tento kvantil nalezneme v tabulce. Buď se podíváme do tabulky distribuční funkce normálního rozdělení Φ a najdeme pravděpodobnost nejbližší $0,975$ a zpětně vyčteme v pro jakou hodnotu to je, nebo se podíváme do tabulky kvantilů a najdeme hodnotu pro $u_{0,975}$, přičemž platí $u_{1-p} = -u_p$. Z tabulky vyčteme hodnotu $1,960$, tedy můžeme dosadit do vzorce pro interval:

$$\left(1,4 - \frac{\sqrt{0,06}}{\sqrt{7}} \cdot 1,96, 1,4 + \frac{\sqrt{0,06}}{\sqrt{7}} \cdot 1,96\right) = (1,22,\ 1,58). \qquad \triangle$$

Příklad (9.74). *Při 600 hodech kostkou padla jednička pouze 45 krát. Rozhodněte, jestli je možné tvrdit, že jde o ideální kostku na hladině $\alpha = 0,01$. Vše zdůvodněte a svůj závěr explicitně formulujte.*

Řešení. Náhodná veličina Y udávající počet padlých jedniček na ideální kostce má rozdělení pravděpodobnosti $Y \sim \mathrm{Bi}(600, \frac{1}{6})$. Z Moivre-Laplaceovy věty víme, že Y můžeme aproximovat jako $Y \sim N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1-p)) = N(100, \frac{250}{3})$ (neboli transformovaná veličina $Z = \frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$).

My sice nevíme, jestli je kostka ideální, ale předpokládejme, že náhodná veličina X udávající počet padlých jedniček na zkoumané kostce má rozptyl taky $\sigma^2 = \frac{250}{3}$ a má rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu, \frac{250}{3})$.

Tvrzení, že jde o ideální kostku na hladině $\alpha = 0,01$, odpovídá tvrzení, že střední hodnota náhodné veličiny Y (pro ideální kostku), tj. 100, spadá do oboustranného $(1-\alpha)\cdot 100\% = 99\%$ intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ (náh. veličiny X).

Spočítejme tedy 99% interval spolehlivosti pro μ. Protože máme jen jedno měření a to $X_1 = 45$, máme výběrový průměr roven $M = 45$. Interval spolehlivosti je tedy (podle stejného vzorce, jak u předchozího příkladu):

$$\left(45 - \frac{\sqrt{\frac{250}{3}}}{\sqrt{1}} u_{0,995}, 45 + \frac{\sqrt{\frac{250}{3}}}{\sqrt{1}} u_{0,995}\right) \doteq (21, 69).$$

Protože střední hodnota 100 (pro ideální kostku) nenáleží do vypočítaného intervalu spolehlivosti, můžeme na hladině $0,01$ říci, že se nejedná o ideální kostku. $\triangle$