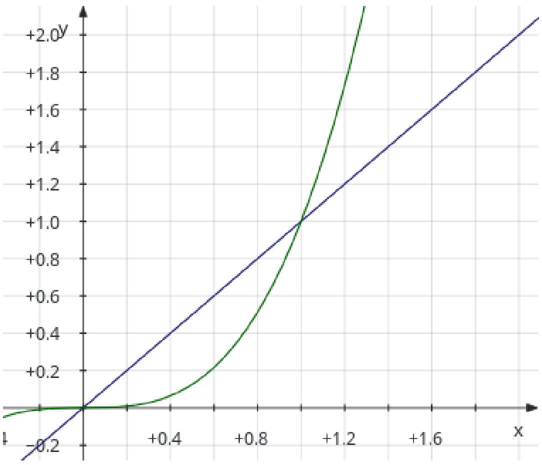
Spojité modely a statistika 2017

Řešené příklady k 5. cvičení

Příklad 11. *Spočítejte* $\iint_A x^3 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, kde* A *je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí* $y = x$ *a* $y = x^3$*.*

Řešení. Nejprve si nakreslíme obrázek, abychom si uvědomili, který graf funkce je dole a který nahoře (případně vlevo vpravo pro integrování nejprve podle x).



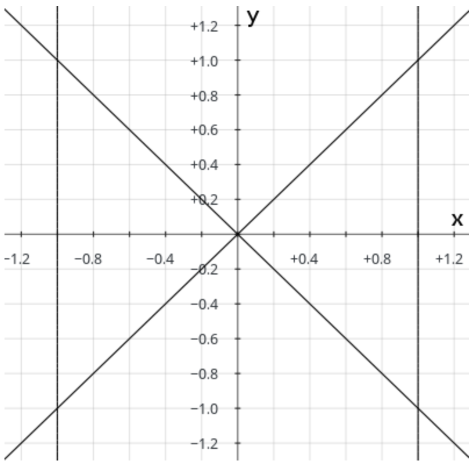
Vidíme tedy, že množinu můžeme zadat pro $0 \leq x \leq 1$ funkcemi $x^3 \leq y \leq x$, případně pro $0 \leq y \leq 1$ funkcemi $y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$. Spočítáme tedy integrál oběma způsuby (popisu množiny A).

$$\begin{aligned}
\iint_A x^3 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x} x^3 y \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[x^3 \cdot \frac{y^2}{2}\right]_{x^3}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - \frac{x^9}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^6}{12} - \frac{x^{10}}{20}\right]_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60} = \frac{1}{30} \\
\iint_A x^3 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\int_{y}^{\sqrt[3]{y}} x^3 y \,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} \cdot y\right]_{y}^{\sqrt[3]{y}} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{y^{\frac{7}{3}}}{4} - \frac{y^5}{4}\right) \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^{\frac{10}{3}}}{4 \cdot \frac{10}{3}} - \frac{y^6}{4 \cdot 6}\right]_0^1 = \frac{3}{40} - \frac{1}{24} = \frac{9-5}{120} = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

△

Příklad. *Spočítejte* $\iint_B xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, kde* B *je zadaná nerovnostmi* $-1 \le x \le 1$ *a* $|x| \le |y|$.

Řešení. Nakreslíme si obrázek.



Množina B je na obrázku oblast „tvaru motýlku“ ohraničený křivkami $y = x$, $y = -x$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$. Na obrázku lze vidět, že přímka $y = -x$ je nalevo nad $y = x$, ale napravo pod. Tudíž musíme integrál rozdělit na 2 integrály přes 2 množiny:

$$B_- = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 0, x \le y \le -x\}$$
$$B_+ = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, -x \le y \le x\}.$$

Tedy počítejme

$$\iint_B xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{B_-} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{B_+} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\iint_{B_-} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{0}\left[\int_{x}^{-x} xy^2\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0}\left[x\cdot\frac{y^3}{3}\right]_x^{-x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(x\cdot\frac{(-x)^3}{3} - x\cdot\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0}\left(-2\cdot\frac{x^4}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{-2}{3}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} = 0 - \frac{(-2)\cdot(-1)}{15} = \frac{-2}{15}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{B_+} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\int_{-x}^{x} xy^2 \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^3}{3}\right]_{-x}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x \cdot \frac{x^3}{3} - x \cdot \frac{(-x)^3}{3}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(2 \cdot \frac{x^4}{3}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

Dohromady

$$
\iint_B xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{B_-} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{B_+} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{-2}{15} + \frac{2}{15} = 0.
$$

△