Matematika III, 1. cvičení

CÍL CVIČENÍ: Rozvoj základní představy o funkčních hodnotách závisejících na více proměnných, práce s jednoduchými výrazy pro takové funkce, znázornění funkce pomocí grafu. Zároveň v této souvislosti připomeneme jednoduché pojmy z elementární geometrie.

Definiční obory

Poznámka. Pro kružnici se středem v bodě $[x, y]$ a poloměrem r budeme používat označení $k([x, y]; r)$.

Příklad 1. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}.$$

Příklad 2. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}.$$

Příklad 3. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

Příklad 4. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} - \frac{1}{|y| - |x|}.$$

Příklad 5. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}.$$

Příklad 6. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Vrstevnice funkcí, polární souřadnice

Máme funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $c \in \mathbb{R}$. Množinu $f_c = \{[x, y] \in M; f(x, y) = c\}$ nazýváme vrstevnice funkce f na úrovni c. Chápeme-li graf funkce f jako reliéf krajiny, pak vrstevnice funkce na úrovni c je množina všech bodů s nadmořskou výškou c, což se shoduje s pojmem vrstevnice v mapách.

Příklad 7. *Určete vrstevnice funkce $z = x^2 + y^2$.*

Příklad 8. *Pomocí vrstevnic a řezů rovinami $\varrho_{xz}\colon y = 0$ a $\varrho_{yz}\colon x = 0$ určete v prostoru graf funkce*

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Příklad 9. *Pomocí vrstevnic a řezů rovinami $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$ určete v prostoru graf funkce*

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Příklad 10. *Pomocí vrstevnic a řezů rovinami $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$ určete v prostoru graf funkce*

$$z = x^2 + y^2.$$

Křivky v $\mathbb{R}^n$, tečna ke křivce

Křivka v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tedy c zobrazí reálné číslo x na bod $[c_1(x), \dots, c_n(x)]$ v prostoru $\mathbb{R}^n$, přičemž $c_1, \dots, c_n$ jsou funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derivace funkce c v bodě t_0, tj. vektor $c'(t_0) = (c_1'(t_0), \dots, c_n'(t_0))$, je tečným vektorem ke křivce c v bodě $c(t_0)$. Přímka

$$p = \{c(t_0) + sc'(t_0); s \in \mathbb{R}\}$$

je tečna ke křivce c v bodě t_0.

Příklad 11. *Určete tečnu křivky dané předpisem* $c(t) = (\ln t, \operatorname{arctg} t, e^{\sin(\pi t)})$ *v bodě* $t_0 = 1$.

Příklad 12. *Na křivce* $c(t) = (t^2 - 1, -2t^2 + 5t, t - 5)$ *nejděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou* $\varrho\colon 3x + y - z + 7 = 0$.

Nápověda. Směrový vektor $c'(t_0)$ tečny ke křivce $c(t)$ v bodě t_0 musí být kolmý k normálovému vektoru roviny ϱ, takže skalární součin těchto dvou vektorů musí být roven 0. Pomocí tohoto skalárního součinu vypočítáme t_0.

Příklad 13. *Určete parametrickou rovnici tečny v bodě* $[1, 1, \sqrt{2}]$ *ke křivce, jež vznikla jako průsečík plochy o rovnici* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *s plochou* $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Nápověda. Křivku si v okolí daného bodu vyjádřete stejným způsobem jako ve výše uvedených příkladech.