Cvičení 12: Náhodný výběr z normálního rozdělení, intervalové odhady

Teorie:

Případ, kdy je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

- M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$.
- $K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.
- $\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.
- $T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.

Intervaly spolehlivosti (jeden, resp. 2 výběry):

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} \right)$

Příklad 1. Ze základního souboru, z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 0{,}06$ jsme pořidili náhodný výběr s realizacemi 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu.

Výsledek. $1{,}22 \leq \mu \leq 1{,}58$.

Příklad 2. Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 nejsou známy. V následující tabulce jsou uvedeny četnosti jednotlivých realizací této náhodné veličiny.

x_i	8	11	12	14	15	16	17	18	20	21
četnost	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Vypočtěte:

- výběrový průměr,
- výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku,

- 99% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Výsledek. $13{,}954 \leq \mu \leq 16{,}671$

Příklad 3. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, 0{,}04)$. Určete nejmenší počet měření, který je třeba provést, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro μ nepřesáhla 0,16.

Příklad 4. Byla provedena čtyři nazávislá měření obsahu manganu u dvou vzorků oceli a byly získány výsledky:

1. vzorek	0,31%	0,30%	0,29%	0,32%
2. vzorek	0,59%	0,57%	0,58%	0,57%

Stanovte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ za předpokladu, že jde o realizace náhodného výběru z normálního rozdělení s neznámými, ale shodnými rozptyly.