Matematika III, 6. cvičení

Transformace souřadnic při integraci

Nechť $G(x,y)\colon M \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je prosté, prvky Jacobiho matice $G'(x,y)$ jsou spojité funkce a $\det G'(x,y) \neq 0$ pro všechna $[x,y] \in M$. Pak pro každou „rozumnou“ (přesněji Riemannovsky měřitelnou) množinu K a spojitou funkci $f\colon G(K) \to \mathbb{R}$ platí:

$$\iint_{G(K)} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \iint_K f(G(x,y))|\det G'(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Velmi důležitá je transformace do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

tj. pro dané r a φ dostaneme bod ve vzdálenosti r od počátku $[0,0]$, přičemž velikost orientovaného úhlu, vedeného v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček) od osy x k polopřímce začínající v $[0,0]$ a procházející přes tento bod, je φ.

Tedy $G(r,\varphi) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi] = [g(r,\varphi), h(r,\varphi)]$. Pak Jacobiho matice zobrazení G je $G'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} g'_r & g'_\varphi \\ h'_r & h'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$. Dále jacobián je $\det G'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$. Protože poloměr $r \geq 0$, je $|\det G'(r,\varphi)| = |r| = r$. Transformace do polárních souřadnic je obvykle výhodná, pokud je množina, přes kterou integrujeme, kruhem, mezikružím, kruhovou výsečí nebo něčím podobným.

Někdy je lepší použít transformaci do polárních souřadnic se středem v bodě $[a,b]$ (obvykle v případech, kdy je množina, přes kterou integrujeme, podobná kruhu se středem v bodě $[a,b]$) místo výše uvedené transformace se středem v bodě $[0,0]$:

$$x = r\cos\varphi + a, \quad y = r\sin\varphi + b.$$

Snadno si můžete ověřit, že jacobián této transformace je opět r. Přípustné hodnoty nových proměnných jsou $r \in \langle 0,\infty), \varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Zdůrazněme zejména, že transformace při výpočtu integrálů více proměnných vybíráme podle tvaru množiny, přes kterou se integruje, nikoliv podle integrované funkce, jako je tomu u integrálů jedné proměnné!

Příklad 1. *Pomocí přechodu k polárním souřadnicím zjednodušte dvojný integrál*

$$I = \iint_M f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M : x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení. M je kruh $k([0,0];1)$, $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2} = |r| = r$. Pak

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r f(r)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r f(r)\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 r f(r)\,\mathrm{d}r.$$

Činitel r ve výrazu $rf(r)$ je absolutní hodnota z jacobiánu transformace do polárních souřadnic. Ve druhé rovnosti jsme využili toho, že vnitřní integrál nijak nezávisí na φ, po jeho výpočtu tedy vyjde konstanta, takže dvojnásobný integrál je roven součinu jednoduchých integrálů.

Výsledek. $2\pi \int_0^1 r f(r)\,\mathrm{d}r$.

Příklad 2. *Spočítejte integrál*

$$\iint_M \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M : 1 \le (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 4$.

Nápověda. M je mezikruží se středem $[1,-1]$, tudíž použijeme polární souřadnice se středem $[1,-1]$.

Výsledek. $\frac{14}{3}\pi$.

Příklad 3. *Užitím transformace* $u = xy, y = vx$ *spočtěte* $I = \iint_A x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde množina* A *je ohraničena křivkami* $xy = \frac{1}{2}, xy = 2, 2y = x, y = 2x$, *přičemž* $x, y \ge 0$.

Výsledek. Transformace $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}, \det G'(u,v) = \frac{1}{2v}$, meze: $u \in \langle \frac{1}{2}, 2\rangle, v \in \langle \frac{1}{2}, 2\rangle, I = \frac{63}{24}\ln 2$.

Příklad 4. *Užitím transformace* $u = xy, v = \frac{y^2}{x}$ *spočtěte* $I = \iint_A \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde množina* A *je ohraničena křivkami* $y^2 = 2x, y^2 = x, xy = 1, xy = 2$.

Nápověda. Není potřeba vyjadřovat transformaci $G : x = f(u,v), y = g(u,v)$. Stačí uvažovat inverzní transformaci $G^{-1} : u = xy, v = \frac{y^2}{x}$, neboť $G \circ G^{-1} = id$, tudíž $\det G' \cdot \det(G^{-1})' = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$ a z toho $\det G'(u,v) = \frac{1}{\det(G^{-1})'(x,y)}$, přičemž pravou stranu rovnosti budeme muset převést do proměnných u, v.

Výsledek. $\det(G^{-1})'(x,y) = \frac{3y^2}{x}, \det G'(u,v) = \frac{1}{3v}$, meze: $u \in \langle 1, 2\rangle, v \in \langle 1, 2\rangle, I = \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)\ln 2$.

Příklad 5. *Vypočtěte integrál* $\iint_A 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A$, *kde* $A : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, y \ge |x|$.

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic.

Výsledek. $\frac{15}{4}\pi$.

Příklad 6. *Vypočtěte* $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Nápověda. Transformujte do polárních souřadnic.

Výsledek. $\frac{3}{8}\pi$.

Obsah plochy, hmotnost, těžiště

Integrály můžeme využít například při výpočtu následujících věcí:

(1) obsah plochy A je
$$\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(2) hmotná destička mající plochu A a hustotu v bodě $[x,y]$ danou funkcí $\varrho(x,y)$ má hmotnost
$$M = \iint_A \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(3) hmotná destička mající plochu A a hustotu v bodě $[x,y]$ danou funkcí $\varrho(x,y)$ má souřadnice těžiště $[x_0, y_0]$ dané vztahy
$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_A x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_A y\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 7. *Určete obsah množiny A ohraničené křivkami $x = y^2$ a $x = 4y^2 - 3$.*

Výsledek. 4.

Příklad 8. *Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami o rovnicích $x = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 8$ a $y = 4x$.*

Výsledek. $\frac{1}{2} + 2\ln 2$.

Příklad 9. *Máme destičku ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 1, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen a v protějším vrcholu je rovna 2. Najděte těžiště destičky.*

Nápověda. Uvažujte trojúhelník s vrcholy $[0,0], [1/\sqrt{2}, 0], [0, 1/\sqrt{2}]$.

Výsledek. $M = \frac{1}{6}, x_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}, y_0 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}-x} 2\sqrt{2}y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{24}, T = [\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{24}]$.

Příklad 10. *Určete souřadnice těžiště homogenní destičky ohraničené grafy křivek $y = x^2$ a $x + y = 2$.*

Výsledek. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$.