

Cvičení 8: Pravděpodobnost, náhodné jevy, náhodné veličiny, distribuční funkce

Příklad 1. V seminární skupině MB103 je 23 studentů. Studenti se dělí na

- 8 dobrých, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 90%;
- 12 průměrných, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 60%;
- ostatní slabé, kteří na matematiku navíc „kašlou“, a tak mají pravděpodobnost složení zkoušky jen 0,1.

- a) Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolený student zkoušku složí.
- b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student, úspěšně složivší zkoušku, byl z těch, kteří na matematiku „kašlali“.

Výsledek. a) 0,639; b) 0,0204;

Příklad 2. Tyč délky d je náhodně rozlomená na tři části. Určete pravděpodobnost, že je možné z těchto částí sestavit trojúhelník.

Výsledek. 0,25.

Teorie:

- Náhodná veličina, distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota;
- Nezávislost náhodných veličin, náhodný vektor, marginální a sdružené pravděpodobnostní funkce, hustoty a distribuční funkce.

Příklad 3. Střelec střílí do terče až do prvního zásahu. Má v zásobě 4 náboje. Pravděpodobnost zásahu je při každém výstřelu rovna 0,6. Nechť náhodná veličina X udává počet ne-spotřebovaných nábojů. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci X a nakreslete jejich grafy.

Příklad 4. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$\pi(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{7} \cdot 0,7^x & \text{pro } i = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

- a) $P(X < 3)$,
- b) $P(X > 4)$,

c) $P(1 < X < 4)$.

Příklad 5. Náhodná veličina má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 3 \\ \frac{1}{3}x - 1 & \text{pro } 3 < x \leq 6 \\ 1 & \text{pro } 6 < x. \end{cases}$$

a) Zdůvodněte, že jde skutečně o distribuční funkci.

b) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X .

c) Vypočtěte $P(2 < X < 4)$.

Příklad 6. Náhodná veličina má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} & \text{pro } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{pro } 2 < x. \end{cases}$$

a) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X .

b) Vypočtěte $P(-1 < X < 1)$.

Výsledek. $\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}$ pro $-2 < x \leq 2$, jinak 0; $\frac{1}{3}$.

Příklad 7. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Určete

a) koeficient a ,

b) distribuční funkci,

c) $P(-1 < X < 1)$.

Výsledek. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$.

Příklad 8. Diskrétní náhodný vektor má sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou

X\Y	2	5	6
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

Určete

- a) marginální distribuční a pravděpodobnostní funkce;
- b) sdruženou distribuční funkci a vhodným způsobem ji znázorněte;
- c) $P(Y > 3X)$.

Výsledek. $\frac{3}{20}$.

Příklad 9. Určete distribuční funkci náhodného vektoru (X, Y) , jehož hustota je

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(4x - y) & \text{pro } 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete dále $P(Y > 2X)$.

Výsledek. $\frac{1}{3}$.

Příklad 10. Určete marginální distribuční funkce, sdruženou a marginální hustotu náhodného vektoru (X, Y) , je-li

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \text{ nebo } y < 0 \\ \frac{1}{4}x^2y^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & \text{pro } x > 1, y > 2 \\ x^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, y > 2 \\ \frac{y^2}{4} & \text{pro } x > 1, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$