

Matematika III – 5. týden

Integrace podruhé - pokračování

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

17.10. – 21.10. 2016

Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Připomenutí
- 3 Změna souřadnic

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Připomenutí
- 3 Změna souřadnic

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Připomenutí
- 3 Změna souřadnic

Integrály závislé na parametrech

Theorem

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \dots, y_n)$ definovanou pro x z konečného intervalu $[a, b]$ a na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ uvažujme integrál

$$F(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n) dx.$$

Potom F je spojitá a pro všechny indexy $j = 1, \dots, n$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \dots, a_n) dx$$

Theorem

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset \mathbb{R}^n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.

Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i , je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i .

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojitě funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojitě funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Theorem

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left(\int_{\eta(x, y, \dots)}^{\zeta(x, y, \dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Theorem (Fubiniho věta)

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ a spojitou funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ na S je násobný integrál

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

nezávislý na pořadí ve kterém postupně integraci provádíme.

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Připomenutí
- 3 Změna souřadnic

Změna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj.

Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných.

Integrovaný výraz $f(x)dx$ vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné x a hodnotou $f(x)$. Pokud proměnnou transformujeme vztahem $x = u(t)$, vzjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt} dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t)) \frac{du}{dt} dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace $u'(t)$ je kladné, nebo dojde k obrácení mezí integrálu, takže ve výsledku se znaménko neprojeví.

Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů.

Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů.

Theorem

Nechť $G(t_1, \dots, t_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = G(t_1, \dots, t_n)$, je spojitě diferencovatelné zobrazení, $S = G(T)$ a T jsou Riemannovsky měřitelné množiny a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce. Potom platí

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_T f(G(t_1, \dots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \dots, t_n))| dt_1 \dots dt_n.$$

Podrobný formální důkaz je přímočarou realizací výše uvedené úvahy ve spojení s definicí Riemannova integrálu.

Například pro integrál funkce $f(x, y)$ ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

Jako příklad spočtáme integrál z charakteristické funkce kružnice o poloměru R (tj. její plochu)

Jako příklad spočtíme integrál z charakteristické funkce kružnice o poloměru R (tj. její plochu)

Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace $x = r \cos \theta$,
 $y = r \sin \theta$

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven

$$\det D^1 G(r, \theta) = r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r.$$

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici S o poloměru R , která je obrazem obdélníku $(r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi] = T$:

$$\int_S dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$