

4 Techniky matematických důkazů

Náš hlubší úvod do matematických formalismů pro informatiku začneme základním přehledem technik matematických důkazů. Z nich pro nás asi nejdůležitější je technika důkazů *matematickou indukcí*, která je svou podstatou velmi blízká počítačovým programům (jako iterace cyklů).



Stručný přehled lekce

- * Základní důkazové techniky: přímé, nepřímé a sporem. Důkazy „tehdy a jen tehdy“.
- * Důkazy matematickou indukcí, jejich variace a úskalí.
- * Metody zesílení tvrzení a rozšíření základu v indukci.

4.1 Přehled základních důkazových technik

- *Přímé odvození*. To je způsob, o kterém jsme se dosud bavili. □

- *Kontrapozice* (také *obrácením* či *nepřímý důkaz*). Místo věty

„Jestliže platí **předpoklady**, pak platí **závěr**.“

budeme dokazovat ekvivalentní větu

„Jestliže neplatí **závěr**, pak neplatí alespoň jeden z **předpokladů**.“ □

- *Důkaz sporem*. Místo věty

„Jestliže platí **předpoklady**, pak platí **závěr**.“

budeme dokazovat větu

„Jestliže platí **předpoklady** a platí **opak závěru**, pak platí...“

– nějaké **zjevně nepravdivé tvrzení**, nebo případně

– **závěr** (tj. opak jeho opaku) či opak jednoho z předpokladů. □

- *Matematická indukce*. Pokročilá technika. . .

Příklad důkazu kontrapozicí

Definice: *Prvočíslo* je celé číslo $p > 1$, které nemá jiné dělitele než 1 a p .

Příklad 4.1. *Na důkaz kontrapozicí (obrácením).*

Věta. *Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché.* □

Důkaz *obráceného tvrzení:* Budeme místo uvedeného znění věty dokazovat, že je-li p sudé, pak p není větší než 2 nebo p není prvočíslo.

Připomínáme, že podle definice je p sudé, právě když lze psát $p = 2 \cdot k$, kde k je celé. Jsou jen dvě snadno řešitelné možnosti:

- $k \leq 1$. Pak $p = 2k$ není větší než 2.
- $k > 1$. Pak $p = 2 \cdot k$ není prvočíslo podle definice.

□

Příklady důkazu sporem

Příklad 4.2. *Jiný, kratší přístup k Důkazu 4.1.*

Věta. *Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché.* □

Důkaz sporem: Necht' tedy p je prvočíslo větší než 2, které je sudé. Pak $p = 2 \cdot k$ pro nějaké $k > 1$, tedy p není prvočíslo, **spor** (s předpokladem, že p je prvočíslo). □

Příklad 4.3. *Opět sporem.*

Věta. *Číslo $\sqrt{2}$ není racionální.* □

Důkaz sporem: Necht' tedy $\sqrt{2}$ je racionální, tj. necht' existují nesoudělná celá kladná čísla r, s taková, že $\sqrt{2} = r/s$. □

- Pak $2 = r^2/s^2$, tedy $r^2 = 2 \cdot s^2$, proto r^2 je dělitelné dvěma. Z toho plyne, že i r je dělitelné dvěma (proč?). □
- Jelikož r je dělitelné dvěma, je r^2 dělitelné dokonce čtyřmi, tedy $r^2 = 4 \cdot m$ pro nějaké m . Pak ale také $4 \cdot m = 2 \cdot s^2$, tedy $2 \cdot m = s^2$ a proto s^2 je dělitelné dvěma. □
- Z toho plyne, že s je také dělitelné dvěma. Celkem dostáváme, že r i s jsou dělitelné dvěma, jsou tedy soudělná a to je **spor**. □

„Nevíte-li, jak nějakou větu dokázat, zkuste důkaz sporem. . . “

4.2 Věty typu „tehdy a jen tehdy“

- Uvažujme nyní (v matematice poměrně hojně) věty tvaru
„Nechť platí předpoklady P. Pak tvrzení A platí *právě tehdy*, platí-li tvrzení B.“□
- Příklady jiných jazykových formulací téže věty jsou:
 - * Nechť platí předpoklady P. Pak tvrzení A platí *tehdy a jen tehdy*, když platí tvrzení B.□
 - * Za předpokladů P je tvrzení B *nutnou a postačující* podmínkou pro platnost tvrzení A.□
 - * Za předpokladů P je tvrzení A *nutnou a postačující* podmínkou pro platnost tvrzení B.□
- **Plný důkaz** vět tohoto tvaru má vždy *dvě části(!)*. Je třeba dokázat:
 - * Jestliže platí předpoklady P a tvrzení A, pak platí tvrzení B.
 - * Jestliže platí předpoklady P a tvrzení B, pak platí tvrzení A.

Příklad 4.4. Na důkaz typu „tehdy a jen tehdy“.

Věta. Pro každá dvě celá č. a, b platí, že $a < b$ právě tehdy, když $2^a < 2^b$.

□

Důkaz: Nezapomínáme, že našim úkolem je dokázat oba směry tvrzení (implikace zleva doprava a zprava doleva). Začneme s prvním: Předpoklad $a < b$ je definičně ekvivalentní tomu, že $b = a + k$ pro nějaké přirozené $k > 0$. Potom $2^b = 2^{a+k} = 2^a \cdot 2^k = \ell \cdot 2^a$ pro nějaké přirozené $\ell = 2^k \geq 2$, a tudíž

$$2^b - 2^a = (\ell - 1) \cdot 2^a \geq 1 \cdot 2^a > 0.$$

Tím je první část důkazu hotova. □

V opačném směru postupujeme z předpokladu $2^a < 2^b$. Vydělením obou stran nerovnosti kladným číslem 2^a získáme

$$2^b / 2^a = 2^{b-a} > 1. \square$$

Dále postupujeme sporem. Nechť tedy $a \geq b$, neboli $a - b = m \geq 0$. Potom máme $2^{a-b} = \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{m \times} \geq 1$. Avšak celkově $1 = 2^0 = 2^{a-b} \cdot 2^{b-a} > 1 \cdot 1 = 1$ je

sporné. Proto zbývá jen požadovaný závěr $a < b$. □

4.3 Matematická indukce

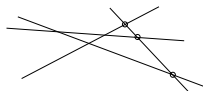
- Jde o důkazovou techniku aplikovatelnou na tvrzení tohoto typu:

„Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$.“

Zde k_0 je nějaké pevné přir. číslo a $T(n)$ je tvrzení parametrizované čís. n . □

Příkladem je třeba tvrzení:

Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ oblastí. □



- **Princip matematické indukce** říká (coby axiom), že k důkazu věty

„Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$.“

stačí ověřit platnost těchto dvou tvrzení:

- * $T(k_0)$ (tzv. **báze** neboli základ indukce)
- * Pro každé $k \geq k_0$; jestliže platí $T(k)$, (indukční předpoklad)
pak platí také $T(k+1)$. (indukční krok)

Příklady důkazů indukcí

Příklad 4.6. *Velmi jednoduchá a přímočará indukce.*

Věta. *Pro každé přiroz. $n \geq 1$ je stejná pravděpodobnost, že při současném hodu n kostkami bude výsledný součet sudý, jako, že bude lichý. \square*

Důkaz: *Základ indukce* je zde zřejmý: Na jedné kostce (poctivě!) jsou tři lichá a tři sudá čísla, takže obě skupiny padají se stejnou pravděpodobností. \square

Indukční krok pro $k \geq 1$: Necht' p_k^s pravděpodobnost, že při hodu k kostkami bude výsledný součet sudý, a p_k^l je pravděpodobnost lichého. Podle indukčního předpokladu je

$$p_k^s = p_k^l = \frac{1}{2}.$$

\square

Hoďme navíc $(k+1)$ -ní kostkou. Podle toho, zda na ní padne liché nebo sudé číslo, je pravděpodobnost celkového sudého součtu rovna

$$\frac{3}{6}p_k^l + \frac{3}{6}p_k^s = \frac{1}{2}$$

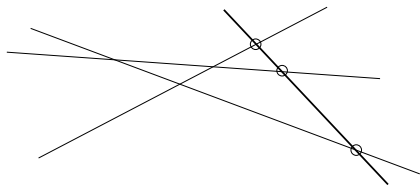
a stejně pro pravděpodobnost celkového lichého součtu. \square

Příklad 4.7. Ukázka skutečné důkazové „síly“ principu matematické indukce.

Věta. Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na

$$\frac{1}{2}n(n+1) + 1$$

oblastí.



Důkaz: □ Pro bázi indukce postačí, že $n = 0$ přímek dělí rovinu na jednu část. (Všimněte si také, že 1 přímka dělí rovinu na dvě části.)

Mějme nyní rovinu rozdělenou $n = k$ přímkami na nejvýše $\frac{1}{2}k(k+1) + 1$ částí. □ Další, $(k+1)$ -ní přímka je rozdělena průsečíky s předchozími přímkami na nejvýše $k+1$ úseků a každý z nich oddělí novou část roviny. □ Celkem tedy bude rovina rozdělena našimi přímkami na nejvýše tento počet oblastí:

$$\frac{1}{2}k(k+1) + 1 + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2} \cdot 2(k+1) + 1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + 1$$

□

Příklad 4.8. Další indukční důkaz rozepsaný v podrobných krocích.

Věta. Pro každé $n \geq 0$ platí $\sum_{j=0}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$. \square

Důkaz indukcí vzhledem k n .

- **Báze:** Zde musíme dokázat platnost tvrzení pro $n := 0$, což je v tomto případě rovnost $\sum_{j=0}^0 j = \frac{0(0+1)}{2}$. Tato rovnost (zjevně) platí. \square
- **Indukční krok:** Musíme dokázat, pro každé $k \geq 0$, že z platnosti tvrzení pro $n := k$ vyplývá platnost pro $n := k + 1$, což konkrétně znamená:

Jestliže $\sum_{j=0}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$, pak platí $\sum_{j=0}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$. \square

Předpokládejme tedy, že $\sum_{j=0}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ a pokusme se dokázat, že pak také

$\sum_{j=0}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. \square To už plyne přímočarou úpravou:

$$\sum_{j=0}^{k+1} j = \sum_{j=0}^k j + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \square$$

Podle principu matematické indukce je celý důkaz hotov. \square

4.4 Komentáře k matematické indukci

- Základní trik všech důkazů matematickou indukcí je vhodná *reformulace* tvrzení $T(n+1)$ tak, aby se „odvolávalo“ na tvrzení $T(n)$.
 - * Dobře se vždy podívejte, v čem se liší tvrzení $T(n+1)$ od tvrzení $T(n)$. Tento „rozdí“ budete muset v důkaze zdůvodnit. □
- Dokud se matematickou indukci teprve učíte, používejte následující. Zaveďte si další proměnnou k a formulujte svá tvrzení a úpravy stylem „platí-li naše tvrzení $T(n)$ pro $n := k$, pak bude platit i pro $n := k + 1$ “. □
- Pozor, občas je potřeba „*zesílit*“ tvrzení $T(n)$, aby indukční krok správně „fungoval“ (a jsou případy, kdy tento trik velmi pomáhá).□
- Často se chybuje v důkazu indukčního kroku, neboť ten bývá většinou výrazně obtížnější než báze, ale o to *zrádnější* jsou chyby v samotné zdánlivě snadné bázi!
 - * Dejte si dobrý pozor, od které hodnoty $n \geq k_0$ je indukční krok univerzálně platný a jestli báze nezahrnuje více než jednu hodnotu. . .

Příklad 4.9. Kdy je vhodné (a v zásadě také nutné) indukční krok zesílit. . .

Věta. Pro každé $n \geq 1$ platí

$$s(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

Důkaz: \square *Báze indukce* je zřejmá, neboť $\frac{1}{1 \cdot 2} < 1$.

Co však *indukční krok*? Předpoklad $s(n) < 1$ je sám o sobě „příliš slabý“ na to, aby bylo možno tvrdit $s(n+1) = s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < 1$. \square

Neznamená to ještě, že by tvrzení nebylo platné, jen je potřeba náš indukční předpoklad *zesílit*. Budeme dokazovat

„Pro každé přirozené $n \geq 1$ platí $s(n) \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.“ \square

To platí pro $n = 1$ a dále už úpravou jen dokončíme zesílený indukční krok:

$$\begin{aligned} s(n+1) &= s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= 1 + \frac{-(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

\square

Rozšíření báze a předpokladu

Mimo zesilování tvrzení indukčního kroku jsme někdy okolnostmi nuceni i k **rozšiřování** samotné báze indukce a s ní indukčního předpokladu na více než jednu hodnotu parametru n . □

- Můžeme například předpokládat platnost (parametrizovaných) tvrzení $T(n)$ i $T(n + 1)$ **zároveň**, a pak odvozovat platnost $T(n + 2)$.

Toto lze samozř. zobecnit na jakýkoliv počet předpokládaných parametrů. □

- Můžeme dokonce předpokládat platnost tvrzení $T(j)$ **pro všechna** $j = k_0, k_0 + 1, \dots, n$ najednou a dokazovat $T(n + 1)$.

Toto typicky využijeme v případech, kdy indukční krok „rozdělí“ problém $T(n + 1)$ na dvě menší části a z nich pak odvodí platnost $T(n + 1)$. □

Fakt: Obě prezentovaná „rozšíření“ jsou v konečném důsledku jen speciálními instancemi základní matematické indukce; použité rozšířené možnosti pouze zjednodušují formální zápis důkazu.

Příklad 4.10. *Když je nutno rozšířit bázi a indukční předpoklad. . .*

Věta. *Nechť funkce f pro každé $n \geq 0$ splňuje vztah*

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n).$$

Pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, tak platí $f(n) = n + 1$ pro všechna přirozená $n \geq 0$. □

Důkaz: Už samotný pohled na daný vztah $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$ naznačuje, že bychom měli rozšířit indukční předpoklad (a krok) zhruba takto:

Pro každé přirozené $k \geq 0$; jestliže platí $f(n) = n + 1$ pro $n := k$ a zároveň pro $n := k + 1$, pak $f(n) = n + 1$ platí také pro $n := k + 2$.

Báze indukce – □ pozor, zde už musíme ověřit dvě hodnoty pro $n := 0$ a $n := 1$:

$$f(0) = 0 + 1 = 1, \quad f(1) = 1 + 1 = 2 \quad \square$$

Náš **indukční krok** tak nyní může využít celého rozšířeného předpokladu, znalosti hodnot $f(k)$ i $f(k+1)$, pro ověření požadovaného vztahu pro $n := k + 2$

$$f(n) = f(k+2) = 2f(k+1) - f(k) = 2 \cdot (k+1+1) - (k+1) = k+3 = n+1.$$

□

Závěrem malý „problém“

Příklad 4.11. *Aneb jak snadno lze v matematické indukci udělat chybu.*

Věta. („nevěta“)

V každém stádu o $n \geq 1$ koních mají všichni koně stejnou barvu. □

Důkaz indukcí vzhledem k n .

Báze: Ve stádu o jednom koni mají všichni koně stejnou barvu. □

Indukční krok: Necht' $S = \{K_1, \dots, K_{n+1}\}$ je stádo o $n+1$ koních. Dokážeme, že všichni koně mají stejnou barvu. Uvažme dvě menší stáda:

- $S' = \{K_1, \underline{K_2}, \dots, K_n\}$
- $S'' = \{\underline{K_2}, \dots, K_n, K_{n+1}\}$ □

Podle indukčního předpokladu mají všichni koně ve stádu S' stejnou barvu B' . Podobně všichni koně ve stádu S'' mají podle indukčního předpokladu stejnou barvu B'' . □ Dokážeme, že $B' = B''$, tedy že všichni koně ve stádu S mají stejnou barvu. To ale plyne z toho, že koně K_2, \dots, K_n patří jak do stáda S' , tak i do stáda S'' . □

□

Ale to už je podvod! Vidíte, kde?