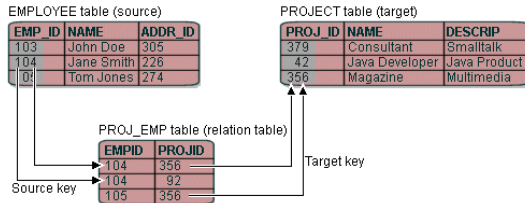


## 6 Relace a jejich vlastnosti

V následující lekci si podrobně rozebereme matematický aparát relací, kterému se v jeho abstraktní podobě mnoho pozornosti v dřívější výuce nevěnuje – na rozdíl od naivního pohledu na množiny a na „funkce“ ve významu analytických funkcí (jako  $2x$ ,  $\sin x$ ). Přitom na pojem relace velmi brzy narazí každý informatik už jen při studiu dat a databází a jeho pochopení bude nezbytně potřebovat.



### Stručný přehled lekce

- \* Co je relace – reprezentace relací tabulkou a grafem.
- \* Základní vlastnosti binárních relací nad množinou.
- \* Uzávěry relací. Tranzitivní relace.

## Zopakování kartézského součinu a relace

**Definice:** *Kartézský součin* dvou množin  $A, B$  definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z  $A$  a  $B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} . \square$$

**Definice** *kartézského součinu* více množin: Pro každé  $k \in \mathbb{N}$  definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\} .$$

- Například  $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\} . \square$

**Definice:** *Relace* mezi množinami  $A_1, A_2, \cdots, A_k$ , pro  $k \in \mathbb{N}$ , je *libovolná* podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k . \square$$

Pokud  $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$ , hovoříme o *k-ární relaci*  $R$  na  $A$ .

## 6.1 Reprezentace konečných relací

Ukládání dat – především sleduje vztahy mezi objekty (stejně jako relace).

↪ relační databáze jako obecná ukázka použití relace.

**Příklad 6.1.** Tabulka relační databáze prezentuje obecnou relaci.

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- $ZNAK = \{a, \dots, z, A, \dots, Z, mezera\}$ ,
- $CISLICE = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . □

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- $JMENO = ZNAK^{15}$ ,  $PRIJMENI = ZNAK^{20}$ ,  $VEK = CISLICE^3$ ,
- $ZAMESTNANEC$  „ $\in$ “  $JMENO \times PRIJMENI \times VEK$ . □

Relaci „typu“  $ZAMESTNANEC$  pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26
Stanislav	Novotný	52

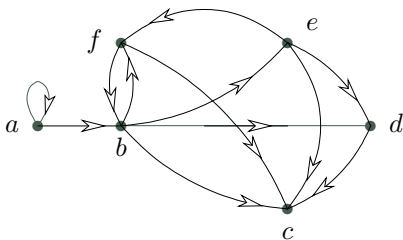
□

## Reprezentace binárních relací na množině

**Značení:** Binární relaci  $R \subseteq M \times M$  lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*:

- Prvky  $M$  znázorníme jako body v rovině (tj. na papíře).
- Prvek  $(a, b) \in R$  znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z  $a$  do  $b$ .  
Je-li  $a = b$ , pak je touto hranou „smyčka“ na  $a$ . □

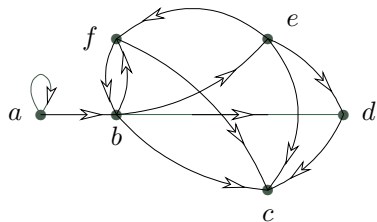
Například mějme  $M = \{a, b, c, d, e, f\}$  a  $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$ , pak:



Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé třeba z matematické analýzy. □

V případě, že  $M$  je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace  $R$  jejím grafem nepraktická (záleží také na míře „pravidelnosti“  $R$ ).

**Značení:** Binární relaci  $R \subseteq M \times M$  lze jednoznačně zapsat také pomocí *matice* relace – matice  $A$  typu  $M \times M$  s hodnotami z  $\{0, 1\}$ .



→

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

□

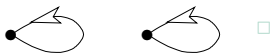
A závěrem se můžeme opět vrátit k reprezentaci tabulkou...

JMENO	PRIJMENI
Jan	Novák
Petr	Vichr
Pavel	Zíma
Stanislav	Novotný

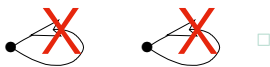
## 6.2 Vlastnosti binárních relací na množině

**Definice 6.2.** Necht'  $R \subseteq M \times M$ . Binární relace  $R$  je

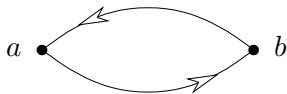
- *reflexivní*, právě když pro každé  $a \in M$  platí  $(a, a) \in R$ ;



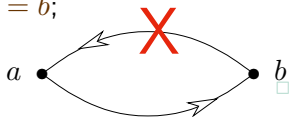
- *ireflexivní*, právě když pro každé  $a \in M$  platí  $(a, a) \notin R$ ;



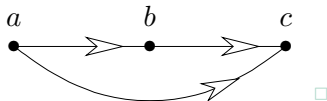
- *symetrická*, právě když pro každé  $a, b \in M$  platí, že jestliže  $(a, b) \in R$ , pak také  $(b, a) \in R$ ;



- *antisymetrická*, právě když pro každé  $a, b \in M$  platí, že jestliže  $(a, b), (b, a) \in R$ , pak  $a = b$ ;



- *tranzitivní*, právě když pro každé  $a, b, c \in M$  platí, že jestliže  $(a, b), (b, c) \in R$ , pak také  $(a, c) \in R$ .



Pozor, může být relace *symetrická i antisymetrická zároveň*? □



Ano!

## Ukázkové binární relace

**Příklad 6.3.** *Jak poznat vlastnosti relací z matice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Které z vlastností mají binární relace reprezentované těmito maticemi?* □

**Řešení:** Ony vlastnosti si probereme jednu po druhé:

- Reflexivní, právě když každý prvek na hlavní diagonále je 1. □
- Ireflexivní, právě když je její hlavní diagonála vyplněna nulami. □
- Symetrická, právě když je „stejná“ v zrcadlovém obraze podle hl. diagonály.
- Antisymetrická, právě když po „přeložení“ matice podle hlavní diagonály nebudou nikde mimo tuto diagonálu dvě jedničky „na sobě“. □
- Zbývá posoudit tranzitivitu, což není úplně jednoduché. . .

□



#### Příklad 6.4. Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.

Nechť  $M$  je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace  $R \subseteq M \times M$  definované takto

- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  a  $y$  mají stejné rodné číslo;  $\square$
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má stejnou výšku jako  $y$  (dejme t. na celé mm);  $\square$
- $(x, y) \in R$  právě když výška  $x$  a  $y$  se neliší více jak o 2 mm;  $\square$
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má alespoň takovou výšku jako  $y$ ;  $\square$
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  má jinou výšku než  $y$  (dejme tomu na celé mm);  $\square$
- $(x, y) \in R$  právě když  $x$  je zamilován(a) do  $y$ .  $\square$

$\square$

Co dělat v situaci, že naše relace některou z poptávaných vlastností nemá, ale nám by se ta vlastnost hodila?  $\square$  V některých případech lze chybějící vlastnost relaci „doplnit“ pomocí takzvaného **uzávěru**.

- Například reflexivní uzávěr jednoduše přidá do relace všechny dvojice  $(x, x)$ .
- Nebo symetrický uzávěr zahrne do relace všechny obrácené dvojice k existujícím dvojicím, čili všechny chybějící  $(x, y)$  pokud  $(y, x) \in R$ .

## 6.3 Uzávěry relací

Princip uzávěru binární relace:

- Naší snahou je danou relaci „obohatit“ o zvolenou vlastnost (například proto, že naše data o relaci jsou neúplná a vlastnost je tak poškozena). □
- Pochopitelně, ne každou vlastnost relace lze získat přidáváním dalších dvojic; naše uvažovaná vlastnost musí být *uzavíratelná*. □

**Fakt:** Libovolná kombinace vlastností *reflexivita*, *symetrie*, *tranzitivita* je uzavíratelná vlastnost.

Ireflexivita a antisymetrie *nejsou* uzavíratelné vlastnosti. □

**Věta 6.5.** *Nechť  $V$  je uzavíratelná vlastnost binárních relací. Pak existuje jed-  
noznačná minimální relace  $R^V \supseteq R$  mající vlastnost  $V$ . Platí*

$$R^V = \bigcap_{S \supseteq R, S \text{ má } V \text{ na } M} S.$$

Tuto minimální relaci  $R^V$  s vlastností  $V$  nazýváme  *$V$ -uzávěr* relace  $R$ .

**Tvrzení 6.6.** Necht'  $R$  je binární relace na  $M$ . Pak platí následující poznatky.

- **Reflexivní uzávěr**  $R$  je přesně relace  $R \cup \{(x, x) \mid x \in M\}$ .  $\square$
- **Symetrický uzávěr**  $R$  je přesně relace

$$\overset{\leftrightarrow}{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \text{ nebo } (y, x) \in R\}. \square$$

- **Tranzitivní uzávěr**  $R$  je přesně relace  $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$ , kde  $\mathcal{T}$  je zobrazení, které pro každou binární relaci  $S$  vrátí relaci

$$\mathcal{T}(S) := S \cup \{(x, z) \mid \text{existuje } y \text{ takové, že } (x, y), (y, z) \in S\}$$

a  $\mathcal{T}^i(S) = \underbrace{\mathcal{T}(\mathcal{T} \dots (\mathcal{T}(S)) \dots)}_i$  je  $i$ -krát iterovaná aplikace zobrazení  $\mathcal{T}$ .  $\square$

- Reflexivní a tranzitivní uzávěr  $R$  je přesně relace  $R^* = Q^+$ , kde  $Q$  je reflexivní uzávěr  $R$ .  $\square$
- Reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr  $R$  (tj. nejmenší ekvivalence obsahující  $R$ ) je přesně relace  $(\overset{\leftrightarrow}{Q})^+$ , kde  $Q$  je reflexivní uzávěr  $R$ .  $\square$

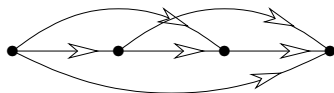
**Poznámka:** Na pořadí aplikování uzávěrů vlastností záleží! Zhruba řečeno, tranzitivní uzávěr obvykle aplikujeme coby poslední.

## Tranzitivní uzávěr

Závěrem se zastavíme nad případem tranzitivního uzávěru  $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$ , jehož definice se nezdá až tak „konstruktivní“ – co nekonečné sjednocení?  $\square$

**Tvrzení 6.7.** *Nechť  $R$  je relace na konečné množině. Pak existuje přirozené  $m$  takové, že tranzitivní uzávěr relace  $R$  lze zapsat  $R^+ = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{T}^i(R)$ .*  $\square$

**Důkaz:** Pro něj si uvědomme zásadní fakt – pokud  $\mathcal{T}^{i+1}(R) = \mathcal{T}^i(R)$ , tak už platí  $\mathcal{T}^{i+k}(R) = \mathcal{T}^i(R)$  pro všechna přirozená  $k$ . Neboli je potřeba sjednotit jen tolik prvních členů výrazu  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$ , dokud se hodnota  $\mathcal{T}^i(R)$  „zvětšuje“, což může nastat jen konečně krát nad konečnou množinou.



$\square$

## 6.4 Tranzitivní relace

Mezi základními vlastnostmi relací popsanými Definicí 6.2 je jedna – **tranzitivita**, jejíž uchopení a zvládnutí je výrazně těžší než u ostatních vlastností. □

- Definice reflexivity, symetrie či antisymetrie nám ihned řeknou, které dvojice v relaci chybí nebo přebývají. □
- Avšak vlastnost tranzitivity je fundamentálně **induktivní** – všimněte si tranzitivního uzávěru, kde po každém přidání dvojice je nutno znovu podmínku tranzitivity kontrolovat, což „indukuje“ nové dvojice k přidávání. □

**Tvrzení 6.8.** *Mějme relaci  $R$  na kon. množině  $M$  a necht'  $R^+$  je tranzitivním uz.  $R$ . Pak pro každé  $x, y \in M$  platí  $(x, y) \in R^+$  právě tehdy, když existují  $z_0, z_1, \dots, z_k \in M$  takové, že  $z_0 = x, z_k = y$  a  $(z_{i-1}, z_i) \in R$  pro  $i = 1, \dots, k$ . □*

Tvrzení 6.8 o tranzitivním uzávěru  $R^+$  je potřeba (neformálně) číst takto:

Do tranzitivního uzávěru patří všechny ty dvojice  $(x, y)$ , že v původní relaci  $R$  se lze „dostat po šipkách“ z  $x$  do  $y$ . Pro ilustraci:



S tranzitivními relacemi (mezi objekty) se nejčastěji setkáváme, pokud tyto objekty porovnáváme vztahy „je stejný jako“ nebo „je větší/lepší než“. □

**Definice 6.9.** Daná binární relace  $R$  je

- \* relace **ekvivalence**, právě když je  $R$  reflexivní, symetrická a tranzitivní; □
- \* **částečné uspořádání**, právě když je  $R$  reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen **uspořádání**). □

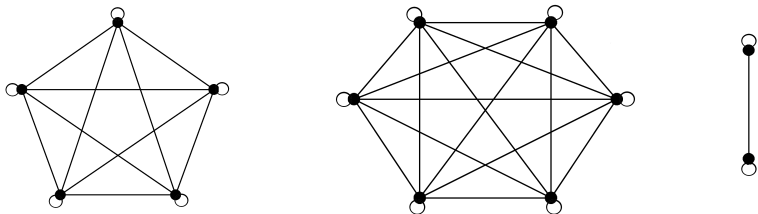
**Příklad 6.10.** *Jaké vlastnosti mají následující relace?*

- Bud'  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definovaná takto  $(x, y) \in R$  právě když  $x$  dělí  $y$ . □  
(**Částečné uspořádání**, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.) □
- Bud'  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definovaná takto  $(x, y) \in R$  právě když  $x$  a  $y$  mají stejný zbytek po dělení číslem 5. □ (**Ekvivalence**.) □
- Necht'  $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  je množina funkcí. Bud'  $R \subseteq F \times F$  definovaná takto  $(f, g) \in R$  právě když  $f(x) < g(x)$  pro všechna  $x$ . □ (**Irreflexivní, antisymetrická a tranzitivní**, ale **ne** reflexivní – není uspořádáním.) □

□

### Příklad 6.11. Jak vypadá graf relace ekvivalence? □

Poměrně příznačně, jak nám ukazuje následující obrázek (všimněte si absence šipek, která je dána symetrií relace).



Neformálně řečeno; ekvivalence je relace  $R \subseteq M \times M$ , taková, že  $(x, y) \in R$  právě když  $x$  a  $y$  jsou v nějakém smyslu „stejné“ (leží na stejné hromádce). □

Tyto hromádky pak nazýváme komponentami či třídami ekvivalence dané relace. □