9 Pojem grafu

Třebaže *grafy* jsou jen jednou z mnoha struktur v matematice a vlastně pouze speciálním případem binárních relací, vydobyly si svou užitečností a názorností (a to především ve vztahu k informatice) důležité místo na slunci.

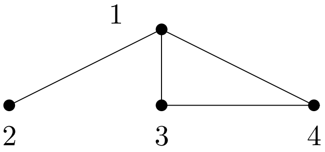
Neformálně řečeno, graf se skládá z *vrcholů* (představme si je jako nakreslené „puntíky") a z *hran*, které spojují dvojice vrcholů mezi sebou.

Stručný přehled lekce

* Zavedení a pochopení grafů. Příklady běžných tříd grafů.
* Základní pojmy: podgrafy a isomorfismus, souvislost, vzdálenost.
* Orientované grafy a jejich odpovídající základní pojmy.

9.1 Definice grafu

Definice 9.1. **Graf** (jednoduchý neorient.) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.



Značení: Hranu mezi vrcholy u a v píšeme jako $\{u, v\}$, nebo zkráceně uv.
Vrcholy spojené hranou jsou *sousední* a hrana uv *vychází* z vrcholů u a v.
Na množinu vrcholů grafu G odkazujeme jako na $V(G)$, na množinu hran $E(G)$.

Grafy se často zadávají přímo názorným obrázkem, jinak je lze formálně zadat výčtem vrcholů a výčtem hran. Například:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\Big\}$$

Na graf se lze dívat také jako na symetrickou ireflexivní relaci, kde hrany tvoří právě dvojice prvků z této relace.

Stupně vrcholů v grafu

Definice 9.2. **Stupněm vrcholu** v v grafu G rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$. □

Slovo „vycházející" zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.

□

Definice: Graf je *d-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň d. □

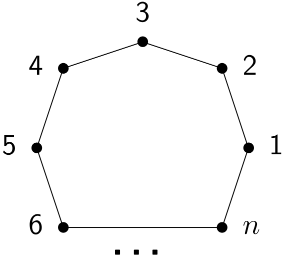
Značení: *Nejvyšší* stupeň v grafu G značíme $\Delta(G)$ a *nejnižší* $\delta(G)$. □

Věta 9.3. *Součet stupňů v grafu je vždy sudý, roven dvojnásobku počtu hran.*

Běžné typy grafů

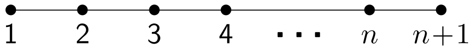
Kružnice délky n má $n \geq 3$ různých vrcholů spojených „do jednoho cyklu“ n hranami:

C_n



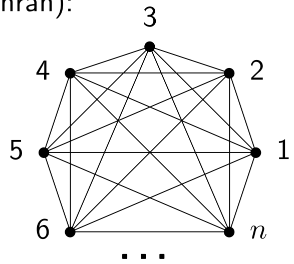
Cesta délky $n \geq 0$ má $n+1$ různých vrcholů spojených „za sebou“ n hranami:

P_n



Úplný graf na $n \geq 1$ vrcholech má n různých vrcholů spojených po všech dvojicích (tj. celkem $\binom{n}{2}$ hran):

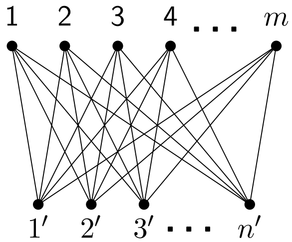
$\boldsymbol{K_n}$



□

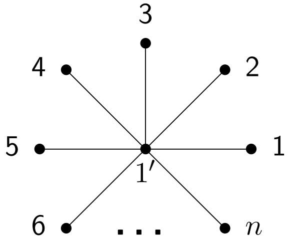
Úplný bipartitní graf na $m \geq 1$ a $n \geq 1$ vrcholech má $m+n$ vrcholů ve dvou skupinách (partitách), přičemž hranami jsou spojeny všechny $m \cdot n$ dvojice z různých skupin:

$\boldsymbol{K_{m,n}}$



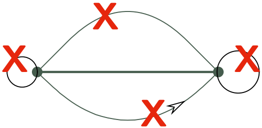
Hvězda s $n \geq 1$ rameny je zvláštní název pro úplný bipartitní graf $K_{1,n}$:

$\boldsymbol{S_n}$



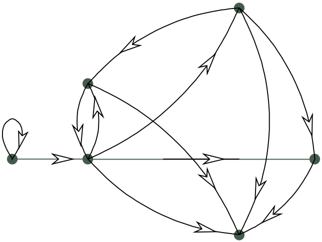
Zmínka o zobecněných grafech

Všimněme si, že v definici grafu (Def. 9.1) vůbec neuvažujeme možnosti vícenásobných hran (mezi stejnou dvojicí vrcholů) a tzv. „smyček" (hrana se stejným jedním koncem) – takovému zobecnění by se říkalo multigraf. Také prozatím nepřisuzujeme hranám žádný směr.



□

V Oddíle 9.4 si však ještě zavedeme *orientované grafy*, které každé hraně přiřazují jistý směr. Orientované grafy budou mít množinu *orientovaných hran* $A \subseteq V(G) \times V(G)$ a zobrazíme je třeba takto…

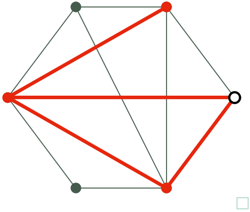


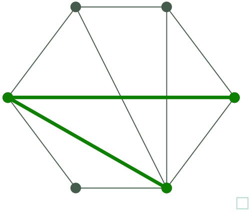
9.2 Podgrafy a isomorfismus

Definice: *Podgrafem* grafu G rozumíme libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.

Píšeme $H \subseteq G$, tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný). □

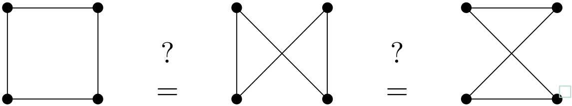
Na následujícím obrázku vidíme zvýrazněné podmnožiny vrcholů hran. Proč se vlevo nejedná o podgraf? Obrázek vpravo už podgrafem je.



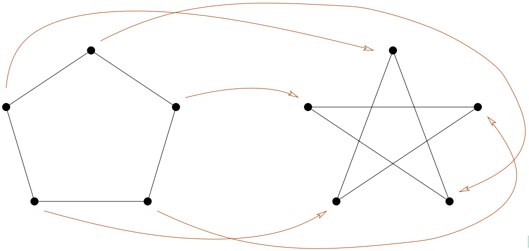


Definice: *Indukovaným podgrafem* je podgraf $H \subseteq G$ takový, který obsahuje všechny hrany grafu G mezi dvojicemi vrcholů z $V(H)$.

„Stejnost“ grafů



Definice 9.6. **Isomorfismus** $\simeq$ grafů G a H
je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které každá dvojice $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G právě, když je dvojice $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.

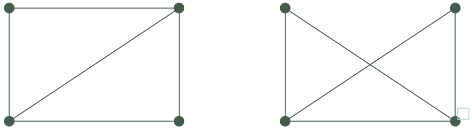


Grafy G a H jsou *isomorfní*, $G \simeq H$, pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

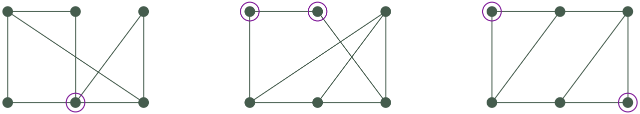
Vlastnosti isomorfismu

Fakt: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pak platí následující

- G a H mají stejný počet hran, □
- f zobrazuje na sebe vrcholy stejných stupňů, tj. $d_G(v) = d_H(f(v))$. □



U výše zakreslených dvou grafů objevíme isomorfismus velmi snadno – podíváme se, jak si odpovídají vrcholy stejných stupňů. □



Naopak v této trojici grafů (se stejnými počty vrcholů i hran) žádné dva nejsou isomorfní. Proč? □Ten vlevo má vrchol stupně 4, čímž se od obou zbylých liší. □Prostřední graf pak má jediné dva vrcholy stupně 2 spojené hranou, kdežto v pravém takové dva vrcholy spojené nejsou (isomorfismus by je však i s hranou musel zachovat).

Příklad 9.7. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

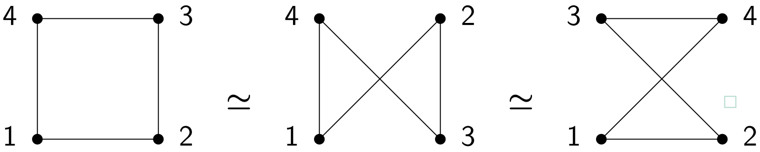
Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají stejný počet vrcholů a hran. □Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$. □Takže ani takto jsme mezi nimi nerozlišili a mohou (nemusejí!) být isomorfní. Dále tedy nezbývá, než zkoušet všechny přípustné možnosti zobrazení isomorfismu z levého grafu do pravého. □

Na levém grafu si pro ulehčení všimněme, že oba vrcholy stupně tři jsou si symetrické, proto si bez újmy na obecnosti můžeme vybrat, že vrchol označený 1 se zobrazí na $1'$. Druhý vrchol stupně tři, označený 4, se musí zobrazit na analogický vrchol druhého grafu $4'$. A zbytek již plyne snadno:

□

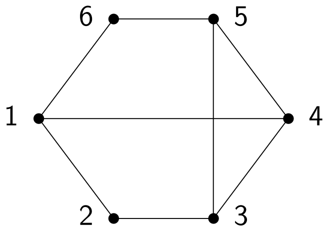
Důsledek: Stejnost grafů jako isomorfismus!

Graf G $\longleftrightarrow$ Celá *třída isomorfismu* grafu G



Je uvedený přístup, tj. zaměňování konkrétního grafu za celou jeho třídu isomorfismu, v matematice neobvyklý? Ne, například už v geometrii jste říkali „čtverec o straně 2“ či „jednotkový kruh“ a podobně, aniž jste měli na mysli konkrétní obrázek, nýbrž celou třídu všech těchto shodných objektů.

Další (pod)grafové pojmy



Definice: Mějme libovolný graf G. □

- ∗ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v* G.
- ∗ Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3. □
- ∗ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v* G. □
- ∗ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějakému úplnému grafu, říkáme *klika v* G.
- ∗ Podmnožině vrcholů $X \subseteq V(G)$, mezi kterými nevedou v G vůbec žádné hrany, říkáme *nezávislá množina* X *v* G. □
- ∗ Indukovanému podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *indukovaná kružnice v* G.

Jak poznat neisomorfní grafy

Fakt: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pokud G obsahuje podgraf F, pak H také musí obsahovat podgraf isomorfní F. □
Obecněji lze tvrdit, že počet podgrafů v grafu G isomorfních zvolenému F je vždy roven takovému počtu v grafu H. □

Příklad 9.9. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

□

Postupovat budeme jako v Příkladě 9.7, nejprve ověříme, že oba grafy mají stejně mnoho vrcholů i stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$. Pokud se však budeme snažit najít mezi nimi isomorfismus, něco stále nebude vycházet. . . □Co nám tedy v nalezení isomorfismu brání? □Podívejme se, že v druhém grafu oba vrcholy stupně tři mají svého společného souseda, tvoří s ním trojúhelník. V prvním grafu tomu tak není, první graf dokonce nemá žádný trojúhelník. Proto zadané dva grafy nejsou isomorfní. □

9.3 Souvislost, komponenty a vzdálenost

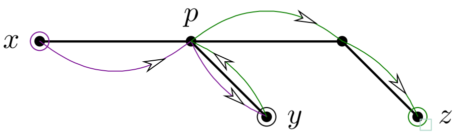
Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu. □

Tvrzení 9.11. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.* □

Důkaz.

- Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0. □
- Symetrická je také, protože cestu z x do y snadno v neorientovaném grafu obrátíme na cestu z y do x. □
- Důkaz tranzitivity však není takto triviální—□pokud vezmeme cestu z x do y a cestu z y do z, tak se tyto dvě cesty mohou protínat i jinde než v y a nelze je prostě „navázat“ na sebe.

- Zmíněný problém vidíme například zde:



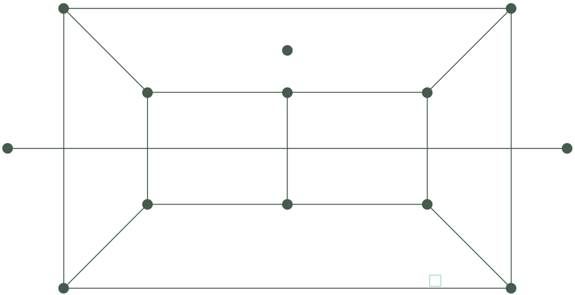
Pro důkaz tranzitivity si označme P cestu z x do y a Q cestu z y do z. Pokud označíme $P' \subseteq P$ tu část první cesty z x do prvního vrcholu p v průniku s Q (tj. $p \in V(P) \cap V(Q)$) a označíme $Q' \subseteq Q$ zbytek druhé cesty od p do z, tak $P' \cup Q'$ vždy je cestou z x do z.

$\square$

Definice 9.12. **Komponentami souvislosti** grafu G nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Tvrz. 9.11) relace $\sim$ na $V(G)$. □

Jinak se také komponentami souvislosti myslí podgrafy indukované na těchto třídách ekvivalence. □

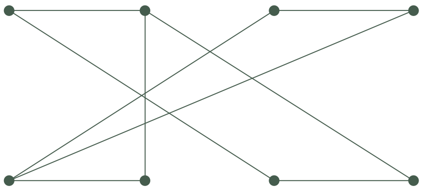
Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:

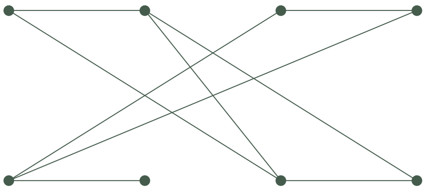


Vidíte v obrázku všechny tři komponenty? Jedna z nich je izolovaným vrcholem, druhá hranou (tj. grafem isomorfním K_2) a třetí je to zbývající.

Definice: Graf G je *souvislý* pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy G jsou spojené cestou. □

Který z těchto dvou grafů je souvislý?

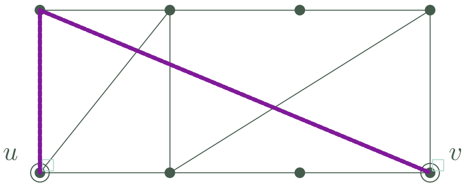




Grafová vzdálenost

Definice 9.14. **Vzdálenost** $d_G(u,v)$ dvou vrcholů u,v v grafu G je dána délkou nejkratší cesty mezi u a v v G.
Pokud cesta mezi u,v neexistuje, je vzdálenost definována $d_G(u,v)=\infty$. □

Neformálně řečeno, vzdálenost mezi u,v je rovna *nejmenšímu počtu hran*, které musíme překonat, pokud se chceme dostat z u do v. Speciálně vždy platí $d_G(u,u)=0$ a dále $d_G(u,v)=\infty$ právě když u,v patří různým komponentám souvislosti.



Fakt: V neorientovaném grafu je vzdálenost symetrická, tj. $d_G(u,v)=d_G(v,u)$.

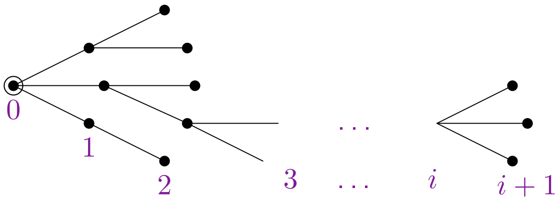
Lema 9.15. *Vzdálenost v grafech splňuje trojúhelníkovou nerovnost:*

$$\forall u,v,w \in V(G) \ : \quad d_G(u,v)+d_G(v,w) \geq d_G(u,w)\,.$$

Jednoduché zjištění vzdálenosti

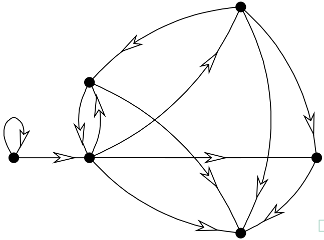
Algoritmus 9.17. Určení vzdáleností z vrcholu u grafu G.
Pro daný souvislý graf G a jeho vrchol u určíme vzdálenosti $d(u,x)$ do každého vrcholu $x \in V(G)$ následujícím postupem.

1. Na začátku položíme $d(u,u) := 0$. □
2. Pro $i = 0, 1, 2, \ldots$, přesněji dokud nejsou urč. všechny vzdál., provádíme: Pro každou hranu $xy \in E(G)$ takovou, že $d(u,x) = i$ a $d(u,y)$ je dosud neurčená, položíme $d(u,y) := i + 1$.



9.4 Základní pojmy orientovaných grafů

Požadavek explicitně vyjádřit směr hrany přirozeně vede na následující definici orientovaného grafu, ve kterém hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.



□

Definice 9.18. **Orientovaný graf** je usp. dvojice $D = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$.

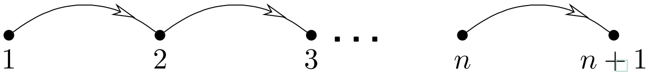
Pojmy *podgrafu* a *isomorfismu* se přirozeně přenášejí na orientované grafy. □

Značení: Hrana (u, v) (zvaná také *šipka*) v orientovaném grafu D *začíná* ve vrcholu u a *končí* ve (míří do) vrcholu v. Opačná hrana (v, u) je různá od (u, v).

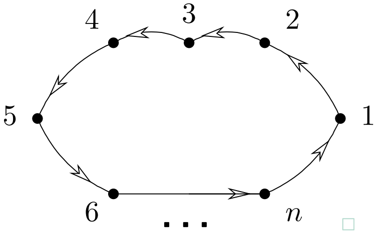
Speciálně hrana tvaru (u, u) se nazývá *orientovaná smyčka*. □

Orientované grafy odpovídají relacím, které nemusí být symetrické.

- *Orientovaná cesta* délky $n \geq 0$ je následujícím grafem na $n+1$ vrcholech



- a *orientovaná kružnice* (také *cyklus*) délky $n \geq 1$ vypadá takto:



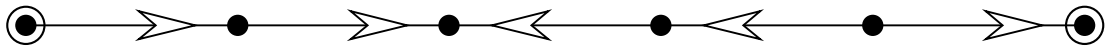
Definice: Počet hran začínajících ve vrcholu u orientovaného grafu D nazveme *výstupním stupněm* $d_D^{out}(u)$ a počet hran končících v u nazveme *vstupním stupněm* $d_D^{in}(u)$.

Součet všech výstupních stupňů je přirozeně roven součtu všech vstupních stupňů.

Souvislost na orientovaných grafech

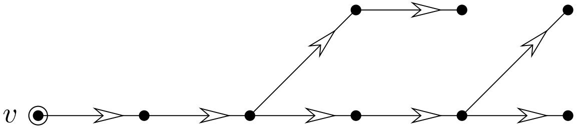
Uvedeme si odstupňovaně tři základní pohledy na orientovanou souvislost:

- Slabá souvislost. Jedná se o tradiční *souvislost na symetrizaci* grafu D (tj. po „zapomenutí“ směru šipek).

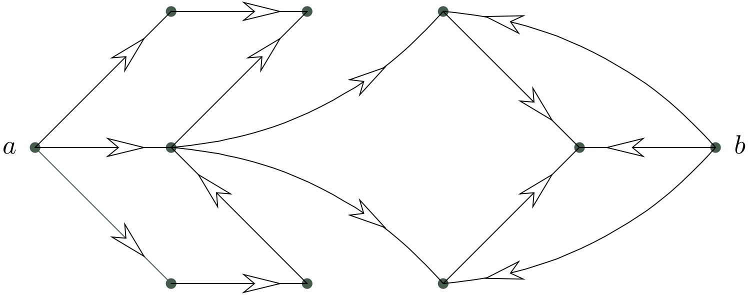


□

- Dosažitelnost (směrem „ven“). Orientovaný graf D je *dosažitelný směrem ven*, pokud v něm existuje vrchol $v \in V(D)$ takový, že každý vrchol $x \in V(D)$ je dosažitelný orientovanou cestou z v.

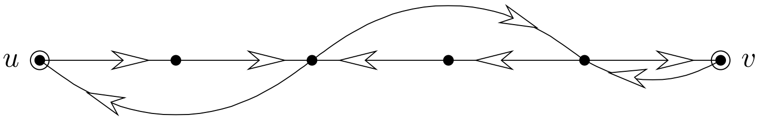


Podrobným zkoumáním následujícího obrázku zjistíme, že jeho graf není dosažitelný směrem ven, neboť chybí možnost dosáhnout vrchol b úplně vpravo. Na druhou stranu po vypuštění b je zbylý graf dosažitelný ven z vrcholu a vlevo.



Souvislost na orientovaných grafech, silná

- Silná souvislost. V nejsilnější verzi vyžadujeme současnou existenci spojení (cest) v obou směrech mezi dvojicí vrcholů.



Tvrzení 9.19. *Nechť $\approx$ je binární relace na vrcholové množině $V(D)$ orientovaného grafu D taková, že*

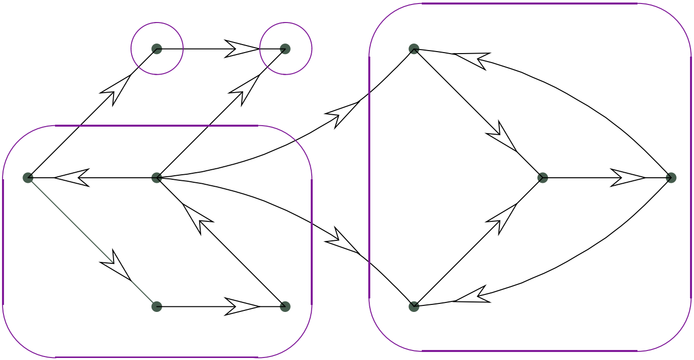
- *$u \approx v$ právě když existuje dvojice orientovaných cest – jedna z u do v a druhá z v do u v grafu D.* □

Pak $\approx$ je relace ekvivalence.

Definice 9.20. **Silné komponenty** orientovaného grafu D jsou třídy ekvivalence relace $\approx$ uvedené v Tvrzení 9.19. □

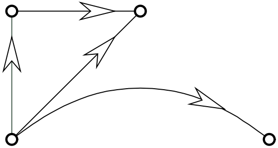
Orientovaný graf D je *silně souvislý* pokud má nejvýše jednu silnou komponentu.

Pro ilustraci si mírně upravíme dříve prezentovaný orientovaný graf tak, že bude dosažitelný z nejlevějšího vrcholu. Je výsledek silně souvislý?



Ne, na obrázku jsou vyznačené jeho 4 silné komponenty.

Zároveň uvádíme pro ilustraci obrázek kondenzace silných komponent tohoto grafu, což je acyklický orientovaný graf s vrcholy reprezentujícími zmíněné silné komponenty a směry hran mezi nimi.

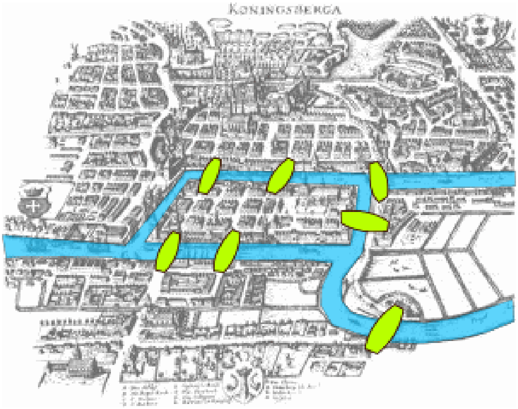


9.5 Dodatek: 7 mostů jedním tahem

Pravd. *nejstarší zaznamenaný výsledek teorie grafů* pochází od L. Eulera – slavný problém 7 mostů v Královci / Königsbergu / dnešním Kaliningradě. □

O jaký problém se 7-mi mosty se tehdy v Königsbergu 18-tého století jednalo?

Příklad 9.21. *Je možné při jedné procházce suchou nohou přejít po každém ze sedmi vyznačených mostů v Königsbergu právě jednou?*



□

Sled a tah v grafu

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)\ , \square$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Všimněte si, že sled je vlastně jakákoliv procházka po hranách grafu z u do v. Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení). □

Definice: *Tah* je sled v grafu bez opakování hran. □

Uzavřený tah je tahem, který končí ve vrcholu, ve kterém začal. *Otevřený tah* je tahem, který končí v jiném vrcholu, než ve kterém začal.

Jistě znáte dětskou hříčku s „kreslením domečku jedním tahem“... Ano, to je v podstatě totéž, co *tah* v grafu (kterým „kreslíme“ hrany našeho grafu□).

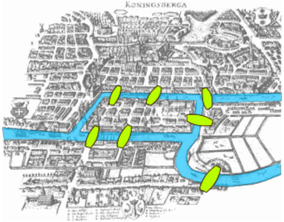
Fakt: Cesta je přesně otevřený tah bez opakování vrcholů.
Kružnice je přesně uzavřený tah bez opakování vrcholů.

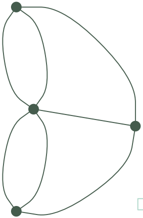
Eulerovské grafy

Slibované řešení Příkladu 9.21 od Leonharda Eulera zní takto:

Věta 9.22. *Graf G lze pokrýt (nakreslit) jedním uzavřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.* □

A jak je tomu v Příkladu 9.21? Zde nejprve nakreslíme příslušný (multi)graf, ve kterém vrcholy jsou jednotlivé kusy země oddělené vodou (tj. dva říční ostrovy a dva břehy):





□

Jaké jsou stupně vrcholů tohoto grafy? Je to $3, 3, 3, 5$, neboli všech 7 hran–mostů města Königsbergu nelze dle Věty 9.22 pokrýt jedním uzavřeným tahem (ani otevřeným).

Důsledek 9.23. *Graf G lze pokrýt (nakreslit) jedním otevřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G až na dva jsou sudého stupně.*