

Jméno:

UČO:



líst



učo



body



Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte
zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [2 body] Necht' $\Sigma = \{a, b\}$. Uvažte jazyk L nad Σ takový, že v každém slově se vzdálenosti mezi každými dvěma bezprostředně po sobě následujícími znaky b postupně zvětšují. Tedy například slova $babaab, baba, aaaaaabbabaabaaaab, \varepsilon$ do jazyka L patří a slova $babab, bbb, abaabab$ do jazyka L nepatří.

Rozhodněte, zda je L regulární, a své tvrzení dokažte. Tedy je-li vaše odpověď, že se jedná o regulární jazyk, uveďte příslušnou regulární gramatiku nebo konečný automat včetně všech formálních náležitostí. Pokud se podle vás naopak o regulární jazyk nejedná, dokažte tuto skutečnost pomocí Lemmatu o vkládání (Pumping lemma).

Jazyk L není regulární.

Důkaz. Neregularitu jazyka L dokážeme pomocí obměny tvrzení Lemmatu o vkládání.

- Necht' $n \in \mathbb{N}$ je libovolné přirozené číslo, nadále pevné.
- Zvolme slovo $w = ba^n ba^{n+1} b$. Slovo w jistě patří do jazyka L a jeho délka je $|w| = 2n + 4 \geq n$.
- Uvažme rozdělení slova w na libovolná slova $x, y, z \in \Sigma^*$ taková, že jsou splněny následující podmínky: $w = xyz$, $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$. Pak slova x, y, z musí být jednoho z následujících tvarů:

(a)

$$\begin{aligned}x &= ba^k, \\y &= a^l, \\z &= a^{n-k-l} ba^{n+1} b,\end{aligned}$$

pro vhodná čísla $k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}, k + l < n$.

Zvolme $i = 2$ a uvažme výsledné slovo xy^2z . Dosazením, použitím definice mocniny slova a algebraickými úpravami dostaneme

$$xy^2z = ba^k \cdot a^{2l} \cdot a^{n-k-l} ba^{n+1} b = ba^{n+l} ba^{n+1} b.$$

Slovo xy^2z jistě nepatří do jazyka L , protože $l > 0$, a tedy $n + l \geq n + 1$. Tedy vzdálenost mezi prvním a druhým znakem b slova w je buď stejná, nebo větší než vzdálenost mezi druhým a třetím znakem b slova w .

(b)

$$\begin{aligned}x &= \varepsilon, \\y &= ba^k, \\z &= a^{n-k} ba^{n+1} b,\end{aligned}$$

pro vhodné číslo $k \in \mathbb{N}_0, k < n$.

Zvolme $i = 3$ a uvažme slovo xy^3z . Dosazením, použitím definice mocniny slova a algebraickými úpravami dostaneme

$$xy^3z = ba^k ba^k ba^k a^{n-k} ba^{n+1} b = (ba^k)^2 ba^n ba^{n+1} b.$$

Slovo xy^3z jistě nepatří do jazyka L , protože vzdálenost mezi prvním a druhým znakem b slova w je stejná jako vzdálenost mezi druhým a třetím znakem b slova w .

Celkem tedy z obměny Lemmatu o vkládání dostáváme, že jazyk L není regulární. \square