

Jméno:

UČO:



líst

učo

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [2 body] Uvažte následující čtyři relace na slovech nad abecedou $\{a, b\}$:

$$u R_1 v \iff u \text{ je prefixem } v \text{ nebo } v \text{ je prefixem } u$$

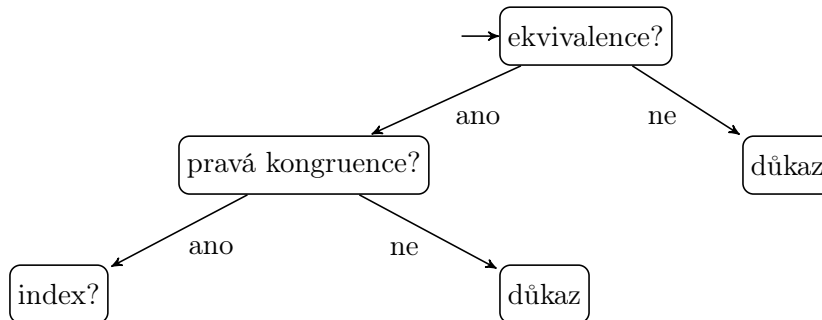
$$u R_2 v \iff (u = v = \epsilon) \vee \left(\left(\text{první písmeno } u \text{ je stejné jako první písmeno } v \right) \wedge \left(\text{poslední písmeno } u \text{ je stejné jako poslední písmeno } v \right) \right)$$

$$u R_3 v \iff (|u| < 2 \wedge |v| < 2) \vee (\text{poslední dva znaky } u \text{ jsou stejné jako poslední dva znaky } v)$$

$$u R_4 v \iff \#_a(u) - \#_b(u) = \#_a(v) - \#_b(v)$$

Pro každou z uvedených relací rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud to není ekvivalence, dokažte proč. Pokud to ekvivalence je, rozhodněte, zda jde o pravou kongruenci. Pokud se o pravou kongruenci nejedná, dokažte proč, pokud ano, určete její index. Všechny kroky náležitě zdůvodněte.

Zde uvádíme praktickou pomůcku pro lepší přehled:



• R_1

Nejedná se o ekvivalenci, protože relace není tranzitivní. Protipříkladem mohou být prázdné slovo, které je prefixem kteréhokoliv slova, a dvě další slova, z nichž ani jedno není prefixem druhého. Například necht $u = a, v = \epsilon$ a $w = b$. Platí, že v je prefixem u a zároveň v je prefixem w , ale ani jedno ze slov u a w není prefixem druhého z nich. Tedy $(u, v) \in R_1 \wedge (v, w) \in R_1$, ale $(u, w) \notin R_1$.

• R_2

Relace je ekvivalencí. Reflexivitu buď zajišťuje první podmínka $u = v = \epsilon$ nebo shodnost prvního a posledního písmene stejného slova. Symetrie a tranzitivita plyne z toho, že prázdné slovo je v relaci jen samo se sebou a pro neprázdná slova ze symetrie/transitivitu rovnosti znaků.

Také se jedná o pravou kongruenci. Pokud byla původní slova prázdná, přidáním stejného písmene na konec slova budou tato opět shodovat a splňovat druhou podmínku. Pokud slova byla v relaci, protože se shodovala v prvním a posledním znaku, nově přidané písmeno první znak neovlivní a přidaný poslední znak bude také stejný pro obě slova. Relace je tedy pravou kongruencí, jejíž index je 5 – do jedné třídy spadá prázdné slovo, do dalších všechna ostatní slova podle toho, na jaká písmena začínají a končí, jedná se tedy o třídy $[\epsilon]_{R_2}, [aa]_{R_2}, [ab]_{R_2}, [ba]_{R_2}, [bb]_{R_2}$.

Jméno:

UČO:

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo listu vyplňte
zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

- R_3

Relace R_3 je ekvivalencí, splňuje reflexivitu (srovnáváme délku slova či poslední dvě písmena se slovem samým), symetrii (konjunkce pro slova kratší než 2 je symetrická, nebo mají obě slova stejné dva poslední znaky) i tranzitivitu (podmínky disjunkce se vylučují a obě z podmínek fungují mezi více slovy tranzitivně). Nejedná se však o pravou kongruenci, jako protipříklad uvažme slova a a ε . Tato slova jsou v relaci R_3 , protože $|a| < 2$ a $|\varepsilon| < 2$, ale přidáme-li za obě slova a , výsledná slova aa a a v relaci R_3 nebudou ($|aa| \not< 2$, ani dvě poslední písmena těchto slov nejsou stejná).

- R_4

Relace R_4 je ekvivalencí, splňuje reflexivitu (rozdíl počtu znaků a a b v témže slově je stejný), symetrii (ze symetrie \Rightarrow) i tranzitivitu (rozdíl počtu a a b musí být u všech tří slov stejný). Jedná se také o pravou kongruenci, neboť k oběma slovům přidáváme suffix se stejným počtem znaků b a a (tedy rozdíl se změní u obou slov stejně). Její index není konečný, třídy rozkladu budou odpovídat možným rozdílům počtu znaků a a b , kterých je nekonečně mnoho. Formálněji, uvažme slova tvaru $w_n = a^n, n \in \mathbb{N}$. Vezměme libovolná dvě slova a^i, a^j taková, že $i \neq j$. Připojíme-li ke každému z nich slovo ε , dostaneme opět a^i, a^j , platí, že $(a^i, a^j) \notin R_4$, tedy w_i, w_j patří do různých tříd rozkladu a tedy tříd rozkladu podle R_4 je alespoň tolik, kolik přirozených čísel.