Jméno: **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

1. [2 body] Nechť K, L a R jsou jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$.
Dokažte nebo vyvraťte každé z následujících tvrzení:

a) Pokud K je konečný jazyk a L je libovolný jazyk, pak $(L \cup \text{co}-K)$ je regulární.

b) Pokud R je regulární a L není regulární, pak $(L \cdot R)$ není regulární.

c) Pokud R je regulární, pak $\{w \mid w \in R, \#_a(w) \bmod 3 = 1\}$ je regulární.

d) Pokud $(L \setminus R)^*$ není regulární, pak L není regulární nebo R není regulární.

Pokud budete potřebovat, můžete v celém příkladu využívat toho, že na přednášce a cvičeních byly ukázány některé neregulární jazyky (jejich neregularitu nemusíte znovu dokazovat). V důkazu můžete rovněž použít znalosti o uzavřenosti třídy regulárních jazyků na operace prezentované na přednášce.

---

a) **Tvrzení platí.**

Důkaz. Výraz $(L \cup \text{co}-K)$ přepíšeme pomocí De Morganových zákonů na $\text{co}-((\text{co}-L) \cap K)$. Třída konečných jazyků je uzavřena na průnik s libovolným jazykem, takže jazyk $((\text{co}-L) \cap K)$ je konečný a tedy i regulární. Regulární jazyky jsou uzavřeny na doplněk a tedy i $\text{co}-((\text{co}-L) \cap K)$ je regulární jazyk. □

Poznámka: Pro tento důkaz jsme potřebovali předpoklad, že jazyky L a K jsou nad stejnou abecedou. Kdyby nebyly, úprava pomocí De Morganových pravidel by nebyla validní. Alternativně by se pak dal přímo poskytnout protipříklad: $K = \emptyset$ nad $\Sigma_K = \{c\}$, $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ nad $\Sigma_L = \{a, b\}$.

b) **Tvrzení neplatí.**

Důkaz. Dokážeme pomocí protipříkladu:
Uvažme regulární jazyk $R = \emptyset$ a libovolný neregulární jazyk, například jazyk $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$. Jejich zřetězením vznikne jazyk $L \cdot R = \emptyset$, který je regulární, a tedy implikace neplatí. □

c) **Tvrzení platí.**

Důkaz. Uvažme jazyk $P = \Big((\{b, c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b, c\}^*)^3\Big)^* \cdot \{a\} \cdot \{b, c\}^*$. Tento jazyk je regulární, protože vznikl pomocí zřetězení, mocnin a iterací z regulárních jazyků. Pak můžeme jazyk $\{w \mid w \in R, \#_a(w) \bmod 3 = 1\}$ vyjádřit jako $R \cap P$. Takže implikaci můžeme zapsat takto:

$$R \text{ je regulární} \implies R \cap P \text{ je regulární}$$

Což platí, protože regulární jazyky jsou uzavřeny na průnik. □

Jméno: **UČO:**

list učo body

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

d) **Tvrzení platí.**

Důkaz. Uvědomme si, že se jedná o implikaci a že obměna implikace zachovává její pravdivostní hodnotu.
Tedy:

$$(L \setminus R)^* \text{ není regulární} \implies L \text{ není regulární} \lor R \text{ není regulární}$$

Obměna:

$$L \text{ je regulární} \land R \text{ je regulární} \implies (L \setminus R)^* \text{ je regulární}$$

Třída regulárních jazyků je uzavřena na rozdíl i iteraci, takže jazyk $(L \setminus R)^*$ je regulární. □