

Jméno:

UČO:



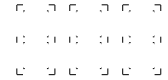
líst



učo



body



Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [2 body] Uvažte jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ takový, že v každém slově se vzdálenosti mezi každými dvěma bezprostředně po sobě následujícími znaky b postupně zvětšují. Tedy například slova $babaab, baba, aaaaaabbabaabaaaab, \varepsilon$ do jazyka L patří a slova $babab, bbb, abaabab$ do jazyka L nepatří.

Rozhodněte, zda je L bezkontextový, a své tvrzení dokažte.

Tedy je-li vaše odpověď kladná, tj. že se jedná o bezkontextový jazyk, uveďte příslušnou bezkontextovou gramatiku nebo zásobníkový automat včetně všech formálních náležitostí. Pokud se podle vás naopak o bezkontextový jazyk nejedná, dokažte tuto skutečnost pomocí *Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky* (Pumping lemma pro CFL).

Poznámka: Pro tento úkol definujeme vzdálenost mezi dvěma bezprostředně po sobě následujícími znaky b jako počet znaků různých od b mezi nimi. Například vzdálenost mezi prvním b a posledním b ve slově $baaab$ je 3.

Pomocí Lemmatu o vkládání ukážeme, že se nejedná o bezkontextový jazyk. Postupujeme těmito kroky:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.
- Zvolme $z = ba^n ba^{n+1} ba^{n+2} b$. Platí, že $z \in L$ a $|z| = 3n + 7 > n$.
- Nechť $uvwxy = z$ je libovolné rozdělení slova z takové, že $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$.
- Ukážeme, že existuje $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $uv^i wx^i y \notin L$.

Rozlišme následující případy, které mohou pro rozdělení slova z nastat:

- 1) vx obsahuje znak b . Pak právě jedno z v, x obsahuje právě jedno b , protože $|vwx| \leq n$ a mezi každými dvěma b ve slově z je minimálně n znaků a . Nechť podslovo v obsahuje znak b (pro x bychom postupovali symetricky), podslovo v je tedy tvaru $v = a^k ba^l$, kde $k, l \geq 0$. Zvolme $i = 3$, pak slovo $z' = uv^3 wx^3 y$ obsahuje tři výskyty znaku b v jeho podslově $v^3 = a^k ba^{l+k} ba^{l+k} ba^l$, vzdálenost mezi prvním a druhým a mezi druhým a třetím z těchto 3 výskytů b je stejná, tedy $z' \notin L$.
- 2) vx neobsahuje b , tedy $vx = a^k$. Pak vwx nemůže zasahovat do všech třech podslov a^n, a^{n+1}, a^{n+2} , protože $|vwx| \leq n$ a tedy určitě nemůže zasahovat zároveň do a^n i a^{n+2} , protože je mezi nimi $n + 3$ znaků.

Pokud vx nezasahuje do a^n , pak zvolíme $i = 0$.

- Pokud vx zasahuje do a^{n+1} , porušili jsme nerovnost mezi první a druhou skupinou a .
- Pokud vx nezasahuje ani do a^{n+1} , musí zasahovat do a^{n+2} a porušili jsme nerovnost mezi druhou a třetí skupinou a .

Pokud vx nezasahuje do a^{n+2} , pak zvolíme $i = 2$.

- Pokud vx zasahuje do a^{n+1} , porušili jsme nerovnost mezi druhou a třetí skupinou a .
- Pokud vx nezasahuje ani do a^{n+1} , musí zasahovat do a^n a porušili jsme nerovnost mezi první a druhou skupinou a .

Pro všechna platná rozdělení jsme tedy našli $i \in \mathbb{N}_0$, pro které slovo $uv^i wx^i y$ nepatří do jazyka L . Díky Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky tak víme, že jazyk L není bezkontextový.