

# Formální jazyk

**abeceda - slovo - jazyk**

**Abeceda** je libovolná konečná množina.

Prvky abecedy nazýváme **znaky / písmena / symboly**.

**Slovo (řetězec)** nad abecedou  $\Sigma$  je libovolná konečná posloupnost znaků této abecedy.

Prázdné posloupnosti znaků odpovídá **prázdné slovo**, označované  $\varepsilon$ .

Počet členů posloupnosti  $v$  značíme  $|v|$  a nazýváme **délkou slova**.

**Počet výskytů znaku  $a$**  ve slově  $v$  značíme  $\#_a(v)$ .

**Jazyk** nad abecedou  $\Sigma$  je libovolná množina slov nad  $\Sigma$ .

Množinu všech slov nad abecedou  $\Sigma$  značíme  $\Sigma^*$ , množinu všech neprázdných slov  $\Sigma^+$ .

Jazyky nad  $\Sigma$  jsou tedy právě podmnožiny  $\Sigma^*$ .

# Operace a relace nad slovy

Binární operace **zřetězení**, označována  $\cdot$ , která je definována předpisem:

$$u \cdot v = uv$$

Operace zřetězení je asociativní, tj.  $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$  pro libovolná slova  $u, v, w$ .

$\varepsilon$  se chová jako jednotkový prvek, tj.  $u \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot u = u$  pro libovolné slovo  $u$ .

Slovo  $u$  je **pod slovem** slova  $v$ , jestliže existují slova  $x, y$  taková, že  $v = x.u.y$ .

Pokud navíc  $x = \varepsilon$ , říkáme že slovo  $u$  je **předponou (prefixem)** slova  $v$ , což značíme  $u \preceq v$ . Je-li  $y = \varepsilon$ , nazveme  $u$  **příponou (sufixem)** slova  $v$ .

Unární operace ***i-té mocniny*** slova, která je definovaná induktivně pro každé  $i \in \mathbb{N}_0$  takto: necht'  $\Sigma$  je libovolná abeceda,  $u$  libovolné slovo nad abecedou  $\Sigma$ . Pak

- $u^0 = \varepsilon$

- $u^{i+1} = u.u^i$

# Operace nad jazyky

Nechť  $L$  je jazyk nad abecedou  $\Sigma$ ,  $K$  je jazyk nad abecedou  $\Delta$ .  
Výsledkem je vždy jazyk nad abecedou  $\Sigma \cup \Delta$ .

- Standardní množinové operace **sjednocení** ( $\cup$ ), **průnik** ( $\cap$ ) a **rozdíl** ( $\setminus$ ).
- **Zřetězením** jazyků  $L$  a  $K$  je jazyk  $L.K = \{u.v \mid u \in L, v \in K\}$ .

Platí  $\emptyset.L = L.\emptyset = \emptyset$  a  $\{\varepsilon\}.L = L.\{\varepsilon\} = L$ .

- **$i$ -tá mocnina** jazyka  $L$  definována induktivně pro  $i \in \mathbb{N}_0$ :

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{i+1} = L.L^i$$

$$\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$$

$$\emptyset^i = \emptyset \text{ pro libovolné } i \in \mathbb{N}$$

$$\{\varepsilon\}^j = \{\varepsilon\} \text{ pro libovolné } j \in \mathbb{N}_0$$



- **Iterace** jazyka  $L$  je jazyk  $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$ .

$$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$$

- **Pozitivní iterace** jazyka  $L$  je jazyk  $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$ .

$$\emptyset^+ = \emptyset.$$

■ **Doplňěk** jazyka  $L$  je jazyk  $co-L = \Sigma^* \setminus L$ .

■ **Zrcadlovým obrazem** slova  $w = a_1 \dots a_n$  nazýváme slovo  $w^R = a_n \dots a_1$  ( $\varepsilon^R = \varepsilon$ ).

**Zrcadlový obraz jazyka**  $L$  definujeme  $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ .

Nechť  $\mathcal{L}$  je třída jazyků a  $o$  je  $n$ -ární operace na jazycích. Řekneme, že  $\mathcal{L}$  je **uzavřená na**  $o$ , pokud pro libovolné jazyky  $L_1, \dots, L_n$  patřící do  $\mathcal{L}$  platí, že také jazyk  $o(L_1, \dots, L_n)$  patří do  $\mathcal{L}$ .

# Aplikace

# Konečná reprezentace jazyka

- potřeba konečné reprezentace
- co je konečná reprezentace
- automaty a gramatiky
- existuje konečná reprezentace pro každý jazyk?
- jaké vlastnosti mají jazyky, které jsou konečně reprezentovatelné?

# Gramatika

**Gramatika** je popis jazyka pomocí pravidel, podle kterých se vytvářejí všechna slova daného jazyka.

<věta> → <podmětná část><přísudková část>

<podmětná část> → <podstatné jméno>

<podstatné jméno> → JANA

<přísudková část> → <sloveso><předmětová část>

<sloveso> → ČTE

<předmětová část> → <podstatné jméno>

<podstatné jméno> → KNIHU

Zadání syntaxe vyšších programovacích jazyků — Backus-Naurova normální forma (BNF)

**Definice.** Gramatika  $\mathcal{G}$  je čtveřice  $(N, \Sigma, P, S)$ , kde

- $N$  je neprázdná konečná množina **neterminálních symbolů** (stručněji **neterminálů**),
- $\Sigma$  je konečná množina **terminálních symbolů (terminálů)** taková, že  $N \cap \Sigma = \emptyset$ . Množinu **všech symbolů** gramatiky definujeme jako  $V = N \cup \Sigma$ ,
- $P \subseteq V^*NV^* \times V^*$  je konečná množina **pravidel**. Pravidlo  $(\alpha, \beta)$  obvykle zapisujeme ve tvaru  $\alpha \rightarrow \beta$  (a čteme jako „ $\alpha$  přepiš na  $\beta$ “),
- $S \in N$  je speciální **počáteční neterminál** (nazývaný také **kořen gramatiky**).

# Příklad



Gramatika  $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$  určuje

- relaci  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$  **přímého odvození** na množině  $V^*$

$\gamma \Rightarrow_{\mathcal{G}} \delta$  právě když existuje pravidlo  $\alpha \rightarrow \beta \in P$  a slova  $\eta, \rho \in V^*$  taková, že  $\gamma = \eta\alpha\rho$  a  $\delta = \eta\beta\rho$ .

Používá se i označení **krok odvození**.

■ relaci  $\Rightarrow_G^k$  **odvození v  $k$  krocích** pro  $k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow_G^0$  je identická relace

$$\Rightarrow_G^{k+1} = \Rightarrow_G^k \circ \Rightarrow_G$$

- relaci  $\overset{\leq k}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$  **odvození v nejvýše  $k$  krocích** pro  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\overset{\leq k}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i=0}^k \overset{i}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$$

- relaci  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^*$  **odvození** a relaci  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^+$  **netriviálního odvození**

$$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \overset{i}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} \quad \Rightarrow_{\mathcal{G}}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{i}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$$

Relace  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^*$  je reflexivní a tranzitivní uzávěr relace  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$ .

Relace  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^+$  je tranzitivní uzávěr relace  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$ .

**Větná forma** gramatiky  $\mathcal{G}$  je každý řetěz z množiny  $V^*$ , který lze odvodit z počátečního neterminálu gramatiky.

**Věta** gramatiky  $\mathcal{G}$  je každá větná forma, která obsahuje pouze terminály.

**Jazyk generovaný gramatikou**  $\mathcal{G}$  je množina  $L(\mathcal{G})$  všech vět gramatiky

$$L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w\}.$$

Gramatiky  $\mathcal{G}_1$  a  $\mathcal{G}_2$  nazveme **jazykově ekvivalentní**, právě když generují tentýž jazyk, tj.  $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$ .

# Konvence

# Příklad

$$\mathcal{G} = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow abS \\ S \rightarrow bX \\ bbX \rightarrow babS \\ bbX \rightarrow \varepsilon \end{array} \right\}$$

# Příklad

$$\mathcal{G} = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow abS \\ S \rightarrow bX \\ bbX \rightarrow babS \\ bbX \rightarrow \varepsilon \end{array} \right\}$$

# Chomského hierarchie gramatik

Klasifikace gramatik podle tvaru přepisovacích pravidel:

- typ 0** pravidla v obecném tvaru (**frázové gramatiky**)
- typ 1** pro každé pravidlo  $\alpha \rightarrow \beta$  platí  $|\alpha| \leq |\beta|$  s eventuální výjimkou pravidla  $S \rightarrow \varepsilon$ , pokud se  $S$  nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla (**kontextové gramatiky**)
- typ 2** každé pravidlo je tvaru  $A \rightarrow \alpha$ , kde  $|\alpha| \geq 1$ , s eventuální výjimkou pravidla  $S \rightarrow \varepsilon$ , pokud se  $S$  nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla (**bezkontextové gramatiky (bez  $\varepsilon$ -pravidel)**)
- typ 3** každé pravidlo je tvaru  $A \rightarrow aB$  nebo  $A \rightarrow a$  s eventuální výjimkou pravidla  $S \rightarrow \varepsilon$ , pokud se  $S$  nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla (**regulární gramatiky**)



# Chomského hierarchie jazyků

Hierarchie gramatik určuje hierarchii jazyků.

**Jazyk  $L$  je typu 0 (rekursivně spočetný)**, pokud existuje gramatika  $\mathcal{G}$  typu 0 taková, že  $L(\mathcal{G}) = L$ .

Analogicky: **kontextový, bezkontextový, regulární**

$\mathcal{L}_0$  třída všech rekursivně spočetných jazyků

$\mathcal{L}_1$  třída všech kontextových jazyků

$\mathcal{L}_2$  třída všech bezkontextových jazyků

$\mathcal{L}_3$  třída všech regulárních jazyků

$$\mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_3$$

*(Dokážeme později.)*

**Věta.** Nad abecedou  $\{a\}$  existuje jazyk, který není typu 0.

### **Důkaz.**

Množina všech slov nad abecedou  $\{a\}$  je spočetně nekonečná.

Množina všech jazyků nad touto abecedou má proto mohutnost  $2^{\aleph_0}$  (je tedy nespočetná).

Gramatik typu 0 nad abecedou  $\{a\}$  je pouze spočetně mnoho:

- buď  $M$  libovolná, ale pevně zvolená spočetná množina
- b.ú.n.o. každá gramatika má neterminály z  $M$
- každá gramatika je slovo nad abecedou

$$M \cup \{a, \rightarrow, \varepsilon, \underline{,}, \underline{)}, \underline{\{,}, \underline{\}}, \underline{,}\}$$

- všech slov délky  $i$  nad touto abecedou je  $\aleph_0^i = \aleph_0$  pro lib.  $i \in \mathbb{N}$
- **všech** slov nad touto abecedou je tedy spočetně mnoho  
(*sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné*)

