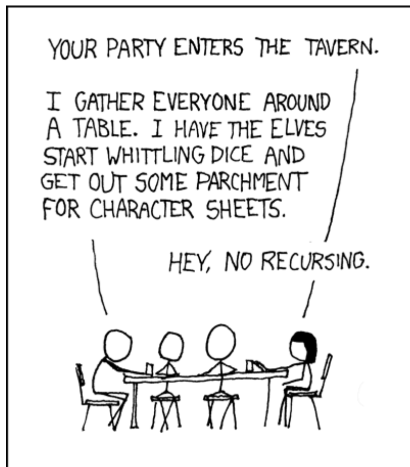
Rekurze

IB111 Základy programování
Radek Pelánek

2018

xkcd: Tabletop Roleplaying



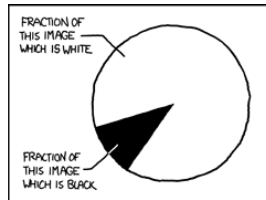
https://xkcd.com/244/

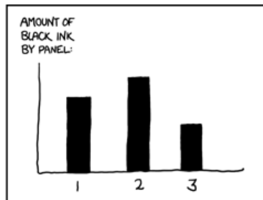
To iterate is human, to recurse divine. (L. Peter Deutsch)

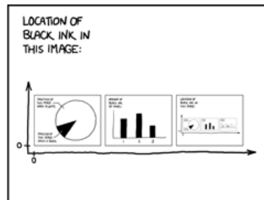
Rekurze

- použití funkce při její vlastní definici
- volání sebe sama (s jinými parametry)

Sebereference







https://xkcd.com/688/

Sebereferenční test

1. Které písmeno není správnou odpovědí na žádnou otázku:
   (A) A (B) C (C) B
2. Odpověď na 3. otázku je:
   (A) stejná jako na 1. otázku (B) stejná jako na 2. otázku (C) jiná než odpovědi na 1. a 2. otázku
3. První otázka, na kterou je odpověď A, je otázka:
   (A) 1 (B) 2 (C) 3

Piráti

- 5 pirátů si dělí poklad: 100 mincí
- nejstarší pirát navrhne rozdělení, následuje hlasování
- alespoň polovina hlasů $\Rightarrow$ rozděleno, hotovo
- jinak $\Rightarrow$ navrhující pirát zabit, pokračuje druhý nejstarší (a tak dále) (rekurze!)
- priority
  1. přežít
  2. mít co nejvíce mincí
  3. zabít co nejvíc ostatních pirátů

složitější varianty: 6 pirátů a 1 mince, 300 pirátů a 100 mincí

Rekurze a sebereference

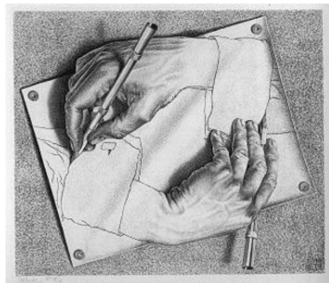
Rekurze a sebereference – klíčové myšlenky v informatice

některé souvislosti:

- matematická indukce
- funkcionální programování
- rekurzivní datové struktury (např. stromy)
- gramatiky
- logika, neúplnost
- nerozhodnutelnost, diagonalizace

Rekurze a sebereference

… nejen v informatice



M. C. Escher; Drawing Hands, 1948

Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid; Douglas Hofstadter

Rekurze a úvodní programování

- uvedené aplikace rekurze a sebereference často poměrně náročné
- hodí se **pořádně** pochopit rekurzi na úrovni jednoduchých programů
- bezprostřední návaznost – Algoritmy a datové struktury

Faktoriál

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n = 1 \\ n \cdot f(n-1) & \text{pokud } n > 1 \end{cases}$$

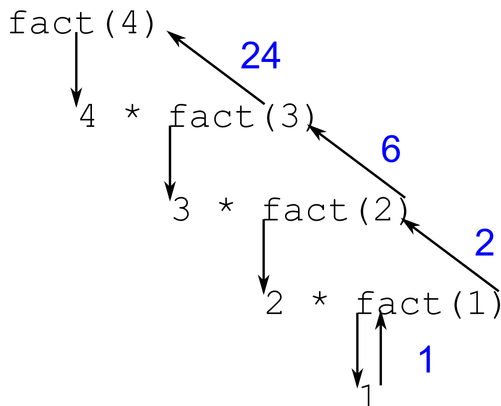
Faktoriál iterativně (pomocí cyklu)

```
def fact(n):
    f = 1
    for i in range(1, n+1):
        f = f * i
    return f
```

Faktoriál rekurzivně

```
def fact(n):
    if n == 1: return 1
    else: return n * fact(n-1)
```

Faktoriál rekurzivně – ilustrace výpočtu



Příklad: výpis čísel

Vymyslete funkci, která:

- vypíše čísla od 1 do N
- pomocí rekurze – bez použití cyklů `for`, `while`

Příklad: výpis čísel

Vymyslete funkci, která:

- vypíše čísla od 1 do N
- pomocí rekurze – bez použití cyklů `for`, `while`

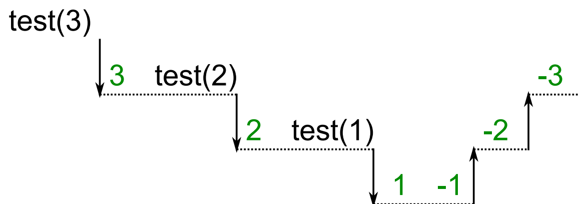
```
def sequence(n):
    if n > 1:
        sequence(n-1)
    print(n)
```

Co udělá tento program?

```
def test(n):
    print(n)
    if n > 1:
        test(n-1)
    print(-n)

test(5)
```

Ilustrace zanořování



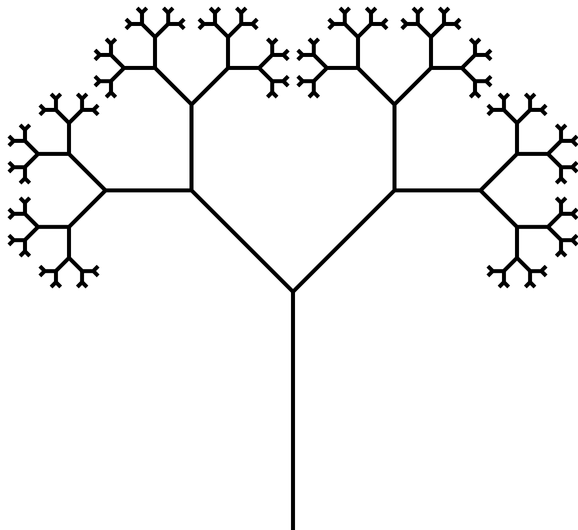
Nepřímá rekurze

```
def even(n):
    print("even", n)
    odd(n-1)

def odd(n):
    print("odd", n)
    if n > 1:
        even(n-1)

even(10)
```

Rekurzivní stromeček



Rekurzivní stromeček

nakreslit stromeček znamená:

- udělat stonek
- nakreslit dva menší stromečky (pootočené)
- vrátit se na původní pozici

Stromeček želví grafikou

```
def tree(length):
    forward(length)
    if length > 10:
        left(45)
        tree(0.6 * length)
        right(90)
        tree(0.6 * length)
        left(45)
    back(length)
```

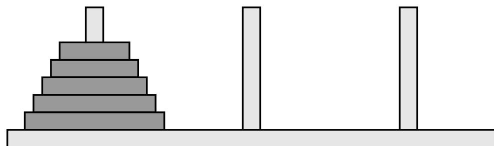
Podoby rekurze, odstranění rekurze

- koncová rekurze (tail recursion)
  - rekurzivní volání je poslední příkaz funkce
  - lze vesměs přímočaře nahradit cyklem
- „plná“ rekurze
  - „zanořující se“ volání
  - např. stromeček
  - lze přepsat bez použití rekurze za použití zásobníku
  - rekurzivní podoba často výrazně elegantnější

Hanojské věže aneb O konci světa

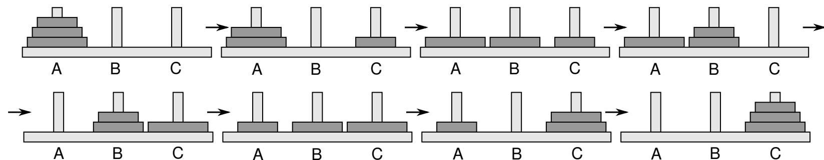
- video:
  - https://www.fi.muni.cz/~xpelanek/IB111/hanojske_veze/
  - https://www.youtube.com/watch?v=8yaoED8jc8Y
- klášter kdesi vysoko v horách u města Hanoj
- velká místnost se třemi vyznačenými místy
- 64 různě velkých zlatých disků
- podle věštby mají mniši přesouvat disky z prvního na třetí místo
- a až to dokončí ...

Hanojské věže: pravidla



- N disků různých velikostí naskládaných na sobě
- vždy může být jen menší disk položen na větším
- možnost přesunout jeden horní disk na jiný kolíček
- cíl: přesunout vše z prvního na třetí

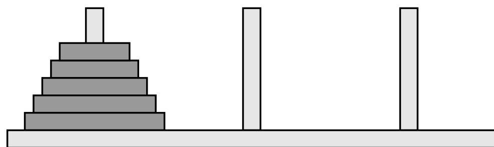
Hanojské věže: řešení



Hanojské věže: výstup programu

```
>>> solve(3, "A", "B", "C")
A -> B
A -> C
B -> C
A -> B
C -> A
C -> B
A -> B
```

Hanojské věže: rekurzivní řešení



```
def solve(n, start, end, auxiliary):
    if n == 1:
        print(start, "->", end)
    else:
        solve(n-1, start, auxiliary, end)
        solve(1, start, end, auxiliary)
        solve(n-1, auxiliary, end, start)
```

Řešení včetně vypisování stavu

```
  *
 ***
*****
-------------------


 ***
*****           *
-------------------



*****   ***     *
-------------------


         *
*****   ***
-------------------


         *
        ***   *****
-------------------



  *     ***   *****
-------------------
```

Stav úlohy, reprezentace

- stav úlohy = rozmístění disků na kolících
- disky na kolíku A $\rightarrow$ seznam
- celkový stav:
  - 3 proměnné, v každé seznam – nepěkné
  - *seznam seznamů*, kolíky interně značíme 0, 1, 2
- příklad stavu (6 disků): [[4], [5, 2, 1], [6, 3]]

Řešení včetně vypisování stavu

```
def solve(n, start, end, aux, state):
  if n==1:
    disc = state[start].pop()
    state[end].append(disc)
    print_state(state)
  else:
    solve(n-1, start, aux, end, state)
    solve(1, start, end, aux, state)
    solve(n-1, aux, end, start, state)

def solve_hanoi(n):
  state = [list(range(n,0,-1)), [], []]
  print_state(state)
  solve(n, 0, 2, 1, state)
```

Vypisování stavu – jednoduše

```
def print_state(state):
    print(state)
    print("--")

def print_state(state):
    for i in range(3):
        print("Peg", chr(ord('A')+i), state[i])
    print("--")
```

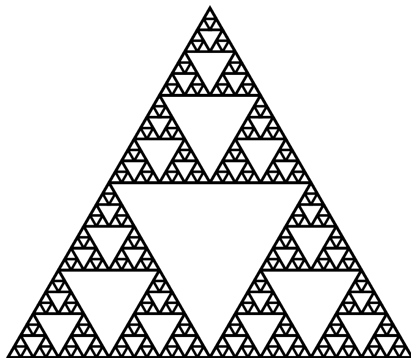
Vypisování stavu – textová grafika

```
def print_state(state):
  n = sum([len(s) for s in state])
  for y in range(n+1):
    line = ""
    for peg in range(3):
      for x in range(-n+1, n):
        if len(state[peg]) > n-y and
           abs(x) < state[peg][n-y]:
          line += "*"
        else:
          line += " "
      line += "  "
    print(line)
  print("-"*(n*6+1))
```

Sierpińského fraktál

rekurzivně definovaný geometrický útvar

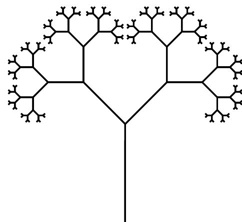
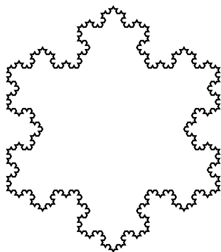
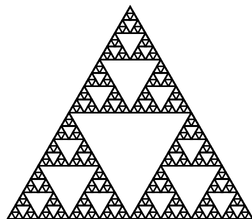
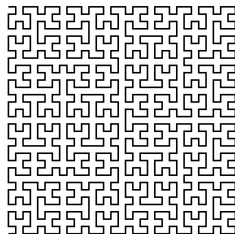
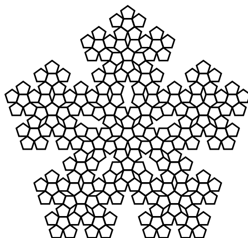
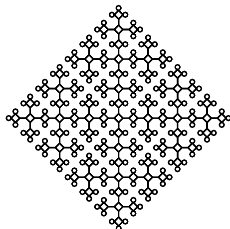
Sierpińského fraktál



Sierpińského fraktál: kód

```
def sierpinski(n, length):
    if n == 1:
        triangle(length)
    else:
        for i in range(3):
            sierpinski(n - 1, length)
            forward((2 ** (n - 1)) * length)
            right(120)
```

Další podobné fraktály

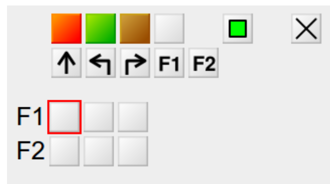







Robotanik

- `tutor.fi.muni.cz`, úloha Robotanik
- jednoduché „grafické“ programování robota
- těžší příklady založeny na rekurzi
- vizualizace průběhu „výpočtu“, zanořování a vynořování z rekurze

Robotanik – Kurz počítání

rekurze jako „paměť"



Robotanik

Strom kytek 2

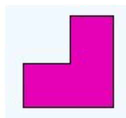
Rychlost animace:
1 2 3 4 5

F1 F2 F3

F1
F2
F3

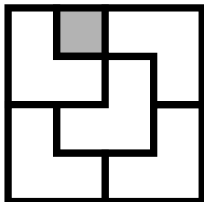
Zobrazit zásobník
Klávesové zkratky
Přesun více příkazů

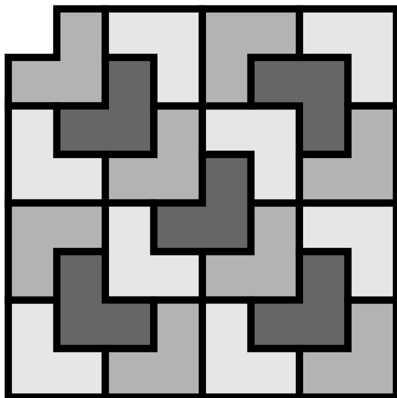
Pokrývání plochy L kostičkami



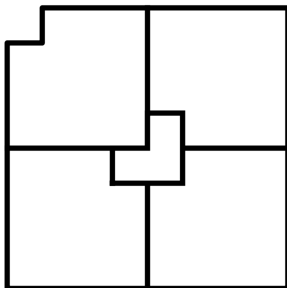
- mřížka 8×8 s chybějícím levým horním polem
- úkol: pokrýt zbývající políčka pomocí L kostiček
- rozšíření:
    - rozměr $2^n \times 2^n$
    - chybějící libovolné pole
    - obarvení 3 barvami, aby sousedi byli různí

Ukázky řešení





Řešení



- rozdělit na čtvrtiny
- umístit jednu kostku
- rekurzivně aplikovat řešení na jednotlivé části

Kahoot

Kahoot: program A

```
def magic(n):
    return n + magic(n)
```

Kahoot: program B

```
def test(n):
    if n > 0:
        print(n, end="")
        test(n-1)
        print(n, end="")

test(3)
```

Přemýšlení o funkcích (rekurzivních obzvlášť)

obecně pro funkce:

- ujasnit vstupně-výstupní chování než začnu psát funkci

rekurzivní funkce navíc:

- při psaní funkce předpokládám, že mám již funkci hotovou
- problém převedu na řešení menšího problému (který již umím vyřešit)
- ošetřím „koncovou podmínku“

Otočení řetězce rekurzivně

```
>>> reverse("star wars")
'sraw rats'
```

Otočení řetězce rekurzivně

```
>>> reverse("star wars")
'sraw rats'
```

```
def reverse(s):
    if len(s) <= 1: return s
    return reverse(s[1:]) + s[0]
```

Kontrolní otázka

Co dělá následující funkce (vstup je řetězec)?

```
def magic(s):
    if len(s) <= 1: return s
    return magic(s[1:])
```

Seznam vnořených seznamů

Seznam čísel a vnořených seznamů čísel (SČAVSČ) je seznam, který obsahuje čísla nebo SČAVSČ.

rekurzivní datová struktura

```
scavsc = [[2, 8], 4, [3, [1, 7], 6], [2, 4]]
```

Jak vypočítat součet všech čísel?

Součet vnořených seznamů

```
def nested_list_sum(alist):
    total = 0
    for x in alist:
        if isinstance(x, list):
            total += nested_list_sum(x)
        else:
            total += x
    return total
```

Příklady použití rekurze v informatice

- Euclidův algoritmus – NSD
- vyhledávání opakovaným půlením
- řadicí algoritmy (quicksort, mergesort)
- generování permutací, kombinací
- fraktály
- prohledávání grafu do hloubky
- gramatiky

Euklidův algoritmus rekurzivně

```
def nsd(a,b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        return nsd(b, a % b)
```

Vyhledávání opakovaným půlením

- hra na 20 otázek
- hledání v seznamu
- hledání v binárním stromu

Vyhledávání: rekurzivní varianta

```
def binary_search(value, alist, lower, upper):
  if lower > upper:
    return False
  mid = (lower + upper) // 2
  if alist[mid] < value:
    return binary_search(value, alist, mid+1, upper)
  elif alist[mid] > value:
    return binary_search(value, alist, lower, mid-1)
  return True
```

Řadicí algoritmy

- quicksort
  - vyber pivota
  - rozděl na menší a větší
  - zavolej quicksort na podčásti
- mergesort
  - rozděl na polovinu
  - každou polovinu seřaď pomocí mergesort
  - spoj obě poloviny

Generování permutací, kombinací

- permutace množiny = všechna možná pořadí
  - příklad: permutace množiny $\{1, 2, 3, 4\}$
  - jak je vypsat systematicky?
  - jak využít rekurzi?
- k-prvkové kombinace n-prvkové množiny = všechny možné výběry k prvků
  - příklad: 3-prvkové kombinace množiny $\{A, B, C, D, E\}$
  - jak je vypsat systematicky?
  - jak využít rekurzi?

Kombinace

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

```
def combinations(alist, k):
    if k == 0: return [[]]
    if len(alist) < k: return []
    output = []
    for comb in combinations(alist[1:], k-1):
        comb.append(alist[0])
        output.append(comb)
    output.extend(combinations(alist[1:], k))
    return output
```

Nevhodné použití rekurze

- ne každé použití rekurze je efektivní
- Fibonacciho posloupnost (králíci):

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

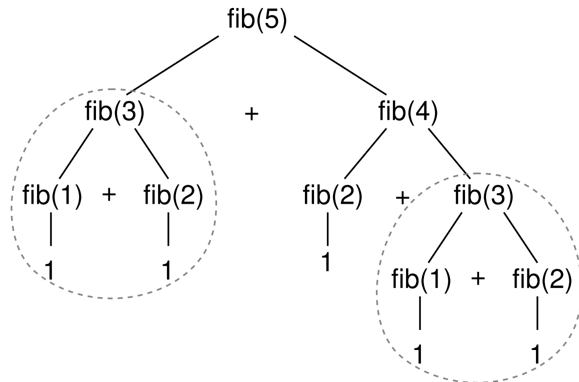
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
- **Vi Hart**: Doodling in Math: Spirals, Fibonacci, and Being a Plant

Fibonacciho posloupnost: rekurzivně

```
def fib(n):
    if n <= 2: return 1
    else: return fib(n-1) + fib(n-2)
```

Fibonacciho posloupnost: rekurzivní výpočet

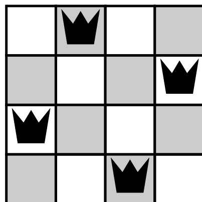


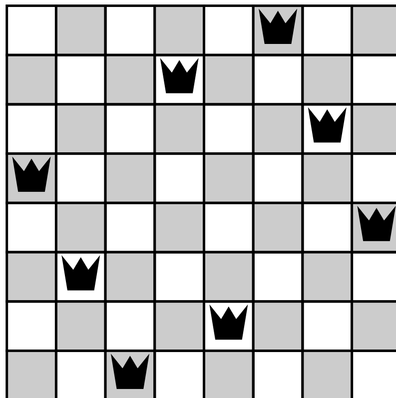
Problém N dam

- šachovnice $N \times N$
- rozestavit N dam tak, aby se vzájemně neohrožovaly
- zkuste pro $N = 4$

pozn. speciální případ „problému splnění podmínek“

Problém N dam – řešení

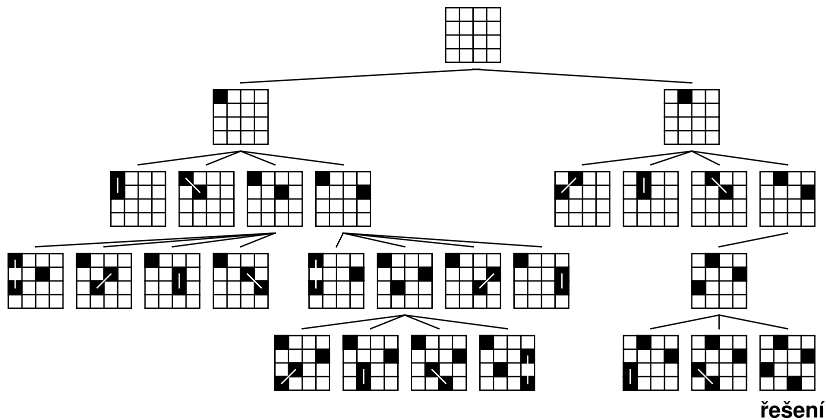




Problém N dam – algoritmus

- ilustrace algoritmu backtracking
- hrubá síla, ale „chytře“
- začneme s prázdným plánem, systematicky zkoušíme umisťovat dámy
- pokud najdeme kolizi, vracíme se a zkoušíme jinou možnost
- přirozený rekurzivní zápis

Problém N dam – backtracking



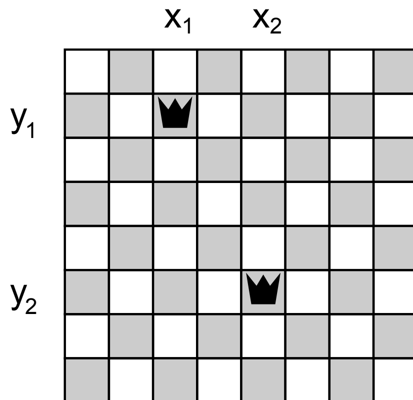
Problém N dam – reprezentace stavu

- pro každé pole si pamatujeme, zda na něm je/není dáma
  - dvourozměrný seznam True/False
- pro každou dámu si pamatujeme její souřadnice
  - seznam dvojic x_i, y_i
- pro každý řádek si pamatujeme, v kterém sloupci je dáma
  - seznam čísel x_i
  - nejvýhodnější reprezentace

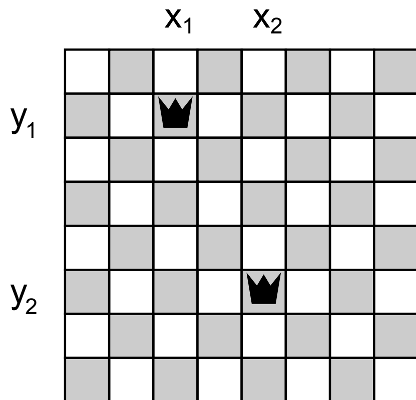
Problém N dam – řešení

```
def solve_queens(n, state):
    if len(state) == n:
        output(state)
        return True
    else:
        for i in range(n):
            state.append(i)
            if check_queens(state):
                if solve_queens(n, state): return True
            state.pop()
    return False
```

Kdy se ohrožují dvě dámy?



Kdy se ohrožují dvě dámy?



$$x_1 = x_2$$
$$y_1 = y_2$$
$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$
$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Problém N dam – řešení

```
def output(state):
    for y in range(len(state)):
        for x in range(len(state)):
            if state[y]==x: print("X", end=" ")
            else: print(".", end=" ")
        print()
    print()

def check_queens(state):
    for y1 in range(len(state)):
        x1 = state[y1]
        for y2 in range(y1+1, len(state)):
            x2 = state[y2]
            if x1 == x2 or x1-y1 == x2-y2 or\
               x1+y1 == x2+y2:
                return False
```

Backtracking – další příklady použití

- mnoho logických úloh:
  - Sudoku a podobné úlohy
  - algebrogramy (SEND + MORE = MONEY)
- optimalizační problémy (např. rozvrhování, plánování)
- obecný „problém splnění podmínek“

Shrnutí

- rekurze: využití rekurze pro definici sebe sama
- logické úlohy: Hanojské věže, L kostičky, dámy na šachovnici
- fraktály
- aplikace v programování: vyhledávání, řazení, prohledávání grafu
- klíčová myšlenka v informatice

nezapomeňte na piráty