



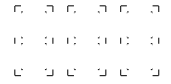
list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvažme systém  $\mathcal{L}(\neg, \vee)$  výrokové logiky, obsahující jen negaci a disjunkci.

**Příklad 1**

Definujte, co je formule systému  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte, co je valuace (výrokových proměnných).

Definujte rozšíření valuace z výrokových proměnných na všechny formule systému  $\mathcal{L}$ .

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \emptyset$  s rovností. O každé z následujících formulí rozhodněte, ve kterých realizacích jazyka  $\mathcal{L}$  platí (tj. např. v každé / v žádné / právě v těch s  $n$ -prvkovým nosičem (pro vhodné  $n \in \mathbb{N}$ ) apod.):

**Příklad 2**

**8 bodů**

a)  $\forall x(x = x)$ ;

b)  $\forall x \forall y(x = y)$ ;

c)  $\forall x \exists y(x = y)$ ;

d)  $\exists x \forall y(x = y)$ .

Dejte příklad formulí  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  systému  $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$  výrokové logiky takových, že všechny jsou vzájemně ekvivalentní, každá obsahuje právě jeden výskyt binární spojky, a to každá jiné spojky, a pro každé  $i \in \{0, 1, 2\}$  formule  $\varphi_i$  obsahuje právě  $i$  výskytů negace.

**Příklad 3**

**10 bodů**

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{+, \cdot, P\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 4**  
30 bodů

symbol	typ	arita
+	funkční	2
·	funkční	2
$P$	predikátový	1

Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde:

nosičem je množina  $\mathbb{Q}^+$  všech kladných racionálních čísel;

+ se realizuje jako sčítání;

· se realizuje jako násobení;

$P$  se realizuje jako „je celé číslo“, tj.  $P_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}^+$ .

Zadejte formuli  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$\mathcal{M} \models \varphi[e]$ , právě když jmenovatel (základního tvaru) čísla  $e(x)$  je roven šesti.

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Jsou dány jazyky  $\mathcal{L}_1 = \{f\}$  a  $\mathcal{L}_2 = \{f, P\}$  s rovnostmi, kde  $f$  je unární funkční symbol a  $P$  je unární predikátový symbol. Uvažme následující teorii  $T$  jazyka  $\mathcal{L}_2$ :

**Příklad 5**  
**36 bodů**

$$T = \{\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall u (u = x \vee u = y \vee u = z)), P(x) \leftrightarrow \neg P(f(x))\}.$$

- Dokažte, že teorie  $T$  není úplná.
- Dejte příklad konečné teorie  $S$  jazyka  $\mathcal{L}_1$  tak, aby teorie  $T$  byla jejím konzervativním rozšířením.
- Je teorie  $S$  úplná? Správnost své odpovědi zdůvodněte.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{f\}$  s rovnostmi, kde  $f$  je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$ , jejíž modely jsou právě ty realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ , kde každé individuum má v zobrazení  $f_{\mathcal{M}}$ :

- konečně mnoho vzorů;
- nekonečně mnoho vzorů.

**Příklad 6**  
26 bodů

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $T$  je teorie jazyka  $\mathcal{L}$  predikátové logiky, který obsahuje unární predikátový symbol  $P$  a konstantu  $c$ . Nechť  $\mathcal{M}$  je kanonická struktura teorie  $T$  a označme  $M$  její nosič. Dále uvažme množinu  $A = \{t \in M: T \not\vdash \neg P(t)\}$ . Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že  $A = P_{\mathcal{M}}$ , pokud dále víme, že teorie  $T$  je:

- bezesporná;
- bezesporná a henkinovská;
- úplná.

**Příklad 7**  
30 bodů