

**Zkoušky z předmětu MA007**  
**Matematická logika**

## Obsah

<b>Podzim 2017</b>	
1. termín	3
2. termín	8
3. termín	13
4. termín	18
<b>Podzim 2016</b>	
1. termín	23
2. termín	28
3. termín	33
4. termín	37
<b>Podzim 2015</b>	
1. termín	41
2. termín	46
3. termín	50
4. termín	55
<b>Podzim 2014</b>	
1. termín	60
2. termín	65
3. termín	70
4. termín	75



list

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvažujme Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky.

**Příklad 1**

Uveďte odvozovací pravidlo modus ponens.

**20 bodů**

Definujte, co je důkaz formule (nemusíte uvádět, jak vypadají schémata axiomů).

Definujte, kdy je odvozovací systém korektní.

Definujte, kdy je odvozovací systém úplný.

Je Lukasiewiczův odvozovací systém korektní? Je úplný?

Jsou dány jazyky  $\mathcal{L} = \{Q\}$  a  $\mathcal{L}' = \{Q, f, c\}$  bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 2****14 bodů**

symbol	typ	arita
$Q$	predikátový	4
$f$	funkční	2
$c$	funkční	0

Zadejte nějakou konečnou teorii  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$  tak, aby teorie  $T' = \{Q(x, c, f(x, x), f(x, c))\}$  jazyka  $\mathcal{L}'$  byla jejím konzervativním rozšířením.

Najděte co nejkratší formuli  $\varphi$  systému  $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$  výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli  $(\neg(((A \vee B) \rightarrow C) \vee \neg A) \vee (\neg A \wedge C))$ .

**Příklad 3****10 bodů**

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{D, f\}$  bez rovnosti, kde  $D$  je binární predikátový symbol a  $f$  je unární funkční symbol. Realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  nazveme *pěknou*, právě když splňuje obě následující podmínky:

nosičem je množina  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  všech přirozených čísel;

$D$  se realizuje jako dělitelnost, tj.  $D_{\mathcal{M}} = \{(n, nk) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ .

Zadejte uzavřenou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každou pěknou realizaci  $\mathcal{M}$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí } f_{\mathcal{M}}(n) = n^2.$$

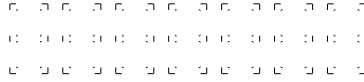
**Příklad 4**  
40 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

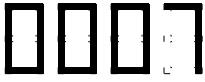
Uvažme jazyky  $\mathcal{L}_1 = \{f\}$  a  $\mathcal{L}_2 = \{f, g\}$  s rovnostmi, kde oba symboly jsou unární funkční. Dále uvažme teorii

**Příklad 5**  
**34 bodů**

$$T = \{\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall u (u = x \vee u = y \vee u = z)), f(x) = f(y) \rightarrow x = y\}.$$

- a) Intuitivně vysvětlete význam obou formulí.  
 b) Dokažte, že teorie  $T$  není úplná nad jazykem  $\mathcal{L}_1$ .  
 c) Dejte příklad formule  $\psi$  jazyka  $\mathcal{L}_1$  tak, aby teorie  $U = T \cup \{\psi\}$  byla úplná nad jazykem  $\mathcal{L}_1$ . Platí při vaší volbě formule  $\psi$ , že teorie  $U \cup U_{f/g}$  je úplná nad jazykem  $\mathcal{L}_2$ ? Lze zvolit formuli  $\psi$  i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Své odpovědi zdůvodněte.

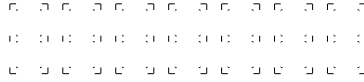
(Značením  $U_{f/g}$  rozumíme teorii, která vznikne z teorie  $U$  nahrazením všech výskytů symbolu  $f$  symbolem  $g$  ve všech jejích formulích.)



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{f, g\}$  s rovnostmi, kde oba symboly jsou funkční s aritami po řadě 1 a 3. Nechť pro term  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$  značí  $|t|$  jeho délku (tj. celkový počet znaků) a dále nechť  $\#_f(t)$ , resp.  $\#_g(t)$  značí počet symbolů  $f$ , resp.  $g$  v termu  $t$ . Zformulujte všeobecně platnou závislost  $|t|$  na  $\#_f(t)$  a  $\#_g(t)$  (tj. exaktně řečeno: najděte funkci  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takovou, že pro každý term  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $|t| = h(\#_f(t), \#_g(t))$ ). Dokažte tuto závislost strukturální indukcí.

**Příklad 6**  
**20 bodů**

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $T$  je bezesporná teorie jazyka  $\mathcal{L}$  bez rovnosti, který obsahuje unární predikátový symbol  $P$  a nulární funkční symbol (tj. konstantu)  $c$ . Dále nechť  $\mathcal{M}$  značí kanonickou strukturu teorie  $T$ . Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že

- a)  $T \models P(c) \Rightarrow \mathcal{M} \models P(c)$ ;
- b)  $\mathcal{M} \models P(c) \Rightarrow T \models P(c)$ ;
- c)  $T \models P(x) \Rightarrow \mathcal{M} \models P(x)$ ;
- d)  $\mathcal{M} \models P(x) \Rightarrow T \models P(x)$ .

**Příklad 7**  
**22 bodů**



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L}$  predikátové logiky, jeho formule  $\varphi$ , realizace  $\mathcal{M}$  a teorie  $T$ . O každém z následujících vztahů rozhodněte, zda má smysl, a pokud ano, definujte jej:  $\mathcal{M} \models \varphi$ ,  $\mathcal{M} \models T$ ,  $\mathcal{M} \vdash \varphi$ ,  $\mathcal{M} \vdash T$ ,  $T \models \varphi$ ,  $T \vdash \varphi$ . (Nemusíte uvádět definici důkazu ani Tarského definici sémantiky.)

**Příklad 1**  
20 bodů

Nechť  $t$  je term, který je substituovatelný za proměnnou  $x$  ve formuli  $\varphi$ , a  $u$  je term, který je substituovatelný za proměnnou  $y$  ve formuli  $\varphi$ . Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že term  $u$  je substituovatelný za proměnnou  $y$  ve formuli  $\varphi(x/t)$ .

**Příklad 2**  
10 bodů

**Definice.** Řekneme, že valuace  $v$  je pěkná, právě když  $v(X) = 0$  pro každou výrokovou proměnnou  $X$  různou od  $A, B, C$ . (Existuje tedy právě 8 pěkných valuací.)

Dejte příklad co nejkratší formule  $\varphi$  systému  $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \rightarrow)$  výrokové logiky, která je pravdivá při právě 5 pěkných valuacích.

**Příklad 3**  
10 bodů



0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$  s rovností, kde oba symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{Z}_6$  všech zbytkových tříd modulo 6,  $+$  se realizuje jako sčítání a  $\cdot$  jako násobení.

**Příklad 4****44 bodů**

**Definice.** Řekneme, že formule  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  je *rozpoznávající* formule pro individuum  $a \in \mathbb{Z}_6$ , právě když pro každé ohodnocení  $e$  platí  $\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow e(x) = a$ .

- Pro každé  $a \in \mathbb{Z}_6$  dejte příklad jeho rozpoznávající formule.
- Rozhodněte a dokažte, pro která  $a \in \mathbb{Z}_6$  existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol  $+$ .
- Rozhodněte a dokažte, pro která  $a \in \mathbb{Z}_6$  existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol  $\cdot$ .

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\sim, f, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 5**  
34 bodů

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Uvažme teorii  $T = \{f^{11}(c) = f(c), x \sim f^6(x), (x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ . Popište kanonickou strukturu  $\mathcal{M}$  teorie  $T$ . Dokažte, že do  $\sim_{\mathcal{M}}$  nepatří nic víc, než tvrdíte.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{Q\}$  bez rovnosti, kde  $Q$  je predikátový symbol arity 5. Nechť  $k(\varphi)$ ,  $i(\varphi)$  a  $p(\varphi)$  značí po řadě počet kvantifikátorů, počet implikací a celkový počet výskytů proměnných ve formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$ . Zformulujte všeobecně platnou závislost  $p$  na  $k$  a  $i$  (tj. exaktně řečeno: najděte funkci  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takovou, že pro každou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $p(\varphi) = h(k(\varphi), i(\varphi))$ ). Dokažte tuto závislost strukturální indukcí.

**Příklad 6**  
**24 bodů**

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $S$  je libovolný neprázdný soubor formulí výrokové logiky a  $\varphi$  formule taková, že  $S \models \varphi$ . Rozhodněte a dokažte, zda nutně existuje soubor  $T \subseteq S$  takový, že  $T \models \varphi$ , a navíc:

- a)  $T$  je konečný;
- b)  $T$  je jednoprvkový.

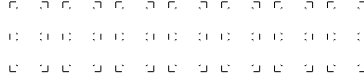
**Příklad 7**  
18 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dejte příklad plnohodnotného systému  $\mathcal{L}$  spojek výrokové logiky.  
 Definujte abecedu výrokové logiky pro systém  $\mathcal{L}$ .  
 Definujte, co je formule systému  $\mathcal{L}$  výrokové logiky.

**Příklad 1**  
20 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f\}$  bez rovnosti, kde  $P$  je unární predikátový a  $f$  unární funkční symbol. Dále víme, že  $\varphi$  je formule jazyka  $\mathcal{L}$ . Vyberte pravdivá tvrzení:

- a) Ve formuli  $\varphi$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $P$ .
- b) Ve formuli  $\varphi$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $f$ .
- c) Ve formuli  $\varphi$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $\forall$ .
- d) Ve formuli  $\varphi$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $\rightarrow$ .
- e) Ve formuli  $\varphi$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $\Rightarrow$ .
- f) Ve formuli  $\varphi$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol pro proměnnou predikátové logiky.

**Příklad 2**  
12 bodů

Dejte příklad formule  $\varphi$ , která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli  $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ .

**Příklad 3**  
10 bodů

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{s, P\}$  s rovností, kde  $s$  je unární funkční symbol a  $P$  je unární predikátový symbol.

**Příklad 4****30 bodů**

Realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  nazveme *pěknou*, právě když platí obě následující podmínky:

- nosičem je množina  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  všech přirozených čísel;
- $s$  se realizuje jako následník (tj. přičtení jedničky).

Zadejte uzavřenou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každou pěknou realizaci  $\mathcal{M}$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } P_{\mathcal{M}} = \{n \in \mathbb{N} : 5 \mid n^2 - 1\} = \{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, \dots\}.$$

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 5**  
44 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}^+$  uvažme teorii  $T_n = \{P(c), P(f^n(c)), (P(x) \leftrightarrow P(y)) \rightarrow x = y\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ . Označme  $\mathcal{M}_n$  kanonickou strukturu teorie  $T_n$ . Rozhodněte a dokažte, pro která  $n \in \mathbb{N}^+$  platí:

- a)  $\mathcal{M}_n \models P(x)$ ;  
b)  $T_n \models P(x)$ .

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $T, U$  jsou teorie jazyka  $\mathcal{L}$  predikátové logiky takové, že  $T \subset U$ . Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že:

- a) teorie  $T$  je rozšířením teorie  $U$ ;
- b) teorie  $U$  je rozšířením teorie  $T$ ;
- c) teorie  $T$  není rozšířením teorie  $U$ .

**Příklad 6**  
24 bodů



0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$  je jazyk aritmetiky (s rovností) a  $\mathcal{N}$  je jeho standardní realizace (tj. nosič je  $\mathbb{N}$ , symbol 0 se realizuje jako číslo 0,  $s$  jako následník,  $+$  jako sčítání a  $\cdot$  jako násobení). Z přednášky známe teorii jazyka  $\mathcal{L}$  zvanou Peanova aritmetika ( $PA$ ). Připomeňme, že lze psát  $PA = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ , kde  $T_1$  vynucuje chování  $s$  (je injektivní a nula nemá vzor),  $T_2$  induktivně vynucuje chování  $+$ ,  $T_3$  induktivně vynucuje chování  $\cdot$  a  $T_4$  hovoří o principu matematické indukce.

### Příklad 7 20 bodů

- Uveďte explicitně teorii  $T_4$ .
- Zformulujte první Gödelovu větu o neúplnosti.
- Rozhodněte a dokažte, zda pro každou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $\mathcal{N} \models \varphi \Rightarrow PA \vdash \varphi$ .



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Definujte, co je jazyk  $\mathcal{L}$  predikátové logiky (bez rovnosti).

**Příklad 1**

Definujte, co je realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte, co je ohodnocení  $e$  v realizaci  $\mathcal{M}$ .

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 2****16 bodů**

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Dále víme, že  $t$  je term jazyka  $\mathcal{L}$  a  $u$  je uzavřený term jazyka  $\mathcal{L}$ . Vyberte pravdivá tvrzení:

- a) V termu  $t$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $P$ .
- b) V termu  $t$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $f$ .
- c) V termu  $t$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $c$ .
- d) V termu  $t$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol pro proměnnou predikátové logiky.
- e) V termu  $u$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $=$ .
- f) V termu  $u$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $f$ .
- g) V termu  $u$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol  $c$ .
- h) V termu  $u$  se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol pro proměnnou predikátové logiky.

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $\wedge$  značí operátor NOR, tj.  $\psi \wedge \xi \approx \neg(\psi \vee \xi)$ . Dejte příklad formule  $\varphi$  systému  $\mathcal{L}(\wedge)$  výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli  $A \leftrightarrow B$ .

**Příklad 3****10 bodů**

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{+, P\}$  s rovností, kde  $+$  je binární funkční symbol a  $P$  je unární predikátový symbol.

**Příklad 4****30 bodů**

Realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  nazveme *pěknou*, právě když platí obě následující podmínky:

nosičem je množina  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  všech přirozených čísel;

$+$  se realizuje jako sčítání.

Zadejte uzavřenou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každou pěknou realizaci  $\mathcal{M}$  platí

$\mathcal{M} \models \varphi$ , právě když  $P$  se realizuje jako „je mocnina dvojky“, tj.  $P_{\mathcal{M}} = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Jsou dány funkční symboly  $\cdot$ ,  $f$ ,  $c$  s aritami po řadě 2, 1, 0 a jazyky  $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ ,  $\mathcal{L}' = \{\cdot, f, c\}$  s rovností. Dále uvažme formule

**Příklad 5**  
40 bodů

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x), \\ \psi_1 &\equiv \forall x \exists y (x \cdot y = x), \\ \psi_2 &\equiv \exists y \forall x (x \cdot y = x), \\ \psi_3 &\equiv \forall x (x \cdot c = x), \\ \psi_4 &\equiv \forall x (x \cdot f(x) = x),\end{aligned}$$

teorie  $T_1 = \{\varphi, \psi_1\}$ ,  $T_2 = \{\varphi, \psi_2\}$  jazyka  $\mathcal{L}$  a teorie  $T_3 = \{\varphi, \psi_3\}$ ,  $T_4 = \{\varphi, \psi_4\}$  jazyka  $\mathcal{L}'$ . Pro každé  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$  rozhodněte, zda teorie  $T_i$

je konzervativním rozšířením / je nekonzervativním rozšířením / není rozšířením teorie  $T_j$ . Pro  $(i, j) = (3, 1)$  a  $(i, j) = (3, 4)$  své odpovědi dokažte.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Uvažme systémy  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\wedge, \vee)$  a  $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$  výrokové logiky.

**Příklad 6****28 bodů**

**Definice.** Řekneme, že formule  $\varphi$  je  $\mathcal{A}$ -vyjádřitelná (resp.  $\mathcal{B}$ -vyjádřitelná), právě když existuje formule  $\psi$  systému  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) taková, že  $\varphi \approx \psi$ .

Dejte příklad formule  $\varphi$  (obsahující libovolné spojky výrokové logiky), která:

- a) je  $\mathcal{A}$ -vyjádřitelná i  $\mathcal{B}$ -vyjádřitelná;
- b) je  $\mathcal{A}$ -vyjádřitelná, ale není  $\mathcal{B}$ -vyjádřitelná;
- c) není  $\mathcal{A}$ -vyjádřitelná, ale je  $\mathcal{B}$ -vyjádřitelná.

Dokažte správnost svých odpovědí.

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva  
dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

**Definice.** Teorie  $T$ ,  $T'$  jazyka  $\mathcal{L}$  se nazývají *sémanticky ekvivalentní* (resp. *sémanticky komplementární*), právě když pro každou realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T'$  (resp.  $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models T'$ ).

**Příklad 7**  
**16 bodů**

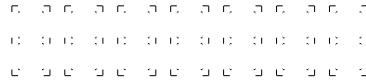
Nechť  $T$ ,  $T'$  jsou *sémanticky komplementární* teorie jazyka  $\mathcal{L}$ . Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že existují konečné teorie  $U$ ,  $U'$  jazyka  $\mathcal{L}$  takové, že  $U$  je *sémanticky ekvivalentní* s  $T$  a  $U'$  je *sémanticky ekvivalentní* s  $T'$ .



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 1**  
20 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	3
$c$	funkční	0

Definujte, co je term jazyka  $\mathcal{L}$ .

Definujte realizaci  $t^{\mathcal{M}}[e]$  termu  $t$  při ohodnocení  $e$  v realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

Dejte příklad 3 uzavřených termů jazyka  $\mathcal{L}$ .

Uveďte nějakou nejkratší vytvořující posloupnost formule  $((A \rightarrow B) \vee (A \wedge \neg A))$ .  
Kolik nejkratších vytvořujících posloupností má tato formule?

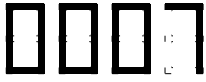
**Příklad 2**  
12 bodů

Dejte příklad formule  $\varphi$  tak, aby formule  $(A \rightarrow B) \rightarrow \varphi$  a  $A \rightarrow (B \rightarrow \varphi)$

a) byly ekvivalentní;

b) nebyly ekvivalentní.

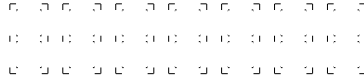
**Příklad 3**  
10 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\cdot, c\}$  s rovnostmi, kde oba symboly jsou funkční s aritami po řadě 2 a 0. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{N}^+$  všech kladných celých čísel,  $\cdot$  se realizuje jako násobení a

**Příklad 4****50 bodů**

- a)  $c_{\mathcal{M}} = 2$ ;                      b)  $c_{\mathcal{M}} = 64$ ;                      c)  $c_{\mathcal{M}} = 100$ ;                      d)  $c_{\mathcal{M}} = 2500$ .

Rozhodněte a dokažte, zda existuje formule  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  taková, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi[e], \text{ právě když } e(x) \text{ je mocninou dvojky.}$$



0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\sqsubseteq\}$  s rovnostmi, kde  $\sqsubseteq$  je binární predikátový symbol. Dále uvažme formule

**Příklad 5**  
24 bodů

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv x \sqsubseteq x, \\ \varphi_2 &\equiv (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x) \rightarrow x = y, \\ \varphi_3 &\equiv (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow x \sqsubseteq z, \\ \varphi_4 &\equiv \exists x \forall y (y \sqsubseteq x), \\ \varphi_{5a} &\equiv \exists x \forall y (x \sqsubseteq y), \\ \varphi_{5b} &\equiv \exists x \forall y (y \sqsubseteq x \rightarrow x = y)\end{aligned}$$

a teorie  $A = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_{5a}\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_{5b}\}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

- Intuitivně vysvětlete význam jednotlivých formulí.
- Dokažte, že teorie  $B$  není rozšířením teorie  $A$ .

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

**Definice.** Nechť  $M$  je libovolná množina a  $g: M \rightarrow M$ . Prvek  $a \in M$  nazveme cyklickým vzhledem ke  $g$ , právě když  $a \in \{g^n(a) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ .

**Příklad 6**  
24 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{f\}$  s rovnostmi, kde  $f$  je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$ , jejíž modely jsou právě ty realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ , kde:

- každé individuum je cyklické vzhledem k  $f_{\mathcal{M}}$ ;
- žádné individuum není cyklické vzhledem k  $f_{\mathcal{M}}$ .

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $T$  je bezsporná teorie jazyka  $\mathcal{L}$  bez rovnosti, který obsahuje unární predikátový symbol  $P$  a nulární funkční symbol (tj. konstantu)  $c$ . Nechť  $\mathcal{M}$  je kanonická struktura teorie  $T$  a označme  $M$  její nosič. Dále uvažme množinu  $A = \{t \in M : T \not\vdash \neg P(t)\}$ . Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že

- a)  $A \subseteq P_{\mathcal{M}}$ ;
- b)  $A \supseteq P_{\mathcal{M}}$ .

**Příklad 7**  
20 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  bez rovnosti, kde  $P$  je unární predikátový symbol.

**Příklad 1**

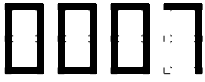
Definujte, co je formule  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte indukci vzhledem ke struktuře formule  $\varphi$  množinu  $FV(\varphi)$  všech volných proměnných ve formuli  $\varphi$ .

O každém z následujících systémů spojek výrokové logiky rozhodněte, zda je plnohodnotný:

**Příklad 2****10 bodů**a)  $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$ ;b)  $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$ ;c)  $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$ ;d)  $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \rightarrow)$ ;e)  $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ .



list



učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

**Definice.** Řekneme, že formule  $\varphi$  závisí na proměnné  $X$ , právě když existují valuace  $v, v'$  takové, že  $v(Y) = v'(Y)$  pro všechny proměnné  $Y$  různé od  $X$ , ale  $v(\varphi) \neq v'(\varphi)$ . Nechť  $Z(\varphi)$  značí množinu právě těch proměnných, na kterých formule  $\varphi$  závisí.

Dejte příklad formulí  $\varphi, \psi, \xi$  takových, že  $Z(\varphi) = \{A, B\}$ ,  $Z(\psi) = \{A, C\}$ ,  $Z(\xi) = \{B, C\}$  a  $Z((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \xi) = \{B, C\}$ .

**Příklad 3****10 bodů**

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\cdot\}$  s rovností, kde  $\cdot$  je binární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{S}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{S}_4$  všech permutací čtyřprvkové množiny a  $\cdot$  se realizuje jako skládání. (Připomeňme, že  $\mathbb{S}_4$  sestává z identity, šesti 4-cyklů, osmi 3-cyklů, šesti 2-cyklů (transpozic) a tří 2-2-cyklů.)

Zadejte formuli  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{S} \models \varphi[e], \text{ právě když:}$$

- a)  $e(x)$  je identita;
- b)  $e(x)$  je 3-cyklus;
- c)  $e(x)$  je 4-cyklus;
- d)  $e(x)$  je 2-2-cyklus.

**Příklad 4****30 bodů**

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f\}$  s rovnostmi, kde  $P$  je unární predikátový symbol a  $f$  je binární funkční symbol. Dále uvažme teorii  $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  jazyka  $\mathcal{L}$ , kde:

**Příklad 5**  
40 bodů

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall u (u = x \vee u = y \vee u = z)), \\ \varphi_2 &\equiv \forall x \exists y \forall z (f(y, z) = x), \\ \varphi_3 &\equiv \forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y).\end{aligned}$$

- a) Pro každé  $i \in \{1, 2, 3\}$  dejte příklad realizace  $\mathcal{M}_i$  jazyka  $\mathcal{L}$  takové, že  $\mathcal{M}_i \not\models T$ , ale  $\mathcal{M}_i \models T - \{\varphi_i\}$ .  
b) Dokažte, že teorie  $T$  není úplná.  
c) Dejte příklad formule  $\psi$  jazyka  $\mathcal{L}$  tak, aby teorie  $T \cup \{\psi\}$  byla úplná.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Jsou dány teorie  $T_1, T_2$  a formule  $\varphi$ . Označme  $U_1 = T_1 \cup \{\varphi\}$ ,  $U_2 = T_2 \cup \{\varphi\}$ ; přitom formuli  $\varphi$  i teorie  $T_1, T_2, U_1, U_2$  uvažujeme nad stejným jazykem. Uvažme dále následující tvrzení:

**Příklad 6**  
20 bodů

Teorie  $T_1$  je rozšířením teorie  $T_2$ . (1)

Teorie  $U_1$  je rozšířením teorie  $U_2$ . (2)

Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že:

a) (1)  $\Rightarrow$  (2);

b) (2)  $\Rightarrow$  (1).

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  bez rovnosti, kde  $P$  je unární predikátový symbol. Najděte až na ekvivalenci všechny teorie jazyka  $\mathcal{L}$ . (Tedy exaktně řečeno: najděte  $n \in \mathbb{N}$  a teorie  $T_1, T_2, \dots, T_n$  jazyka  $\mathcal{L}$  takové, že každá teorie jazyka  $\mathcal{L}$  je ekvivalentní právě jedné z teorií  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .)

**Příklad 7**  
16 bodů

Nechť  $T$  je henkinovská teorie jazyka s rovností, která má aspoň jeden model s nekonečným nosičem. Dokažte, že  $T$  musí být nekonečná.

**Příklad 8**  
14 bodů





list

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definujte, co je jazyk  $\mathcal{L}$  predikátové logiky (bez rovnosti).

**Příklad 1**

Definujte, co je realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte, co je ohodnocení  $e$  v realizaci  $\mathcal{M}$ .

Jsou dány jazyky  $\mathcal{L} = \{Q\}$  a  $\mathcal{L}' = \{Q, f, c\}$  bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 2****14 bodů**

symbol	typ	arita
$Q$	predikátový	4
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Zadejte nějakou konečnou teorii  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$  tak, aby teorie  $T' = \{Q(x, f(x), c, f(c))\}$  jazyka  $\mathcal{L}'$  byla jejím konzervativním rozšířením.

Dejte příklad formule  $\varphi$ , která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli  $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$ .

**Příklad 3****10 bodů**

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{+, \cdot, f\}$  s rovností, kde všechny symboly jsou funkční s aritami po řadě 2, 2, 1. Realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  nazveme *pěknou*, právě když platí všechny následující podmínky:

**Příklad 4**  
44 bodů

- nosičem je množina  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  všech přirozených čísel;
- $+$  se realizuje jako sčítání;
- $\cdot$  se realizuje jako násobení.

a) Zadejte uzavřenou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každou pěknou realizaci  $\mathcal{M}$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } f \text{ se realizuje jako Fibonacciho posloupnost, tj.}$$

$$f_{\mathcal{M}} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 5), (6, 8), (7, 13), (8, 21), (9, 34), \dots\}.$$

b) Jako v a), navíc  $\varphi$  nesmí obsahovat symbol  $\cdot$ .

c) Formulujte tvrzení o existenci a vlastnostech formule zvané Gödelův predikát  $\beta$ .

d) Zadejte formuli  $\varphi(x, y)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každou pěknou realizaci  $\mathcal{M}$  a každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi[e], \text{ právě když } e(x)\text{-té Fibonacciho číslo je } e(y).$$

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

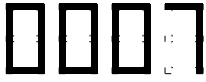
Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, c, d\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 5**  
36 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0
$d$	funkční	0

Uvažme teorii  $T = \{f^2(c) = c \vee f^3(d) = d, f^4(c) = f^5(d), P(f^6(c))\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ .

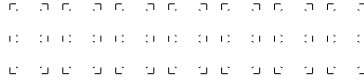
Popište kanonickou strukturu  $\mathcal{M}$  teorie  $T$ . Dokažte, že do  $P_{\mathcal{M}}$  nepatří nic víc, než tvrdíte.



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Uvažujme výrokovou logiku se spojkami  $\neg$ ,  $\rightarrow$  a Lukasiewiczovým odvozovacím systémem z přednášky. Nechť  $S$  označuje soubor všech formulí, které mají vytvořující posloupnost délky 3, ale nemají žádnou kratší. Rozhodněte a dokažte, zda:

- a)  $S \vdash (A \rightarrow B)$ ;  
b)  $S \models \neg A$ .

**Příklad 6**  
20 bodů

Nechť  $P$ ,  $Q$  jsou unární predikátové symboly. Dejte příklad úplné teorie  $T_1$  nad jazykem  $\{P\}$  bez rovnosti a úplné teorie  $T_2$  nad jazykem  $\{Q\}$  bez rovnosti. Platí při vaší volbě teorií  $T_1$  a  $T_2$ , že teorie  $T = T_1 \cup T_2$  je úplná nad jazykem  $\{P, Q\}$  bez rovnosti? Lze zvolit teorie  $T_1$  a  $T_2$  i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Svě odpovědi zdůvodněte.

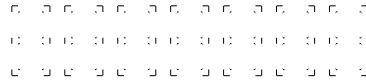
**Příklad 7**  
16 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Dejte příklad plnohodnotného systému  $\mathcal{L}$  spojek výrokové logiky.  
 Definujte abecedu výrokové logiky pro systém  $\mathcal{L}$ .  
 Definujte, co je formule systému  $\mathcal{L}$  výrokové logiky.

**Příklad 1**  
20 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  bez rovnosti, kde  $P$  je binární predikátový symbol. O každém z následujících předpisů rozhodněte, zda korektně zadává teorii jazyka  $\mathcal{L}$ . Pokud ne, vysvětlete, v čem je problém.

**Příklad 2**  
12 bodů

- a)  $\{\exists x_0 \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^n P(x_{i-1}, x_i) \mid n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\};$   
 b)  $\{\exists n \exists x_0 \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^n P(x_{i-1}, x_i)\};$   
 c)  $\{\exists x_0 \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^n P(x_{i-1}, x_i) \mid n \in \mathbb{N}^+\};$   
 d)  $\{\exists x_0 \exists x_1 \dots \bigwedge_{i \in \mathbb{N}^+} P(x_{i-1}, x_i)\}.$

**Definice.** Řekneme, že valuace  $v$  je pěkná, právě když  $v(X) = 0$  pro každou výrokovou proměnnou  $X$  různou od  $A, B, C$ . (Existuje tedy právě 8 pěkných valuací.)

**Příklad 3**  
10 bodů

Dejte příklad formule  $\varphi$  systému  $\mathcal{L}(\wedge, \rightarrow)$  výrokové logiky, která je pravdivá při právě 3 pěkných valuacích.

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$  s rovností, kde oba symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{Z}_4$  všech zbytkových tříd modulo 4,  $+$  se realizuje jako sčítání a  $\cdot$  jako násobení.

**Příklad 4****36 bodů**

**Definice.** Řekneme, že formule  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  je *rozpoznávající* formule pro individuum  $a \in \mathbb{Z}_4$ , právě když pro každé ohodnocení  $e$  platí  $\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow e(x) = a$ .

- Pro každé  $a \in \mathbb{Z}_4$  dejte příklad jeho rozpoznávající formule.
- Rozhodněte a dokažte, pro která  $a \in \mathbb{Z}_4$  existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol  $+$ .
- Rozhodněte a dokažte, pro která  $a \in \mathbb{Z}_4$  existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol  $\cdot$ .

0007

list

3

učo

body

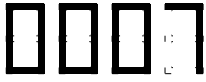
Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva  
dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $T_1$  a  $T_2$  jsou teorie nad stejným jazykem, přičemž  $T_1$  je úplná a  $T_2$  je jejím  
rozšířením. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že teorie  $T_2$

**Příklad 5**  
**30 bodů**

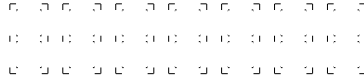
- a) je bezesporná;
- b) není úplná;
- c) je sporná nebo úplná.



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\sim, f, g, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 6**  
52 bodů

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
$f$	funkční	1
$g$	funkční	1
$c$	funkční	0

Uvažme teorii  $T = \{x \sim f(x), f(g(x)) = x, g(f(x)) = x\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ .

- Dejte příklad modelu  $\mathcal{M}$  teorie  $T$  takového, že  $\mathcal{M} \not\models f(c) = c$ .
- Pro každý uzavřený term  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$  určete jeho realizaci  $t^{\mathcal{M}}$  ve zvoleném modelu  $\mathcal{M}$ .
- Jak se realizuje symbol  $\sim$  v kanonické struktuře teorie  $T$ ?  
Dokažte správnost svých odpovědí.

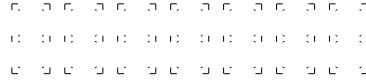




list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Uvažme systém  $\mathcal{L}(\neg, \vee)$  výrokové logiky, obsahující jen negaci a disjunkci.

**Příklad 1**

Definujte, co je formule systému  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte, co je valuace (výrokových proměnných).

Definujte rozšíření valuace z výrokových proměnných na všechny formule systému  $\mathcal{L}$ .

Víme, že  $P$  je predikátový symbol a  $f, g$  jsou funkční symboly. O každém z následujících výrazů rozhodněte, zda se může jednat o term, a pokud ano, napište pro něj nějakou vytvářející posloupnost:

**Příklad 2****10 bodů**

a)  $x$ ;

b)  $P(x, f(x))$ ;

c)  $f(x, f(x))$ ;

d)  $g(x, f(x), f(f(x)))$ .

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Najděte co nejkratší formuli  $\varphi$  systému  $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$  výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli  $((\neg B \rightarrow \neg A) \wedge C) \vee \neg((A \wedge \neg B) \vee C)$ .

**Příklad 3****10 bodů**

Nechť  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  označuje množinu všech přirozených čísel. Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\oplus, t\}$  s rovností, kde  $\oplus$  je binární funkční a  $t$  unární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  všech (nekonečných) posloupností přirozených čísel,  $\oplus$  se realizuje jako sčítání po složkách (tj.  $(a_0, a_1, a_2, \dots) \oplus_{\mathcal{M}} (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ ) a  $t$  se realizuje jako tail (tj.  $t_{\mathcal{M}}((a_0, a_1, a_2, \dots)) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ ).

**Příklad 4****30 bodů**

Zadejte formuli  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi[e], \text{ právě když:}$$

- a)  $e(x)$  je neklesající;
- b)  $e(x) = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ;
- c)  $e(x)$  je rostoucí.

0007

list

3

učo

body

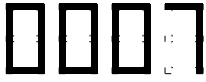
Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  s rovností, kde  $P$  je unární predikátový symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$ , jejíž modely jsou právě realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ , kde množina  $P_{\mathcal{M}}$ :

- a) má méně než 10 prvků;
- b) má méně než 10 prvků nebo je nekonečná;
- c) má více než 10 prvků, ale konečně mnoho;
- d) má více než 10 prvků.

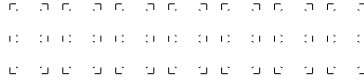
**Příklad 5**  
40 bodů



list



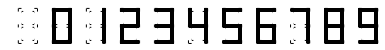
učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.



Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 6**  
30 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Uvažme teorii

$$T = \{f^4(c) = c, \neg P(c), \bigvee_{i=1}^3 P(f^i(c)), \forall x (P(f(x)) \rightarrow (P(x) \vee P(f(f(x))))))\}$$

nad jazykem  $\mathcal{L}$ . Popište kanonickou strukturu  $\mathcal{M}$  teorie  $T$ . Dokažte, že do  $P_{\mathcal{M}}$  nepatří nic víc, než tvrdíte.

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{f\}$  s rovnostmi, kde  $f$  je unární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{Z}$  všech celých čísel,  $f_{\mathcal{M}}(n) = n + 1$  pro každé nezáporné  $n \in \mathbb{Z}$  a  $f_{\mathcal{M}}(n) = n + 2$  pro každé záporné  $n \in \mathbb{Z}$ . Rozhodněte a dokažte, pro která  $n \in \mathbb{Z}$  existuje formule  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  taková, že pro každé ohodnocení  $e$  platí  $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ , právě když  $e(x) = n$ .

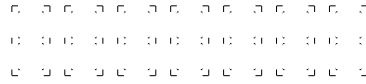
**Příklad 7**  
**20 bodů**



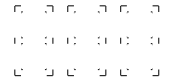
list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  s rovností, kde  $P$  je unární predikátový symbol.

**Příklad 1**

Definujte, co je realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte, co je ohodnocení  $e$  v realizaci  $\mathcal{M}$ .

Definujte sémantiku formulí  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$ , tj. kdy platí  $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ .

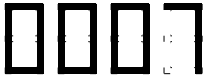
Jsou dány jazyky  $\mathcal{L} = \{Q\}$  a  $\mathcal{L}' = \{Q, f, c\}$  bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 2**

**10 bodů**

symbol	typ	arita
$Q$	predikátový	3
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Zadejte nějakou konečnou teorii  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$  tak, aby teorie  $T' = \{Q(x, f(x), c)\}$  jazyka  $\mathcal{L}'$  byla jejím konzervativním rozšířením.



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dejte příklad formule  $\varphi$  tak, aby formule  $(\varphi \rightarrow A) \rightarrow B$  a  $\varphi \rightarrow (A \rightarrow B)$

**Příklad 3**

a) byly ekvivalentní;

10 bodů

b) nebyly ekvivalentní.

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{ \cdot, s, f \}$  s rovností, kde všechny symboly jsou funkční s aritami po řadě 2, 1, 1.

**Příklad 4**

40 bodů

Realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  nazveme *pěknou*, právě když platí všechny následující podmínky:

nosičem je množina  $\mathbb{N}^+$  všech kladných celých čísel;

$\cdot$  se realizuje jako násobení;

$s$  se realizuje jako následník (tj. přičtení jedničky).

Zadejte uzavřenou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každou pěknou realizaci  $\mathcal{M}$  platí

$\mathcal{M} \models \varphi$ , právě když pro každé  $n \in \mathbb{N}^+$  je  $f_{\mathcal{M}}(n)$  rovno počtu dělitelů čísla  $n$ .



list



učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jsou dány jazyky  $\mathcal{L} = \{P, f\}$  a  $\mathcal{L}' = \{P, f, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 5**  
40 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Dále uvažme formule

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \left( \bigwedge_{i=1}^4 \bigwedge_{j=i+1}^4 x_i \neq x_j \wedge \forall y \left( \bigvee_{i=1}^4 y = x_i \right) \right), \\ \varphi_2 &\equiv \forall x \exists y (f(y) = x), \\ \varphi_3 &\equiv \exists x (f^6(x) \neq x), \\ \varphi_4 &\equiv \exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (P(z) \leftrightarrow (z = x \vee z = y)))\end{aligned}$$

a teorii  $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ .

a) Intuitivně vysvětlete význam jednotlivých formulí.

b) Dokažte, že teorie  $T$  není úplná.

c) Najděte formuli  $\psi$  jazyka  $\mathcal{L}$  tak, aby teorie  $T \cup \{\psi\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$  byla úplná. Platí při vaší volbě formule  $\psi$ , že teorie  $T \cup \{\psi, P(c)\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}'$  je úplná? Lze zvolit formuli  $\psi$  i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Své odpovědi zdůvodněte.

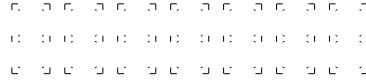




list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\sim, X, Y, f, c\}$  bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 6**  
30 bodů

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
$X$	predikátový	0
$Y$	predikátový	0
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Uvažme teorii  $T = \{X \vee Y, X \leftrightarrow c \sim x, Y \leftrightarrow x \sim c\}$  jazyka  $\mathcal{L}$ . Popište kanonickou strukturu  $\mathcal{M}$  teorie  $T$ . O každé uzavřené atomické formuli jazyka  $\mathcal{L}$ , která je podle vás pravdivá v  $\mathcal{M}$ , dokažte, že tomu tak skutečně je.

Nechť  $T$  je soubor formulí výrokové logiky a  $\varphi, \psi$  jsou libovolné formule. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí následující tvrzení:

**Příklad 7**  
10 bodů

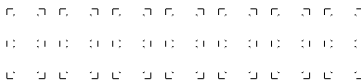
- a) Pokud  $T \models \varphi$  nebo  $T \models \psi$ , pak  $T \models \varphi \vee \psi$ .  
b) Pokud  $T \models \varphi \vee \psi$ , pak  $T \models \varphi$  nebo  $T \models \psi$ .



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Uvažujme Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky.

**Příklad 1**

Uveďte odvozovací pravidlo modus ponens.

**20 bodů**

Definujte, co je důkaz formule (nemusíte uvádět, jak vypadají schémata axiomů).

Definujte, kdy je odvozovací systém korektní.

Definujte, kdy je odvozovací systém úplný.

Je Lukasiewiczův odvozovací systém korektní? Je úplný?

Nechť  $P$  je binární predikátový symbol a  $f$  je unární funkční symbol. O každé z následujících formulí rozhodněte, zda je v ní term  $f(y)$  substituovatelný za proměnnou  $x$ , a pokud ano, uveďte výslednou formuli po substituci:

**Příklad 2****10 bodů**

a)  $P(x, y)$ ;

b)  $\forall y P(x, y)$ ;

c)  $\forall x \forall y P(x, y)$ .

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Dejte příklad formule  $\varphi$ , která je v disjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli  $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$ .

**Příklad 3****10 bodů**

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$  s rovností, kde oba symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{C}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{C}$  všech komplexních čísel,  $+$  se realizuje jako sčítání a  $\cdot$  jako násobení.

**Příklad 4****30 bodů**

Zadejte formuli  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{C} \models \varphi[e], \text{ právě když obrazy čísel } e(x_1), e(x_2), e(x_3), e(x_4) \text{ v Gaussově rovině leží ve vrcholech čtverce.}$$

(Nápověda: můžete nejprve vynutit  $\{e(x_1), e(x_2), e(x_3), e(x_4)\} = \{1, i, -1, -i\}$ .)

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Jsou dány jazyky  $\mathcal{L} = \{P\}$  a  $\mathcal{L}' = \{P, c\}$  bez rovnosti, kde  $P$  je binární predikátový symbol a  $c$  je nulární funkční symbol (konstanta).

**Příklad 5****30 bodů**

Dále uvažme teorii  $T_1 = \{\forall x \exists y P(x, y)\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ , teorii  $T_2 = \{\exists y \forall x P(x, y)\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$  a teorii  $T_3 = \{\forall x P(x, c)\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}'$ . Pro každé  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$  rozhodněte, zda teorie  $T_i$

je konzervativním rozšířením / je nekonzervativním rozšířením / není rozšířením

teorie  $T_j$ . Pro  $(i, j) = (2, 1)$  svou odpověď dokažte.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\sim, f, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 6**  
20 bodů

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

- a) Dejte příklad realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  takové, že platí obě následující podmínky:  
 pro nekonečně mnoho uzavřených termů  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $\mathcal{M} \models t \sim f(t)$ ;  
 pro nekonečně mnoho uzavřených termů  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $\mathcal{M} \not\models t \sim f(t)$ .
- b) Rozhodněte a dokažte, zda taková realizace  $\mathcal{M}$  může splňovat  $\mathcal{M} \models x = y \leftrightarrow x \sim y$ .

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $A, B$  jsou unární predikátové symboly. V níže uvedených formulích nahradte každý výskyt písmene  $Q$  všeobecným nebo existenčním kvantifikátorem (různé výskyty mohou být nahrazeny různými kvantifikátory) tak, aby ekvivalence formulí byla splněna; anebo konstatujte, že to není možné.

- a)  $Qx(A(x) \wedge B(x)) \approx Qx A(x) \wedge Qx B(x)$ ;
- b)  $Qx(A(x) \vee B(x)) \approx Qx A(x) \vee Qx B(x)$ ;
- c)  $Qx(A(x) \rightarrow B(x)) \approx Qx A(x) \rightarrow Qx B(x)$ ;
- d)  $Qx(A(x) \leftrightarrow B(x)) \approx Qx A(x) \leftrightarrow Qx B(x)$ .

**Příklad 7****16 bodů**

Nechť  $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$  je jazyk aritmetiky (s rovností) a  $\mathcal{N}$  je jeho standardní realizace (tj. nosič je  $\mathbb{N}$ , symbol 0 se realizuje jako číslo 0,  $s$  jako následník,  $+$  jako sčítání a  $\cdot$  jako násobení). Zformulujte první Gödelovu větu o neúplnosti. Dále rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$  taková, že

- a)  $T$  je konečná a úplná;
- b)  $T$  je konečná a  $\mathcal{N} \models T$ ;
- c)  $T$  je úplná a  $\mathcal{N} \models T$ ;
- d)  $T$  je konečná, úplná a  $\mathcal{N} \models T$ .

**Příklad 8****24 bodů**



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L}$  predikátové logiky, jeho formule  $\varphi$ , realizace  $\mathcal{M}$  a teorie  $T$ .  
 O každém z následujících vztahů rozhodněte, zda má smysl, a pokud ano, definujte jej:  $\mathcal{M} \models \varphi$ ,  $\mathcal{M} \models T$ ,  $\mathcal{M} \vdash \varphi$ ,  $\mathcal{M} \vdash T$ ,  $T \models \varphi$ ,  $T \vdash \varphi$ .  
 (Nemusíte uvádět definici důkazu ani Tarského definici sémantiky.)

**Příklad 1**  
20 bodů

Jsou dány jazyky  $\mathcal{L} = \{P\}$  a  $\mathcal{L}' = \{P, Q\}$  bez rovnosti, kde  $P, Q$  jsou unární predikátové symboly. Zadejte nějakou konečnou teorii  $T$  jazyka  $\mathcal{L}$  tak, aby teorie  $T' = \{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))\}$  jazyka  $\mathcal{L}'$  byla jejím konzervativním rozšířením.

**Příklad 2**  
10 bodů



list



učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť  $\nrightarrow$  je binární spojka se sémantikou  $\varphi \nrightarrow \psi \approx \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $\bullet$  je unární spojka se sémantikou  $\bullet\varphi \approx \varphi \rightarrow \varphi$  a  $\circ$  je unární spojka se sémantikou  $\circ\varphi \approx \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ . Dejte příklad formule  $\varphi$  logického systému  $\mathcal{L}(\nrightarrow, \bullet, \circ)$ , která je ekvivalentní formuli  $A \vee B$ .

**Příklad 3**  
10 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{s, P\}$  s rovností, kde  $s$  je unární funkční symbol a  $P$  je unární predikátový symbol.

**Příklad 4**  
30 bodů

Realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  nazveme *pěknou*, právě když platí obě následující podmínky:

- nosičem je množina  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  všech přirozených čísel;
- $s$  se realizuje jako následník (tj. přičtení jedničky).

Zadejte uzavřenou formuli  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každou pěknou realizaci  $\mathcal{M}$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } P \text{ se realizuje jako „je násobek tří“, tj. } P_{\mathcal{M}} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$



0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

**Definice.** Teorie  $T, T'$  jazyka  $\mathcal{L}$  se nazývají *sémanticky ekvivalentní*, právě když pro každou realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T'$ .

**Příklad 5**  
30 bodů

Rozhodněte a dokažte, zda:

- a) ke každé teorii existuje konečná teorie, která je s ní sémanticky ekvivalentní;
- b) ke každé konečné teorii existuje jednoprvková teorie, která je s ní sémanticky ekvivalentní.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, c, d\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 6**  
30 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	2
$c$	funkční	0
$d$	funkční	0

Uvažme teorii  $T = \{f(x, y) = f(y, x), f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)), P(f(f(c, c), d))\}$  jazyka  $\mathcal{L}$ . Jak se realizuje symbol  $P$  v kanonické struktuře  $\mathcal{M}$  teorie  $T$ ? Dokažte správnost své odpovědi.

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $S, T$  jsou splnitelné soubory formulí výrokové logiky. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že soubor  $S \cup T$  je:

- a) splnitelný;
- b) nesplnitelný.

**Příklad 7**  
10 bodů

Formulujte větu o dedukci pro Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky. Dejte příklad vlastního odvozovacího systému (rovněž pro systém  $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$ ), který je korektní a pro nějž platí právě jedna z (meta)implikací věty o dedukci. Zdůvodněte správnost vaší volby.

**Příklad 8**  
20 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  s rovností, kde  $P$  je unární predikátový symbol.

**Příklad 1**

Definujte, co je realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte, co je ohodnocení  $e$  v realizaci  $\mathcal{M}$ .

Definujte, kdy platí  $\mathcal{M} \models P(x)[e]$ .

Definujte, kdy platí  $\mathcal{M} \models x = y[e]$ .

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$  bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 2**

**10 bodů**

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	1
$c$	funkční	0

Dejte příklad realizace  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  takové, že pro právě 3 uzavřené termy  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $\mathcal{M} \models P(t)$ .

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $\circ$  je unární spojka odpovídající „konstantní nepravdě“, tj.  $\circ\varphi \approx \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ .  
Dejte příklad formule  $\varphi$  logického systému  $\mathcal{L}(\rightarrow, \circ)$ , která je ekvivalentní formuli  $A \wedge B$ .

**Příklad 3**  
10 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$  s rovnostmi, kde oba mimologické symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{R}$ , kde nosičem je množina  $\mathbb{R}$  všech reálných čísel,  $+$  se realizuje jako sčítání a  $\cdot$  jako násobení.

**Příklad 4**  
36 bodů

Zadejte formuli  $\varphi(x, y, z)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{R} \models \varphi[e], \text{ právě když } e(x), e(y), e(z) \text{ jsou délky stran nějakého trojúhelníku.}$$

Dokažte, že každá formule s touto vlastností musí obsahovat symbol  $\cdot$ .

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Jsou dány jazyky  $\mathcal{L}_1 = \{\cdot, n\}$ ,  $\mathcal{L}_2 = \{\cdot, n, f\}$ ,  $\mathcal{L}_3 = \{\cdot, n, f, p\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 5**  
40 bodů

symbol	typ	arita
$\cdot$	funkční	2
$n$	funkční	0
$f$	funkční	1
$p$	funkční	0

Uvažme formule  $\varphi \equiv x \cdot y = y \cdot x \wedge (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \wedge x \cdot n = x$ ,  $\psi \equiv x \cdot f(x) = n$ ,  $\xi \equiv f(p) = p$  a teorie  $T_1 = \{\varphi\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}_1$ ,  $T_2 = \{\varphi, \psi\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}_2$  a  $T_3 = \{\varphi, \psi, \xi\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}_3$ .

Rozhodněte a dokažte, zda

- teorie  $T_2$  je rozšířením teorie  $T_1$ ;
- teorie  $T_2$  je konzervativním rozšířením teorie  $T_1$ ;
- teorie  $T_3$  je konzervativním rozšířením teorie  $T_2$ ;
- teorie  $T_2$  je konzervativním rozšířením teorie  $T_3$ .

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Uvažme výrokovou logiku se spojkami  $\neg$ ,  $\rightarrow$  a Lukasiewiczovým odvozovacím systémem z přednášky. Nechť  $S$  označuje soubor všech splnitelných formulí. Rozhodněte a dokažte, zda

**Příklad 6****24 bodů**a)  $S \vdash A \rightarrow B$ ;b)  $S \models \neg(A \rightarrow A)$ ;c) lze soubor  $S$  rozdělit na soubory  $S_1, S_2$  (tj.  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  a  $S_1 \cup S_2 = S$ ) tak, že oba dva soubory  $S_1, S_2$  jsou splnitelné.

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Zformulujte nutnou a postačující podmínku (\*) pro jazyk  $\mathcal{L}$  predikátové logiky, aby mělo smysl uvažovat kanonickou strukturu  $\mathcal{M}$  teorie  $T$  nad jazykem  $\mathcal{L}$  (tj. aby  $\mathcal{M}$  měla neprázdný nosič).

**Příklad 7****20 bodů**

Dále rozhodněte a dokažte, zda pro kanonickou strukturu  $\mathcal{M}$  každé **úplné** teorie  $T$  nad každým jazykem  $\mathcal{L}$  bez rovnosti, který splňuje podmínku (\*), platí, že  $\mathcal{M}$  je modelem teorie  $T$ .





list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, g, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 1**  
20 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$g$	funkční	2
$c$	funkční	0

Definujte, co je term jazyka  $\mathcal{L}$ .

Definujte, co je realizace  $t^{\mathcal{M}}[e]$  termu  $t$  při ohodnocení  $e$  v realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

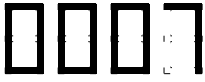
Dejte příklad 3 uzavřených termů jazyka  $\mathcal{L}$ .

Nechť  $S, T$  jsou nespílitelné soubory formulí výrokové logiky. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že je nespílitelný i soubor

**Příklad 2**  
10 bodů

a)  $S \cap T$ ;

b)  $S \cup T$ .



list



učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť  $\mathcal{V}$  označuje soubor všech proměnných výrokové logiky. Valuaci  $v$  nazveme pěknou, právě když  $v(X) = 0$  pro všechny  $X \in \mathcal{V} - \{A, B, C\}$  (existuje tedy právě 8 pěkných valuací). Dejte příklad formule  $\varphi$  logického systému  $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$ , která je pravdivá při právě 5 pěkných valuacích.

**Příklad 3**  
10 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\cdot, c, P\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$\cdot$	funkční	2
$c$	funkční	0
$P$	predikátový	1

**Příklad 4**  
30 bodů

Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde:

nosičem je množina  $\mathbb{Q}^+$  všech kladných racionálních čísel;

$\cdot$  se realizuje jako násobení, tj.  $\cdot_{\mathcal{M}} = \{((x, y), xy) \mid x, y \in \mathbb{Q}^+\}$ ;

$c$  se realizuje jako osmička, tj.  $c_{\mathcal{M}} = 8$ ;

$P$  se realizuje jako „je celé číslo“, tj.  $P_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}^+$ .

Zadejte formuli  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$\mathcal{M} \models \varphi[e]$ , právě když jmenovatel čísla  $e(x)$  (v základním tvaru) je sudý.

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $P$  je binární predikátový symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje splnitelná teorie  $T$ , která má jen modely s nekonečným nosičem, a navíc:

- $T$  je nad jazykem  $\{P\}$  s rovností;
- $T$  je konečná a nad jazykem  $\{P\}$  s rovností;
- $T$  je nad jazykem  $\{P\}$  bez rovnosti;
- $T$  je konečná a nad jazykem  $\{P\}$  bez rovnosti.

**Příklad 5**  
40 bodů

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{a, b, c, P, X, Y\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 6**  
20 bodů

symbol	typ	arita
$a, b, c$	funkční	0
$P$	predikátový	1
$X, Y$	predikátový	0

Uvažme formule  $\varphi_1 \equiv X \vee Y$ ,  $\varphi_2 \equiv X \leftrightarrow (P(a) \wedge P(b))$ ,  $\varphi_3 \equiv Y \leftrightarrow (P(a) \wedge P(c))$ ,  $\varphi_4 \equiv x = y$  a teorie  $T_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ,  $T_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ .

Popište kanonickou strukturu  $\mathcal{M}_1$  teorie  $T_1$  a kanonickou strukturu  $\mathcal{M}_2$  teorie  $T_2$ .

Rozhodněte, zda  $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$ ,  $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$ ,  $\mathcal{M}_1 \models \varphi_3$ ,  $\mathcal{M}_2 \models \varphi_1$ ,  $\mathcal{M}_2 \models \varphi_2$ ,  $\mathcal{M}_2 \models \varphi_3$ ,  $\mathcal{M}_2 \models \varphi_4$ .

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $T_1$  je teorie nad jazykem  $\mathcal{L}_1$  bez rovnosti a  $T_2$  je teorie nad jazykem  $\mathcal{L}_2$  bez rovnosti, přičemž  $T_1$  je úplná a  $T_2$  je jejím konzervativním rozšířením. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že  $T_2$  je úplná, pokud dále víme, že

- a)  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ ;
- b)  $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$ .

**Příklad 7**  
30 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L}$  predikátové logiky, jeho formule  $\varphi$ , realizace  $\mathcal{M}$  a teorie  $T$ .  
 O každém z následujících vztahů rozhodněte, zda má smysl, a pokud ano, definujte jej:  $\mathcal{M} \models \varphi$ ,  $\mathcal{M} \models T$ ,  $\mathcal{M} \vdash \varphi$ ,  $\mathcal{M} \vdash T$ ,  $T \models \varphi$ ,  $T \vdash \varphi$ .  
 (Nemusíte uvádět definici důkazu ani Tarského definici sémantiky.)

**Příklad 1**  
20 bodů

Nechť  $S$  je soubor formulí výrokové logiky, který má nekonečně mnoho splnitelných podsouborů. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že  $S$  je splnitelný.

**Příklad 2**  
10 bodů

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Dejte příklad formule  $\varphi$ , která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli  $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ .

**Příklad 3**  
10 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\subset\}$  bez rovnosti, kde  $\subset$  je binární predikátový symbol. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde:  
nosičem je množina  $2^{\mathbb{N}}$  všech podmnožin množiny  $\mathbb{N}$  všech přirozených čísel;  
 $\subset$  se realizuje jako ostrá množinová inkluze.

**Příklad 4**  
30 bodů

Zadejte formuli  $\varphi(x, y)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi[e], \text{ právě když množiny } e(x), e(y) \text{ jsou navzájem svými komplementy.}$$

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $f$  je unární a  $c$  nulární funkční symbol. Uvažme teorii  $T = \{\forall x \exists y (f(y) = x), \forall x (f(x) \neq x), \exists x (f^5(x) \neq x), \psi\}$ , kde

**Příklad 5**  
40 bodů

$$\psi \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \left( \bigwedge_{i=1}^5 \bigwedge_{j=i+1}^5 x_i \neq x_j \wedge \forall y \left( \bigvee_{i=1}^5 y = x_i \right) \right).$$

- Intuitivně vysvětlete význam jednotlivých formulí.
- Dokažte, že teorie  $T$  není úplná nad jazykem  $\{f, c\}$  (s rovností).
- Je tato teorie úplná nad jazykem  $\{f\}$  (s rovností)? Svou odpověď zdůvodněte.



0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva  
dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{f, g\}$ , kde oba symboly jsou funkční s aritami po řadě 1 a 3.

**Příklad 6**

Nechť  $p_c(t)$ ,  $p_f(t)$  a  $p_g(t)$  označují po řadě počet čárek, počet symbolů  $f$  a počet symbolů  $g$  v termu  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$ . Zformulujte všeobecně platnou závislost  $p_c$  na  $p_f$

**20 bodů**

a  $p_g$  (tj. exaktně řečeno: najděte funkci  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takovou, že pro každý term  $t$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí  $p_c(t) = h(p_f(t), p_g(t))$ ). Dokažte tuto závislost strukturální indukcí.

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

**Definice.** Formule  $\xi$  jazyka  $\mathcal{L}$  predikátové logiky se nazývá *tautologie*, právě když  $\mathcal{M} \models \xi$  pro každou realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$ .

**Příklad 7**  
14 bodů

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  bez rovnosti, kde  $P$  je binární predikátový symbol, a dále je dána formule  $\psi \equiv \forall x \exists y P(x, y)$ . Dejte příklad formule  $\varphi$  jazyka  $\mathcal{L}$  takové, že formule  $\psi$  je sémantickým důsledkem teorie  $\{\varphi\}$ , ale  $\varphi \rightarrow \psi$  není tautologie. Dokažte, že při vaší volbě formule  $\varphi$  skutečně platí, že  $\varphi \rightarrow \psi$  není tautologie.

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{c\}$  s rovností, kde  $c$  je nulární funkční symbol (konstanta). Dokažte, že teorie  $T = \emptyset$  nad jazykem  $\mathcal{L}$  není henkinovská. Dejte příklad splnitelné henkinovské teorie nad jazykem  $\mathcal{L}$ .

**Příklad 8**  
16 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvažme systém  $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$  výrokové logiky, obsahující jen negaci a konjunkci.

**Příklad 1**

Definujte, co je formule systému  $\mathcal{L}$ .

**20 bodů**

Definujte, co je valuace (výrokových proměnných).

Definujte rozšíření valuace z výrokových proměnných na všechny formule systému  $\mathcal{L}$ .

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{A, B, C, D, E\}$  bez rovnosti. O každém z jeho mimologických symbolů určete, jakého je typu (predikátový/funkční) a jakou má aritu, víte-li, že  $(A(B, C(x, D(y)), z) \rightarrow E)$  je formule jazyka  $\mathcal{L}$ .

**Příklad 2**

**10 bodů**

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť  $\wedge$  značí operátor NOR, tj.  $\psi \wedge \xi \approx \neg(\psi \vee \xi)$ . Dejte příklad formule  $\varphi$  logického systému  $\mathcal{L}(\wedge)$ , která je ekvivalentní formuli  $A \rightarrow B$ .

**Příklad 3**  
10 bodů

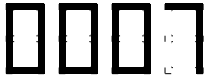
Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{\cdot\}$  s rovnostmi, kde  $\cdot$  je binární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci  $\mathcal{M}$ , kde:

- nosičem je množina  $\{a, b\}^+$  všech neprázdných slov nad abecedou  $\{a, b\}$ ;
- se realizuje jako zřetězení.

Zadejte formuli  $\varphi(x)$  jazyka  $\mathcal{L}$  takovou, že pro každé ohodnocení  $e$  platí

$$\mathcal{M} \models \varphi[e], \text{ právě když slovo } e(x) \text{ začíná a končí na stejné písmeno.}$$

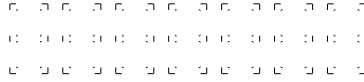
**Příklad 4**  
30 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P\}$  s rovností, kde  $P$  je binární predikátový symbol. Dále jsou dány formule  $\varphi, \psi, \xi, \zeta$  a teorie  $T_1, T_2, T_3$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ :

**Příklad 5**  
30 bodů

$$\varphi \equiv \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

$$\psi \equiv \forall x \forall y P(x, y)$$

$$\xi \equiv \forall x \exists y P(x, y)$$

$$\zeta \equiv \exists y \forall x P(x, y)$$

$$T_1 = \{\varphi, \psi\}$$

$$T_2 = \{\varphi, \xi, \neg \zeta\}$$

$$T_3 = \{\varphi, \neg \xi, \zeta\}$$

O každé z teorií  $T_1, T_2, T_3$  rozhodněte a dokažte, zda je splnitelná.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{P, f, g, c\}$  s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

**Příklad 6**  
36 bodů

symbol	typ	arita
$P$	predikátový	1
$f$	funkční	1
$g$	funkční	1
$c$	funkční	0

Uvažme teorii  $T = \{P(c), \forall x(P(x) \leftrightarrow P(f(f(x))))\}$ ,  $\forall x(f(g(x)) = x)$ ,  $\forall x(g(f(x)) = x)\} \cup \{\forall x(f^n(x) \neq x) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$  nad jazykem  $\mathcal{L}$ . Popište kanonickou strukturu  $\mathcal{M}$  teorie  $T$ . Dbejte přitom též na precizní popis nosiče. Dokažte, že do  $P_{\mathcal{M}}$  nepatří nic víc, než tvrdíte.

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

**Definice.** Obrazem zobrazení  $g: A \rightarrow B$  rozumíme množinu  $\{g(a) \mid a \in A\}$ .

**Příklad 7****24 bodů**

Je dán jazyk  $\mathcal{L} = \{f\}$  s rovností, kde  $f$  je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie  $T$  nad jazykem  $\mathcal{L}$  taková, že pro libovolnou realizaci  $\mathcal{M}$  jazyka  $\mathcal{L}$  platí

$$\mathcal{M} \models T, \text{ právě když obraz zobrazení } f_{\mathcal{M}} \text{ je}$$

- a) konečný;
- b) nekonečný.