Průsečíky množiny úseček

$S = \{ s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \}$ množina úseček v rovině.

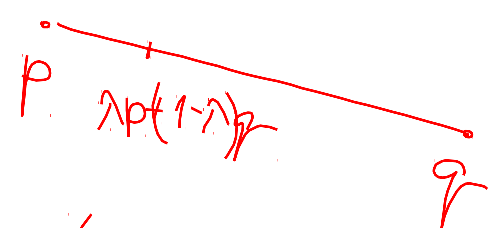
Úkolem je najít co nejefektivněji všechny jejich průsečíky.

Ke každému průsečíku najít všechny úsečky, na kterých leží.

Úsečka pq ...... $\lambda p + (1-\lambda) q \quad \lambda \in [0,1]$

Obecný bod úsečky, souřadnice $\lambda p_x + (1-\lambda) q_x$

$\lambda p_y + (1-\lambda) q_y$



$rs \qquad \mu r + (1-\mu) s$

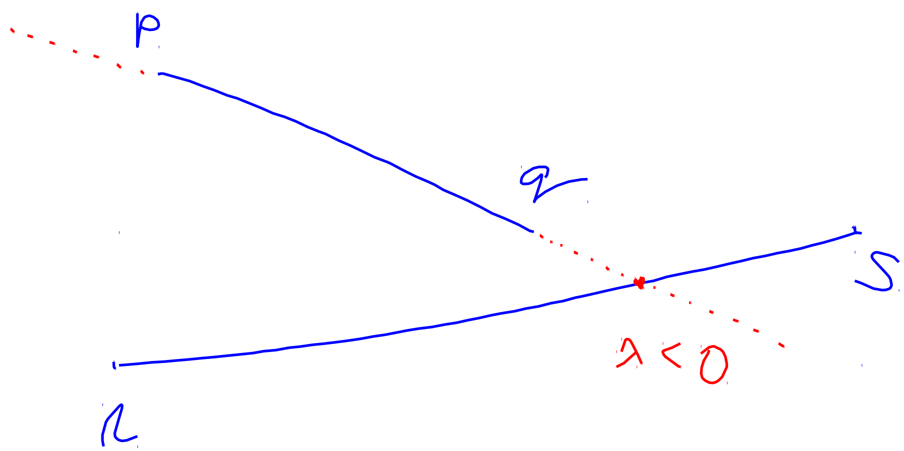
Průsečík je bod splňující $\lambda p + (1-\lambda) q = \mu r + (1-\mu) s$

Rovnice pro neznámé λ, μ.

Dve rovnice (pre súradnicu x a súradnicu y) o 2 neznámych λ, μ.

$\underline{pq}$ a $\underline{rs}$ majú priesečník, práve keď sústava má riešenie

$$\lambda \in [0,1], \quad \mu \in [0,1]$$



Spočítať všetky priesečníky nie je problém. Beriame každé dve úsečky a vyriešime sústavu dvoch lin. rovníc.

Dvojíc úsečiek je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

Naivné počítanie má čas. nárok $O(n^2)$.

V praxi je priesečníkov $\ll \binom{n}{2}$, označme k.

Budeme chtít algoritmus, který závisí nejen na n, ale také na k a pro $k \ll \binom{n}{2}$ je daleko lepší.

Prezentovaný algoritmus bude mít časovou složitost

$$O((n+k)\log n)$$

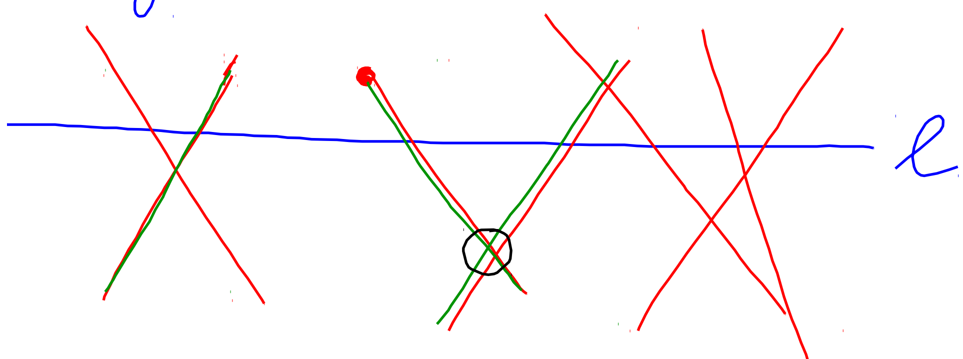
$$k \le \frac{n^2}{2}$$

$$\log k \le \log \frac{n^2}{2} \le \log n^2 = 2\log n = O(\log n)$$

Metoda zametací přímky (sweep line method)

Zametací přímka je na začátku algoritmu nad všemi úsečkami z množiny S. Postupně zametá směrem dolů a "zastavuje se" v koncových bodech úseček a v již spočítaných průsečících.

Všechny průsečíky nad zametací přímkou l jsou již zpracovány.
Při přechodu zametací přímky přes bod p se zpracují nové průsečíky nad přímkou l, ale jenom u úseček v okolí bodu p



Se zametací přímkou jsou vždy spojeny 2 struktury.

1. <u>Fronta událostí</u>   Událost (event) je bod, ve kterém se něco podstatného z hlediska algoritmu děje.
Na začátku jsou událostmi vždy konc. body úseček.
Fronta událostí se mění. Body, kterými prošla přímka l

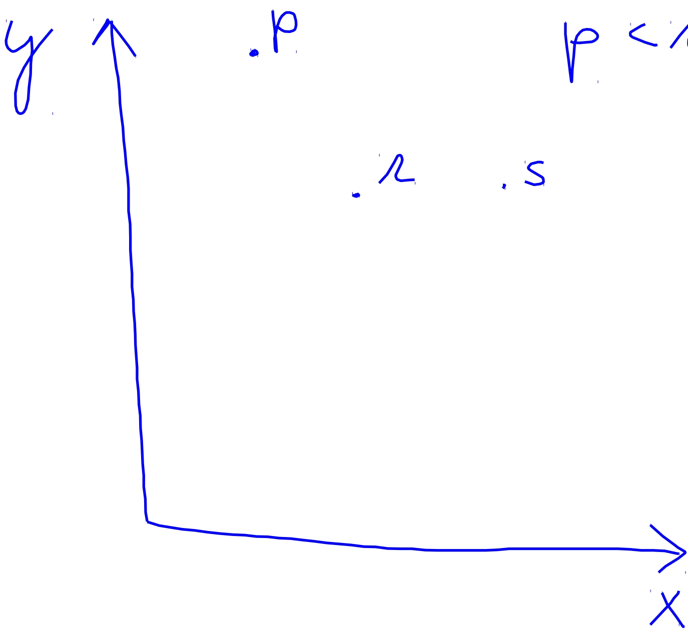
5

přestávají být událostmi, neboť vypočtené průsečíky pod ℓ mezi události zařazujeme.

Fronta Q … používáme lexikografické uspořádání.

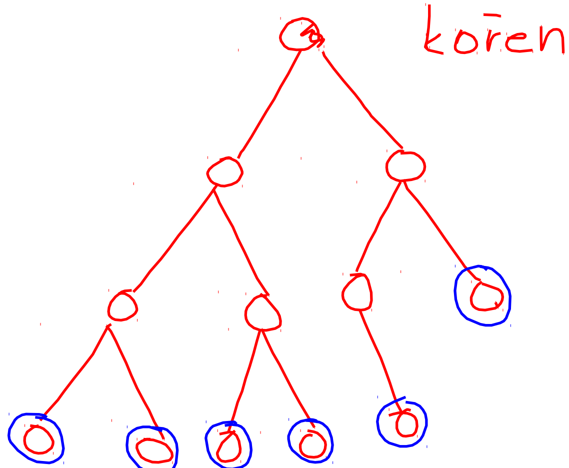
$$p < q \iff p_y > q_y \text{ nebo } p_y = q_y \text{ a } p_x < q_x$$

$p < r < s$



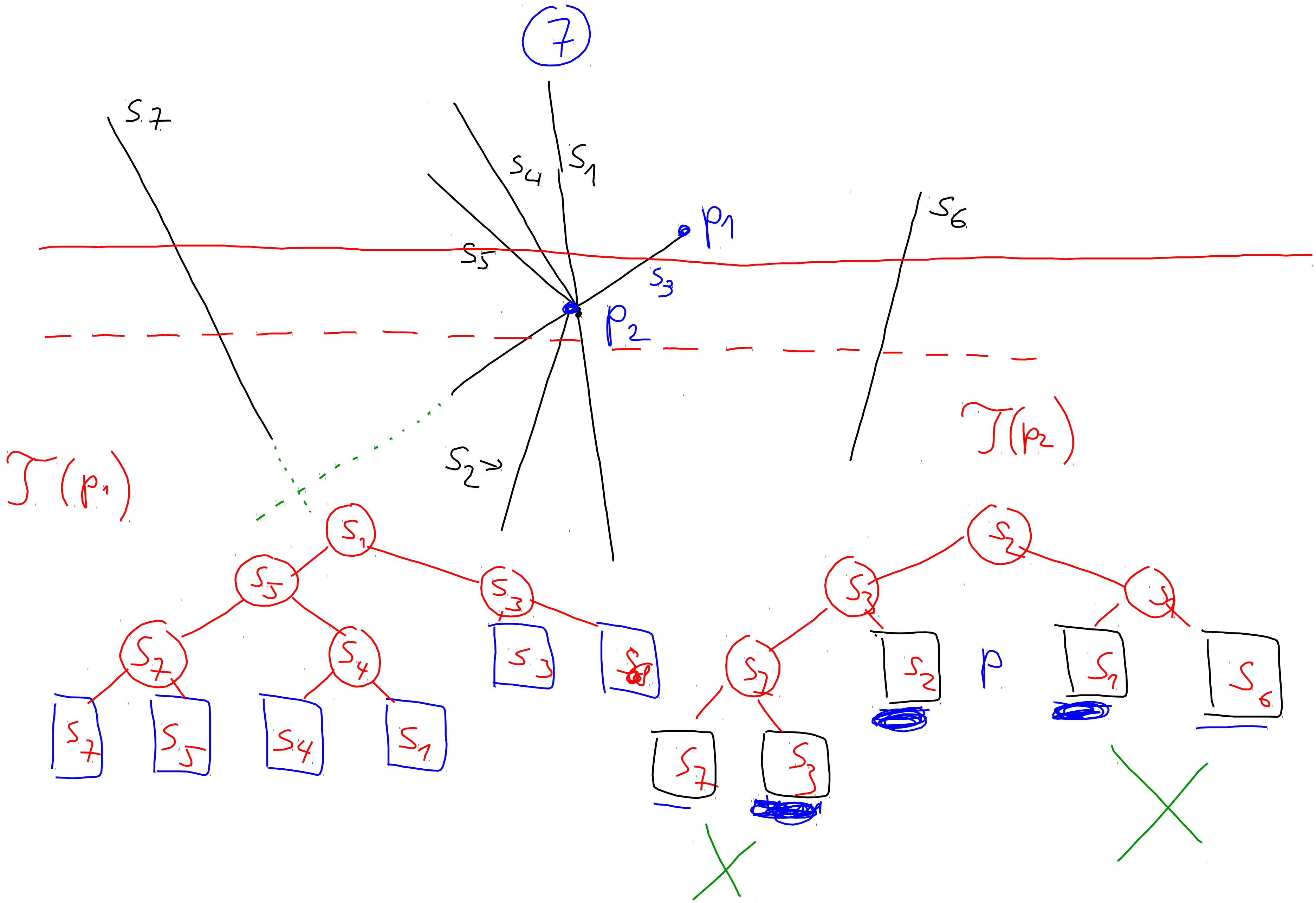
Vyvážený binární strom

Souvislý graf (neorientovaný)



listy binárního stromu

V listech stromu je udržováno pořadí uzlů (zleva do prava) které jsou jedinečný zamedací písmenem l

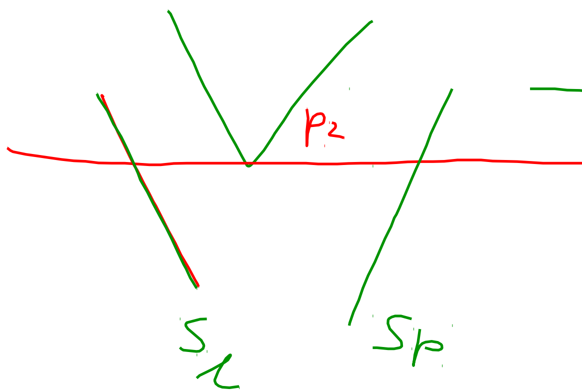

7
s7
s4
s1
p1
s6
s5
s3
p2
s2
T(p1)
T(p2)
p

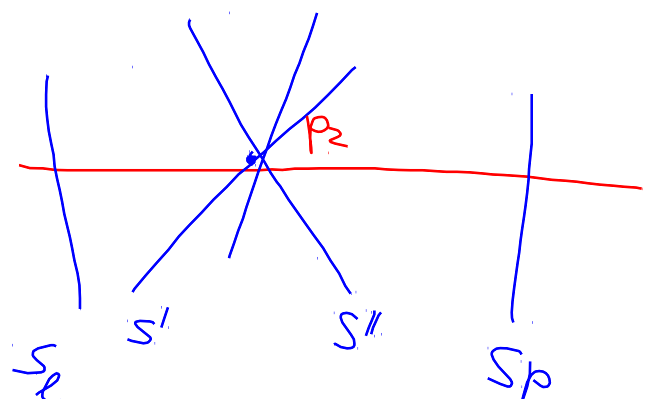
Vezmeme s' nejlevější ze všech z těch, co procházejí bodem p_2,

s'' nejpravější

s_ℓ levý soused s' (s_ℓ je ~~na~~ levý soused p)

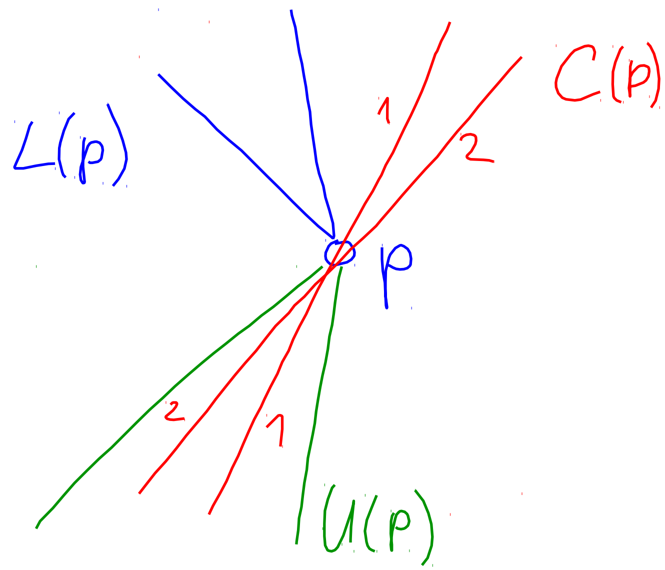
s_p pravý soused s'' (s_p je pravý soused p)





Počítáme průsečíky s' a s_ℓ, s'' a s_p, resp. s_ℓ a s_p pod přímkou ℓ.

Případný průsečík řadíme do fronty.

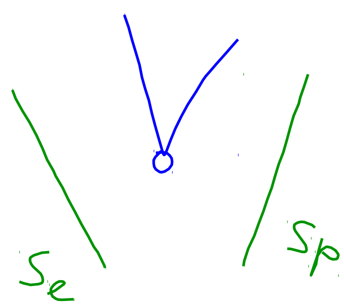


$\forall T$ L(p) a C(p)

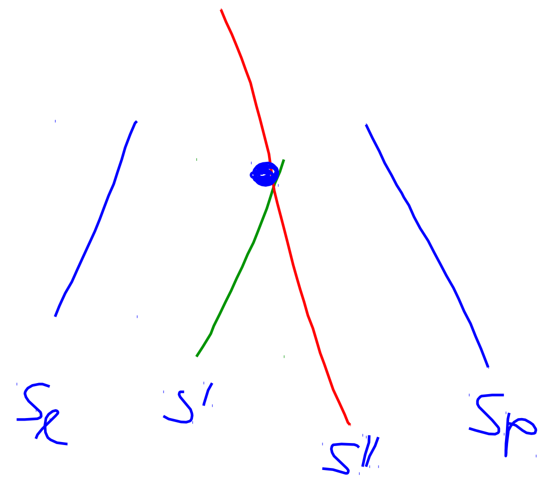
1

pod p v T jsou U(p) a C(p)

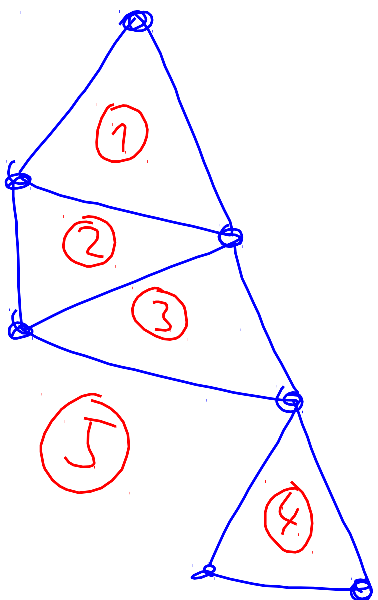
1



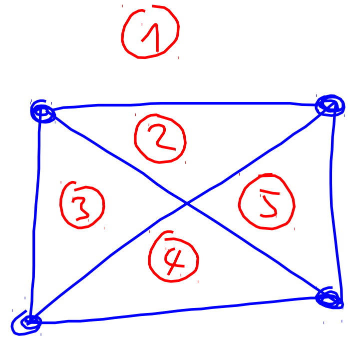
2



Rovinný graf lze zakreslit v rovině tak, že žádné dvě jeho hrany se neprotínají ve vnitřních bodech.



$7-10+5=2$



$4-6+5=2$

n_v počet vrcholů

n_e počet hran

n_f počet oblastí

Rovinný graf $n_v - n_e + n_f \geq 2$

Souvislý rovinný graf $n_v - n_e + n_f = 2$.

Graf, který není rovinný: úplný o 5 vrcholech.

Důsledek

Pro rovinný graf platí:

$$n_e \le 3n_v + 1$$

omezená oblast aspoň 3 hranami

každá hrana je hranicí 2 oblastí

$$n_f \le \frac{2n_e}{3} + 1$$

$$n_v - n_e + n_f \ge 2$$

$$n_v - n_e + \frac{2n_e}{3} + 1 \ge 2 \implies \boxed{n_e \le 3n_v + 1}$$

Časová zložitosť algoritmu

1. Vytvorenie fronty Q na začiatku. $O(n \log n)$.
2. Každý prvok z $U(p) \cup L(p) \cup C(p)$ nás núti spraviť obmedzený konečný počet operácií dlhých $O(\log n)$.

Označme $m(p) = |U(p) \cup L(p) \cup C(p)|$

Pri prechode udalosti p spravíme výpočty čas. zložitosti $m(p) \log n$

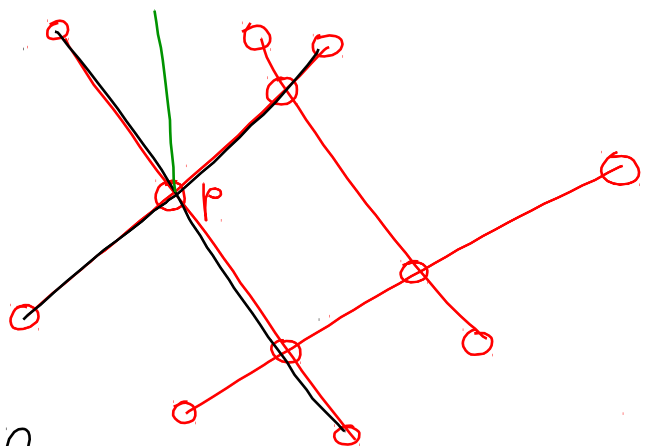
Celk. zložitosť

$$\sum_{p} m(p) \log n$$

Odhadujme odhad na

$$\sum_{p \text{ je udalosť}} m(p)$$

Z úseček, konc. bodů a průsečíků vytvoříme rovinný graf.



n_e počet [illegible]

p uzel (vrchol)

stupeň uzlu $s(p)$ je počet hran z p vycházejících

$s(p) \geq m(p)$

$m(p) = 2$

$s(p) = 4$

$m(p) = 3$

$s(p) = 5$

$$\sum_{p \text{ vrchol}} m(p) \leq \sum s(p) = 2n_e \leq 2(3n_v + 1)$$

Důsledek

$$= 6n_v + 2 = 6(2n+k)+2 = 12n + 6k + 2 = O(n+k)$$

$$\leq 12(n+k)$$