ÚLOHA LIN. PROGRAMOVÁNÍ V ROVINĚ

Máme množinu $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ polorovin v rovině.

Hledáme maximum funkce

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad (c_1, c_2) \neq (0,0)$$

na průniku polorovin $\bigcap_{i=1}^{n} h_i$.

Geometrický význam

Funkce f je zadána vektorem $\vec{c} = (c_1, c_2)$.

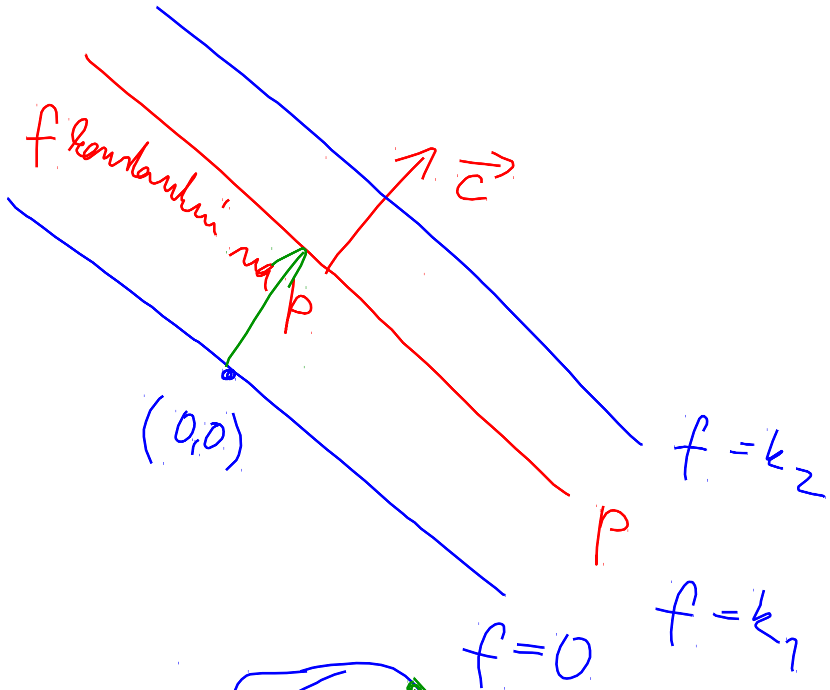
Uvažujme na rovině přímku

$$p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \ c_1 x_1 + c_2 x_2 = k\}$$

f je na této přímce konstantní (rovna k).

2

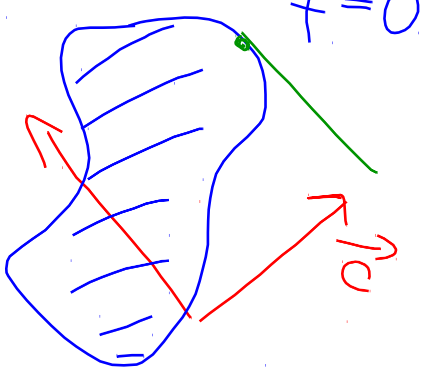
Přímka p má normálový vektor $\vec{c} = (c_1, c_2) \neq \vec{0}$



$$f((c_1, c_2)) = c_1^2 + c_2^2 > 0$$

Funkce f roste ve směru vektoru $\vec{c}$.

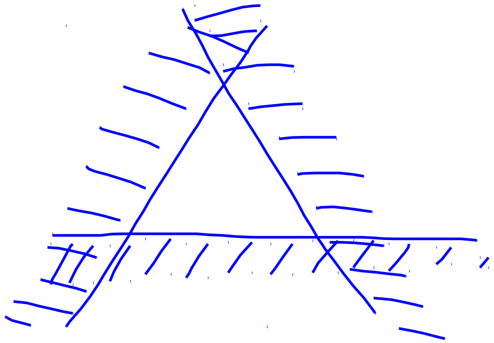
Jestliže hledáme maximum f na nějaké množině C, pak toto maximum je nabýváno v bodě, který je nejvzdálenější ve směru vektoru $\vec{c}$



3

Pro řešení úlohy lin. programování jsou tyto možnosti:

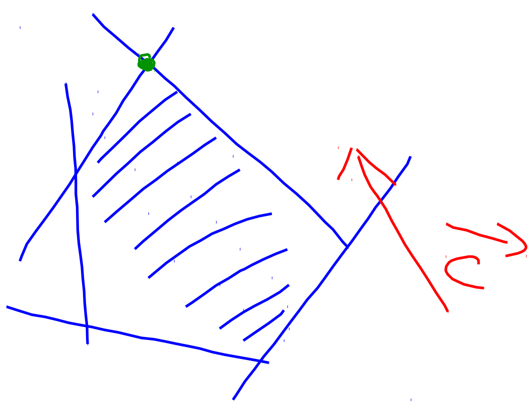
1. Průnik podmínek je prázdný.



V takovém případě bychom jako výstup chtěli 3 podmínky h_i, h_j, h_k takové, že

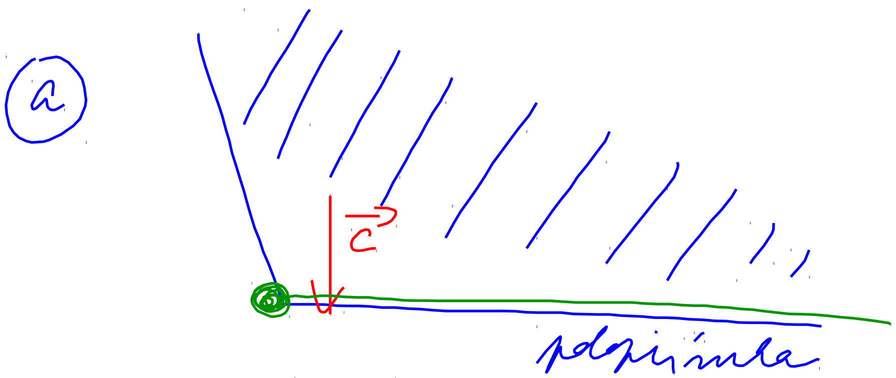
$$h_i \cap h_j \cap h_k = \emptyset.$$

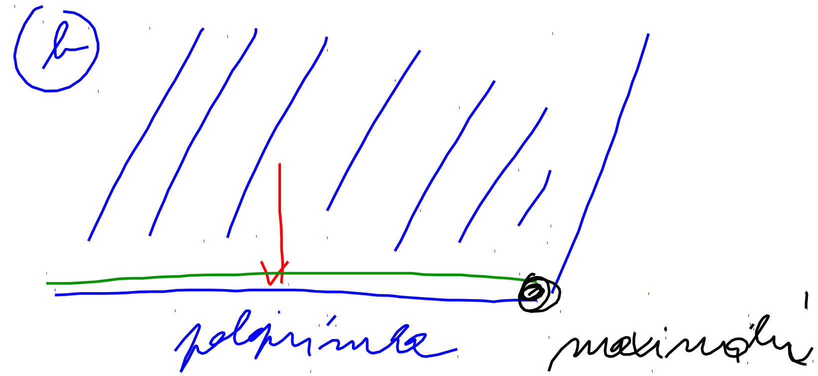
2. Úloha je řešitelná jednoznačně

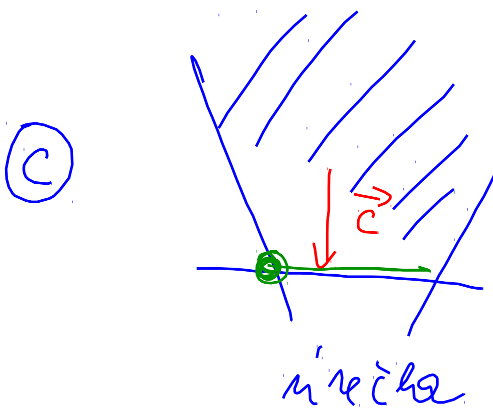


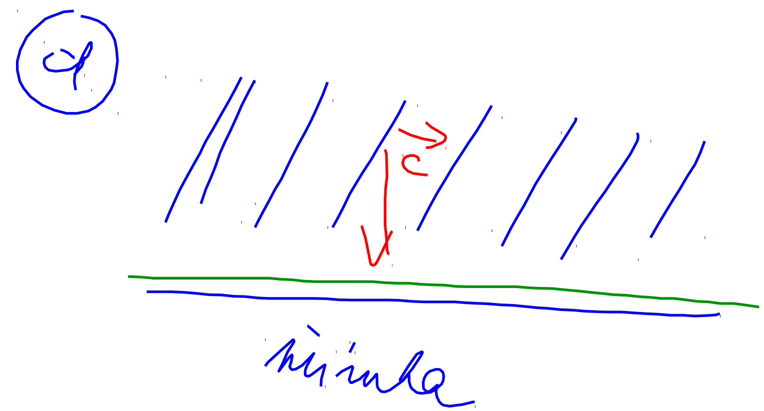
Máme jediný bod maxima.

3 Úloha má více řešení





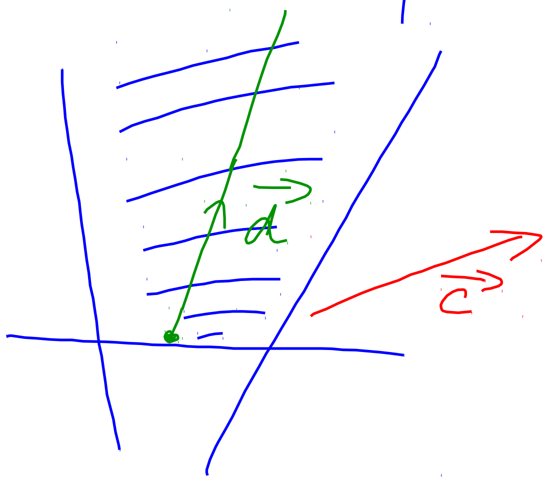




Lexikografické uspořádání, nejdřív podle x, pak podle y.

V bodě, ve kterých f nabývá maxima, chceme vybrat minimální z tohoto uspořádání.

4. Příklad je neprázdný, ale existuje v něm polopřímka na které f roste.



$$\langle \vec{d}, \vec{c} \rangle > 0$$

Výsledkem něčeho je polopřímka tvaru $p_0 + \lambda \vec{d}$, $\lambda \geq 0$, kde $p_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} h_i$ a $\vec{d}$ je vektor takový, že

$$\langle \vec{d}, \vec{c} \rangle > 0$$

Popis polorovin h_i

$$h_i: \quad \underline{a_{i_1}} x_1 + \underline{a_{i_2}} x_2 \leq \underline{b_i}$$

$$(a_{i_1}, a_{i_2}) \neq (0,0)$$

Jednodimenzionální úloha lin. programování

Najít maximum funkce $f(x) = cx$, $c \neq 0$

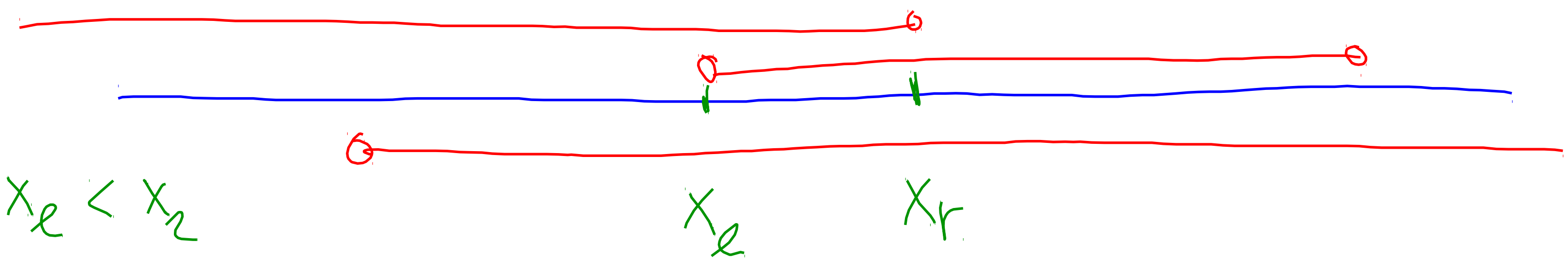
na průniku polopřímek

$$a_i x \le c_i \qquad i = 1, 2, \dots n$$

$$a_i \neq 0$$

Geometrická představa

Průnik prázdný $\emptyset$



$c > 0$ řešení je $x_r < \infty$, $x_r = \infty$ f neomezená

$c < 0$ řešení je $x_l > -\infty$, $x_l = -\infty$ f neomezená

7

$I = \{ i \in \{1,2,\dots n\},\ a_i > 0\}$ $\qquad J = \{ i \in \{1,2,\dots n\},\ a_i < 0\}$

$i \in I \qquad x \le \frac{c_i}{a_i} = l_i$ $\qquad i \in J \qquad x \ge \frac{c_i}{a_i} = l_i$

$x_l = \max\{l_i,\ i \in J\}$ $\qquad \max \emptyset = -\infty$

$x_r = \min\{l_i,\ i \in I\}$ $\qquad \min \emptyset = \infty$

$x_l > x_r$ průnik podmínek je prázdný

$x_l \le x_r$ průnik je neprázdný

$c > 0$ a $x_r = \infty$, pak f je neomezená

$x_r < \infty$, řešení je x_r

$c < 0$ a $x_l = -\infty$, f neomezená

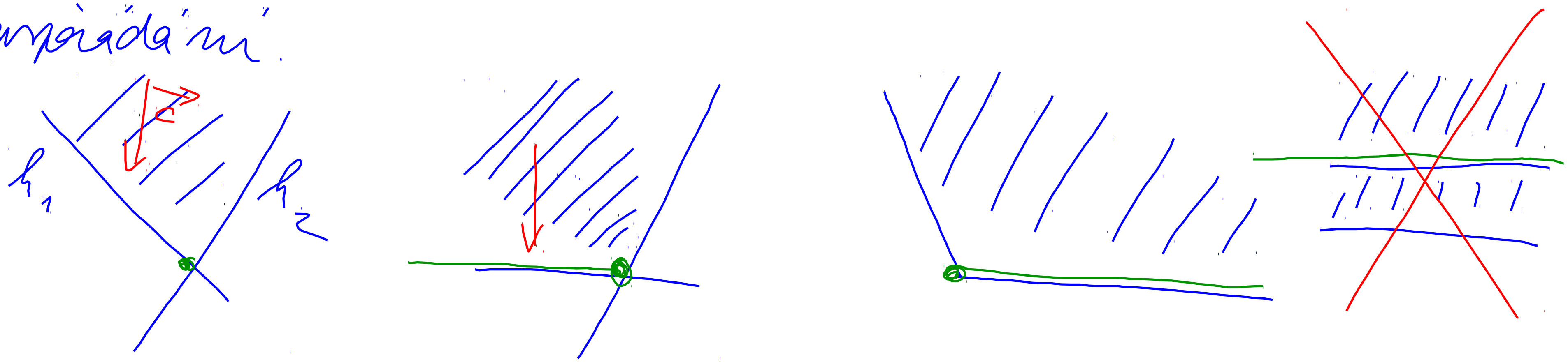
$x_l > -\infty$, řešení je x_l

Časová náročnost celého algoritmu je $O(n)$.

Omezená úloha lin. programování

Máme $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots h_n\}$ a předpokládáme, že

f je omezená na $h_1 \cap h_2$ a z bodů, ve kterých nabývá na $h_1 \cap h_2$ svého maxima lze vybrat nejmenší v lexikografickém uspořádání.



Označme $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_i$

Nechť v_i je bod v C_i, ve kterém

(1) f nabývá svého maxima na C_i

(2) ze všech bodů splňujících (1) je minimální v lexikografickém uspořádání.

$v_2 \in C_2$ je bod z průniku hranic l_1 a l_2

$v_2 \in l_1 \cap l_2$

$\{v_2\} = l_1 \cap l_2$

Hraniční přímky poloroviny h_j označme l_j.

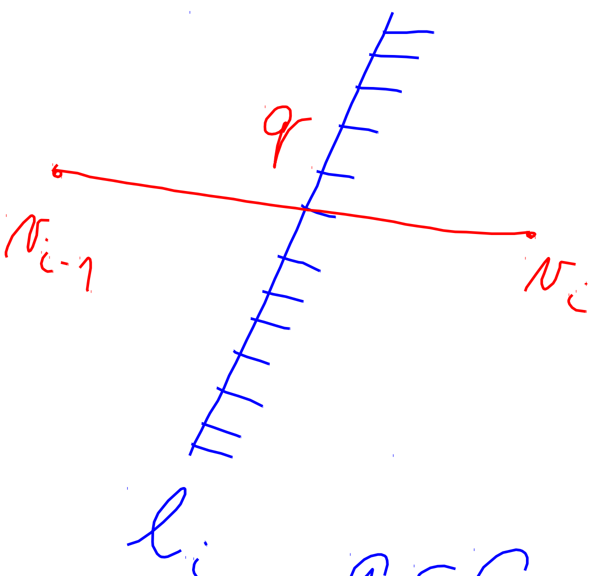
VĚTA: Jestliže $v_{i-1} \in C_i$, pak $v_i = v_{i-1}$.

Jestliže $v_{i-1} \notin C_i$, pak $v_i \in l_i$ a získáme ho řešením úlohy 1-dim. programování (pro $(i-1)$ podmínek).

Důkaz věty:

$C_{i-1} \supseteq C_i$ jestliže $v_{i-1} \in C_i$ a je bodem, kde f nabývá maxima na C_{i-1}, pak na C_i nabývá ve v_i také maxima.

Nechť $v_{i-1} \notin C_i$. $v_i \in C_i$. Předpokládejme, že $v_i \notin l_i$



Úsečka v_{i-1}, v_i protíná l_i v bodě q.

Na této úsečce je funkce f lineární

$$f(v_{i-1}) \geq f(q) \geq f(v_i).$$

Kdyby $f(v_{i-1}) > f(v_i)$, pak

$$f(v_{i-1}) > f(q) > f(v_i)$$

$q \in C_i$. f nabývá ve q větší hodnoty než ve v_i, spor.

(11)

jestliže $f(v_{i-1}) = f(v_i)$, pak

$$f(v_{i-1}) = f(q) = f(v_i)$$

v_i leží v C_{i-1}. $v_{i-1} < v_i$ v lexikografickém uspořádání

Potom v lexikografickém uspořádání

$$v_{i-1} < q < v_i$$

To je spor s definicí v_i (není minimální v lexikografickém uspořádání na C_i).

Závěr: $v_i \in C_i$.

(12)

Nájdeme $v_i = (x_1, x_2)$. $v_i \in l_i$

$$a_{i_1} x_1 + a_{i_2} x_2 = b_i.$$

Predp., že $a_{i_2} \neq 0$. Potom x_2 vypočítame pomocou x_1.

$$(*) \qquad x_2 = \frac{b_i - a_{i_1} x_1}{a_{i_2}}$$

Navyše (x_1, x_2) musí splňovať nerovnice:

$$a_{j_1} x_1 + a_{j_2} x_2 \leq b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1$$

Dosadením z $(*)$

$$a_{j_1} x_1 + a_{j_2} \left(\frac{b_i - a_{i_1} x_1}{a_{i_2}} \right) \leq b_j$$

13

$$\left(a_{j1} - \frac{a_{j2}\, a_{i1}}{a_{i2}}\right) x_1 \leq b_j - \frac{a_{j2}\, b_i}{a_{i2}} \qquad (**)$$

$$j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$$

Na množině $(**)$ maximalizujeme funkci

$$g(x_1) = f\left(x_1, \frac{b_i - a_{i1} x_1}{a_{i2}}\right) = c_1 x_1 + c_2 \left(\frac{b_i - a_{i1} x_1}{a_{i2}}\right) =$$

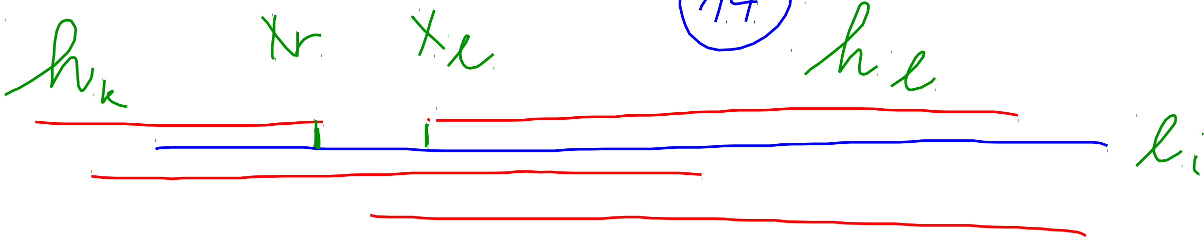
$$= \left(c_1 - c_2 \frac{a_{i1}}{a_{i2}}\right) x_1 + \frac{c_2 b_i}{a_{i2}}$$

Časová náročnost řešení této úlohy je $O(i)$.

Konstantu nemusíme uvažovat, proto bereme

$$g(x) = \left(c_1 - c_2 \frac{a_{i1}}{a_{i2}}\right) x_1$$

Nemá-li úloha řešení, je c_i záporné.



$l_i \cap h_k \cap h_l = \emptyset$

$h_i \cap h_k \cap h_l = \emptyset$

Věta dává algoritmus na řešení úlohy omezeného lin. programování.

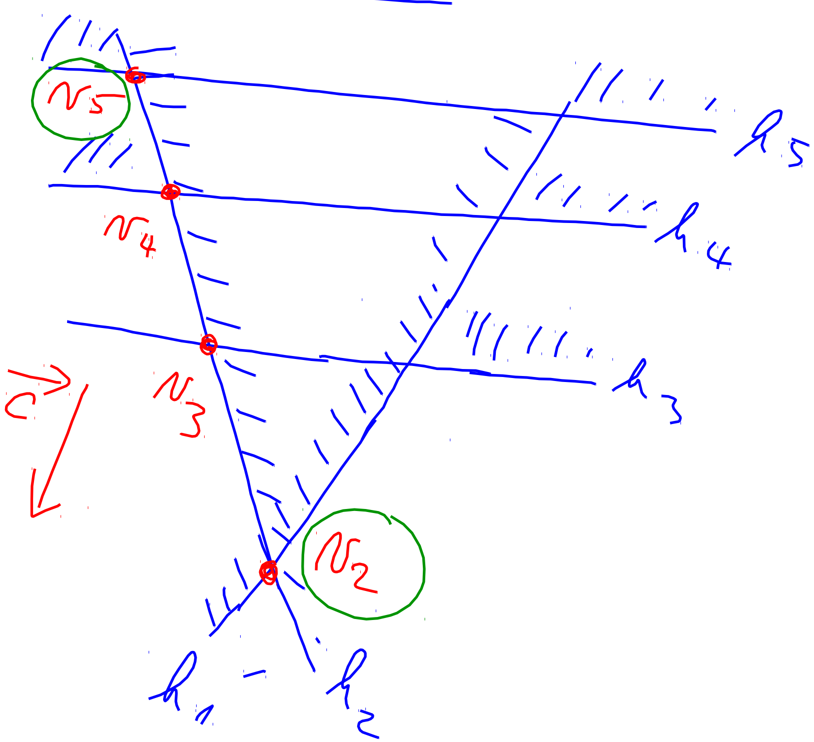
Najdeme $v_2 = l_1 \cap l_2$ a postupně počítáme $v_3, v_4, \dots, v_n$.

Algoritmus 16 v pseudo.pdf od 7 do konce bez náhodného uspořádání

Časová náročnost: $O(2)+O(3)+O(4)+\dots+O(n)$
$= O(2+3+\dots+n) = O\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right) = O(n^2)$.

Vyřešíme tím, že budeme brát náhodné uspořádání polorovin $h_3, h_4, \dots, h_n$.

Příklad



Vezmeme pořadí

$h_5 \; h_3 \; h_4$

$v_2 \; v_5 \; v_5 \; v_5$

X_i .... náhodná veličina $= 1$ jestliže $v_{i-1} \notin h_i$

$= 0$ jestliže $v_{i-1} \in h_i$

Časová náročnost je potom také náhodná veličina

$$O(2) + O(3)\cdot X_3 + O(4) X_4 + \dots + O(n) X_n$$

Očekávaná časová náročnost algoritmu při náhodném uspořádání podmínek je střední hodnota výše uvedené náhodné veličiny.

X náhodná veličina nabývající hodnot $a_1, a_2, \dots a_k$.

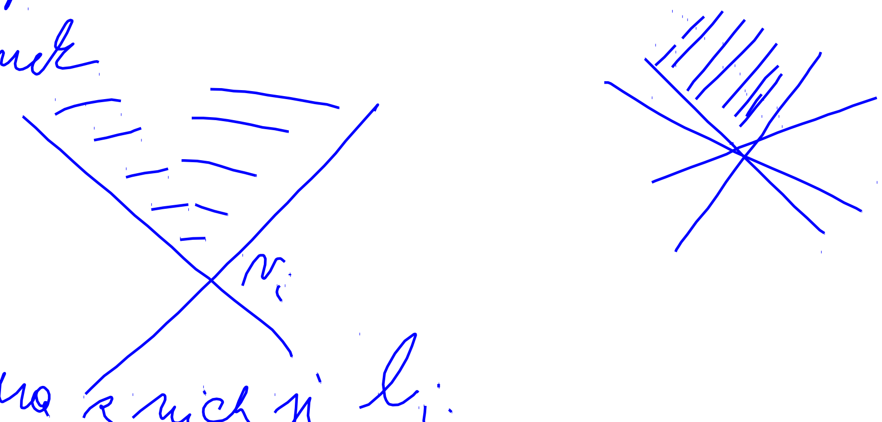
$$E(X) = a_1 \cdot p(X=a_1) + a_2 p(X=a_2) + \dots + a_k p(X=a_k).$$

$$E\big(O(2) + O(3)X_3 + O(4)X_4 + \dots + O(n)X_n\big) =$$

$$= \sum_{i=3}^{n} O(i)\,E(X_i) + O(1)$$

Potřebujeme spočítat střední hodnotu X_i.

$v_{i-1} \notin h_i \iff v_i$ je místo průniku dvou hraničních přímek



a jedna z nich je l_i.

$$p(v_{i-1} \notin h_i) =$$

$p(v_i$ leží na průniku l_i a další přímky$)$

$$= \frac{2}{i}$$

$$E(\qquad) = \sum_{i=3}^{n} O(i)\,E(X_i) + O(1)$$

$$= \sum^{n} O(i)\,\frac{2}{i} + O(1)$$

$$= \sum_{2}^{n} O(1) = O(n)$$

Očekávaný čas náhodnostního algoritmu je $O(n)$

Algoritmus 16 v pseudo.pdf   7 - konec

Náhodné uspořádání je dáno algoritmem 15 v pseudo.pdf