DELAUNAYOVA TRIANGULACE

$P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ množina bodů v rovině

Chceme triangulovat konv. obal množiny P tak, aby úhly trojúhelníků „byly co největší".

Minule … všechny triangulace konvexního obalu P mají stejný počet $\triangle$ …. m

T triangulace $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3m}$

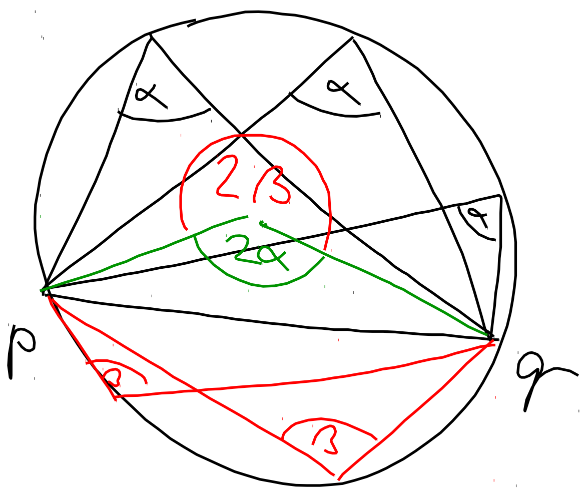
$A(T) = \{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3m}\}$

Triangulace uspořádáme lexikograficky podle $A(T)$

2

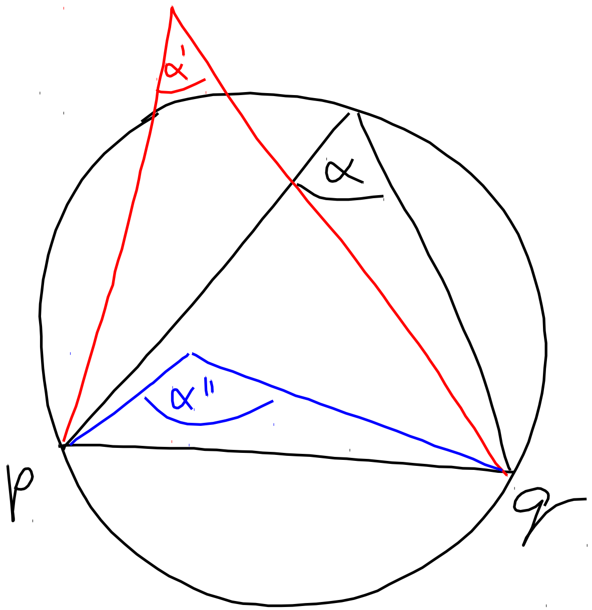
Největší triangulace v tomto uspořádání se nazývá
ÚHLOVĚ OPTIMÁLNÍ

Jiný pojem ... potřebujeme středoškolskou geometrii



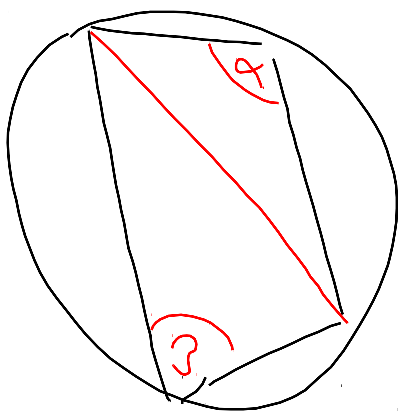
Obvodové úhly nad pq jsou všechny stejně velké
úhel pak polovinou středového úhlu
$\alpha + \beta = 180^\circ$

3



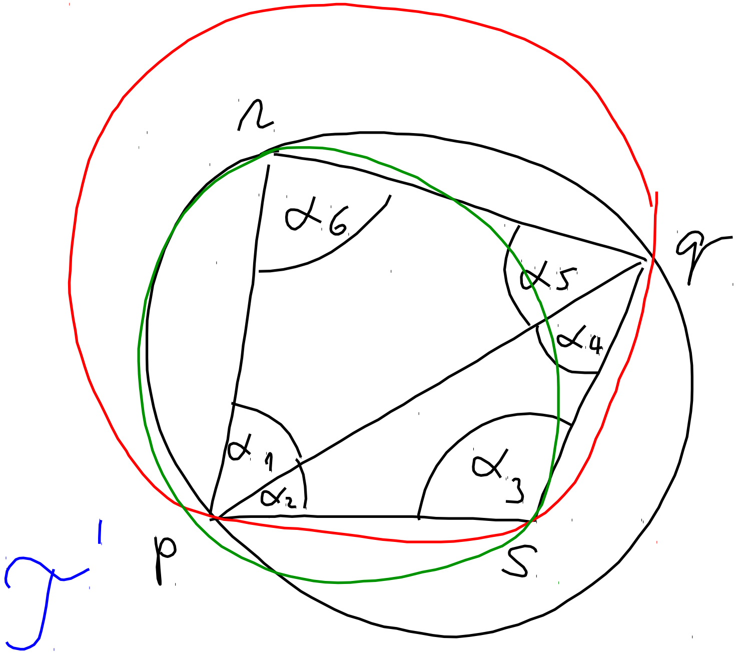
$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

Čtyřúhelníku lze opsat kružnici, právě když součet protilehlých úhlů je 180°.

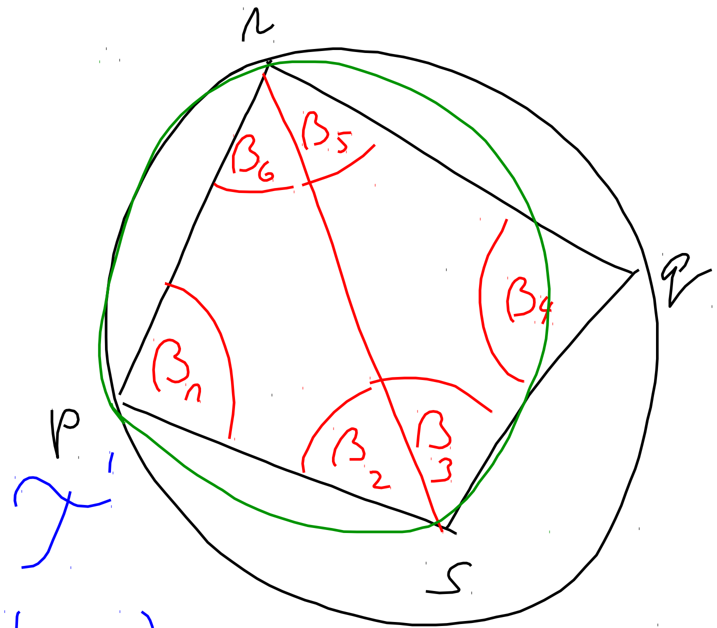


$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

4



flip $\Longrightarrow$



$$\min\{\alpha_i\} < \min\{\beta_i\}$$

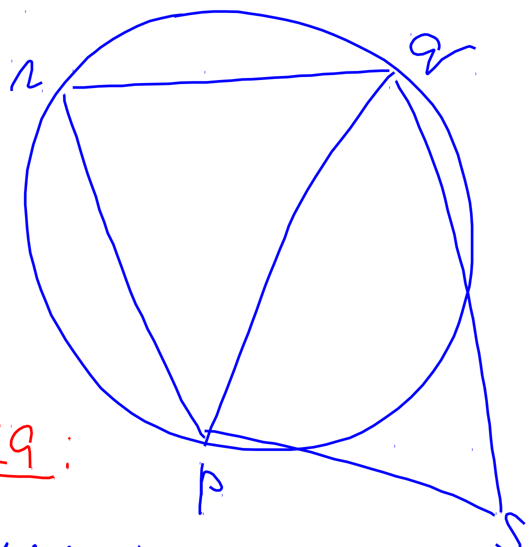
Odtud plyne, že $\mathcal{A}(T) < \mathcal{A}(T')$.

$\beta_1 > \alpha_1 \qquad \beta_6 > \alpha_4$ Podobně pro β_5 a β_3 vezme

$\beta_4 > \alpha_5 \qquad \beta_2 > \alpha_5$ kružnici opsanou Δrqs.

5

Hrana pq v triangulaci T se nazývá legální, jestliže příslušné $\triangle pqr$ a $\triangle pqs$ jsou takové, že s neleží uvnitř kružnice opsané $\triangle pqr$.



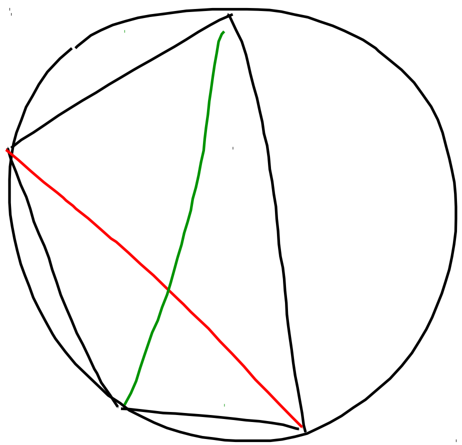
Opačně hrana pq je ilegální, jestliže s leží uvnitř kružnice opsané $\triangle pqr$.

Triangulace se nazývá LEGÁLNÍ, jestliže jsou všechny její hrany legální.

Věta: Úhlově optimální triangulace je legální.

Kdyby tomu tak nebylo, provedeme flip a dostaneme spor s opt. úhlově opt. triangulace.

Opačné tvrzení neplatí:



Obě triangulace jsou legální, ale jedna je zřejmě optimální.

(v rukopise nad slovem „jedna“ je doplněno „jasně“)

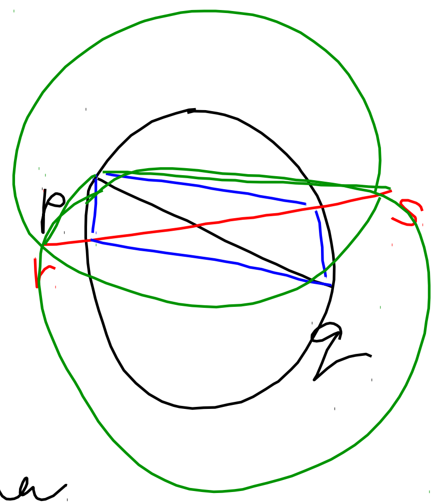
TŘETÍ POJEM DELAUNAYOVA TRIANGULACE

1. tvar definice Delaunayův graf

p_i a p_j jsou spojeny hranou, právě když existuje kružnice na které leží p_i a p_j a nic další bod z množiny P leží vně této kružnice.

Lemma: Takto definovaný graf je rovinný.

Dk sporem: Nechť pq a rs jsou dvě hrany, které se protínají.



Pak v každé kružnici obsahující rp a qs leží p nebo q.

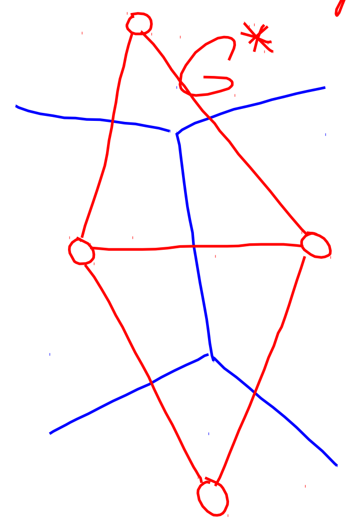
$\longleftrightarrow$

pq Del. hrana
$\Longleftrightarrow \exists k \quad p, q \in k, \; r, s$ mimo k. Pak rs nemá tuto vlastnost.

<u>Pozorování</u> Delaunayův graf je duální graf k diagramu Voronoia.

Rovinný graf G . . . duální graf G^* vrcholy jsou oblasti v G

G G



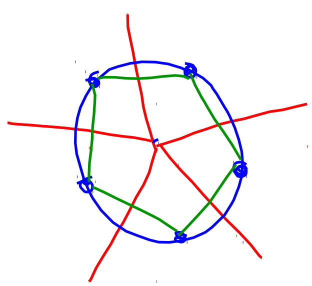
V duálním grafu spojíme 2 vrcholy hranou právě když odpovídající oblasti v G jsou odděleny hranou G.

Oblasti v Delaunayově grafu (omezené) jsou k-úhelníky.

Delaunayova triangulace je triangulace vzniklá z Delaunayova grafu triangulací těchto k-úhelníků.

k-úhelník se v D. grafu vyskytne právě když jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

V-diagram

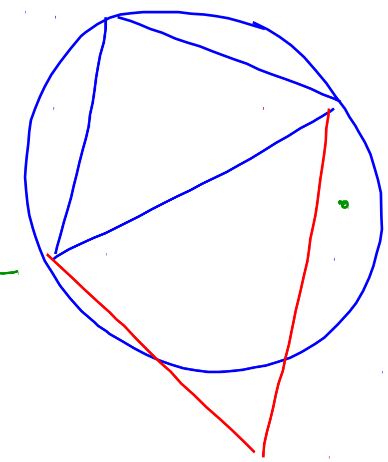


Situace, že v D. grafu je k-úhelník s $k \geq 4$, nastane, právě když existuje kružnice na které leží aspoň 4 body z P a uvnitř není žádný další bod z P.

Říká se, že body množiny P jsou v obecné poloze, právě když žádné 4 neleží na kružnici.

<u>Věta 1</u> Triangulace konv. obalu množiny P je Delaunayova, právě když pro každou její hranu $p_i p_j$ platí: v kružnici opsané trojúhelníku $\Delta p_i p_j p_k$ neleží další ~~bod~~ množiny P.

Bez důkazu:



Odtud plyne: Každá D triangulace je legální.

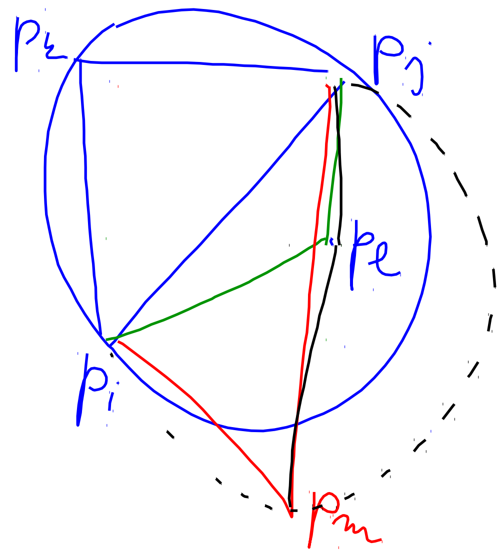
Věta 2 Každá legální triangulace je Delaunayova.

Důkaz: T je legální, ale není Delaunayova.

$\exists \Delta \in T$ a bod uvnitř jeho kružnice opsané

$(\Delta p_i p_j p_k,\ p_l)$

Ze všech takových dvojic vybereme takovou, že $\sphericalangle p_i p_l p_j$ je maximální



$p_l \notin \Delta p_i p_j p_m$

$\sphericalangle p_j p_l p_m$

$> \sphericalangle p_j p_l p_i$.

Spor, s tím, jak jsme vybrali body $p_i p_j p_k p_l$.

K $\Delta p_i p_j p_k$ existuje přilehlý $\Delta p_i p_j p_m \in T$

Závěr: (1) Množina legálních triangulací = množině D. triangulací.

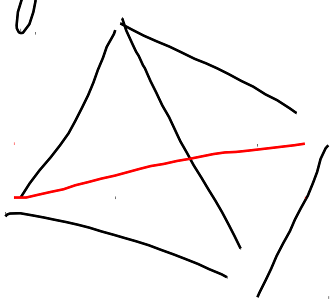
(2) Každá úhlově opt. triangulace je legální, tj. i Delaunayova.

(3) Jsou-li body množiny P v obecné poloze, pak existuje právě jedna D. triangulace, právě jedna legální triangulace a ty se rovnají jediné úhlově optimální triangulaci.

Algoritmus pracuje s legálními a ilegálními hranami, a proto vede na legální triangulaci, která podle předchozího je rovněž Delaunayova.

<u>Triviální algoritmus</u>:

– vytvoří nějakou triangulaci a odstraňuje ilegální hrany (flipem) tak dlouho, až v triangulaci žádná není.



$$T \to T' \to T''$$

$$a(T) < a(T') < a(T'')$$

Náhodnostní přírůstkový algoritmus

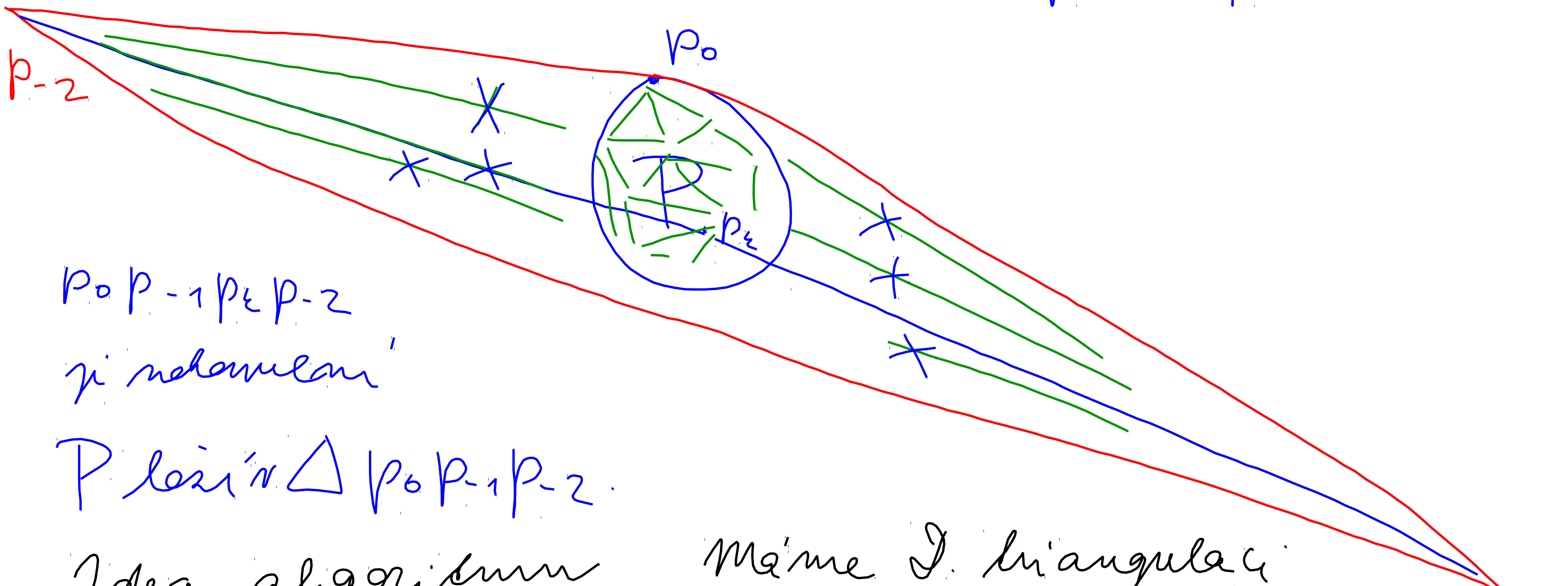
Postupně přidáváme body a triangulaci „zjemňujeme".

Základní rámec: K množině P přidáme body p_{-1} a p_{-2} takové, že s bodem $p_0 \in P$, který má v P maximální y-ovou souřadnici (max. x-ovou) tvoří $\triangle p_0 p_{-1} p_{-2}$ takový, že

$P \subseteq \triangle p_0 p_{-1} p_{-2}$

Z D. triangulace $P \cup \{p_{-1}, p_{-2}\}$ odstraněním úseček jdoucích z p_{-1} a p_{-2} vznikne D. triangulace množiny P.

Částečná specifikace požadavků na p_{-1} a p_{-2}



$p_0 p_{-1} p_r p_{-2}$
je nekonvexní

P leží v $\triangle p_0 p_{-1} p_{-2}$.

<u>Idea algoritmu</u> Máme D. triangulaci

$\triangle p_0 p_{-1} p_{-2}$ na množině $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \dots p_{r-1}\}$.

Přidáme bod p_r. Najdeme $\triangle$ nebo hranu na které leží.

(K tomu potřebujeme vyhledávací strukturu.

T triangulace pro $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \dots, p_{r-1}\}$

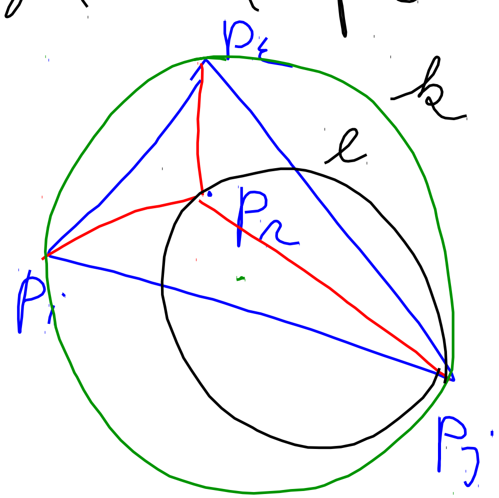
D vyhledávací struktura pro tuto triangulaci

- orient. graf
- listy jsou trojúhelníky triangulace
- vnitřní uzly jsou trojúhelníky předchozích triangulací

Bereme náhodné pořadí bodů $p_1, p_2, \dots p_n$.

Po přidání p_r může nastat 2 možnosti

1

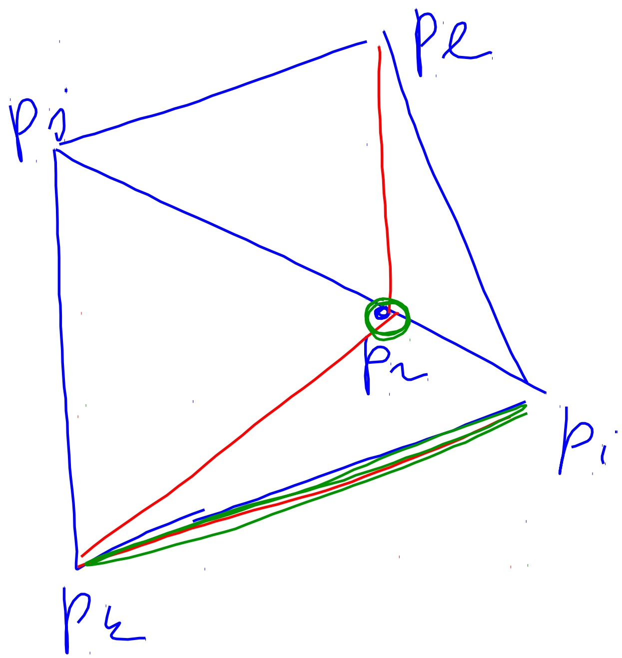


Vezmeme kružnici l dotýkající se k procházející hranou $p_r p_j$. Uvnitř l nic neleží (je dáno k), tedy $p_r p_j$ je legální hrana. Stejně $p_r p_k, p_r p_i$.

Problém může být s hranami $p_i p_j, p_i p_k, p_j p_k$

17

2



Jak lze dokázat, že
$p_r p_l$ a $p_r p_k$ jsou legální.

Problém může být
v $p_k p_i$, $p_k p_j$, $p_j p_l$, $p_l p_i$.

Řešíme pomocí procedury legalizace $(p_k p_i, p_r, \mathcal{T})$.