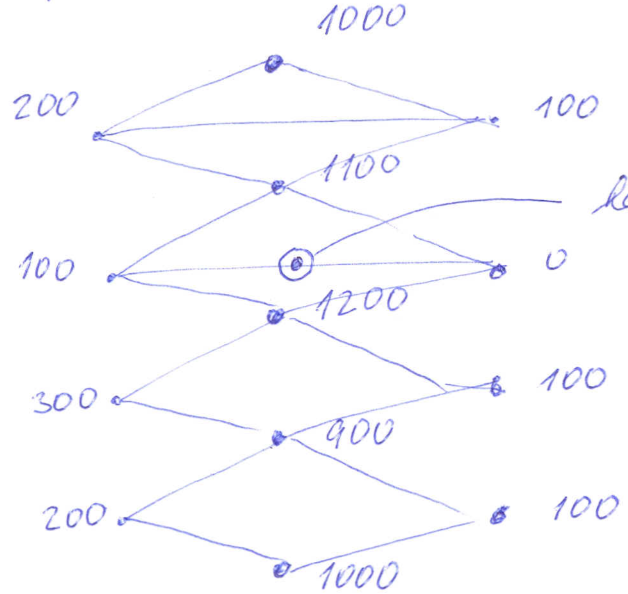
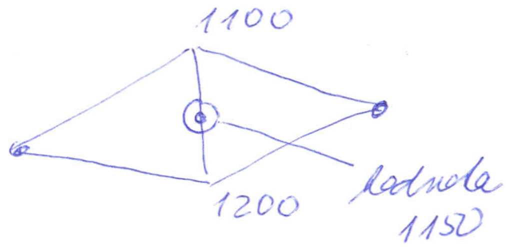
/ DELAUNAYOVA TRIANGULACE

<u>Motivace</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ měří výšku

Hodnoty na $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, aproximace f pomocí triangulace





špatná je triangulace, kde Δ mají malé úhly

<u>Věta</u> P množina n bodů v rovině. Konv. obal má k hran, z P nichž žádné tři neleží v přímce. Potom má každá triangulace $2n-2-k$ trojúhelníků a $3n-3-k$ hran.

<u>Dk</u> Počet Δ ... m. Každý Δ má tři hrany, k hranou pouze jednoho

2

Počet hran je $h = \frac{3m+k}{2}$.

Eulerova věta

$$n - h + (m+1) = 2$$

$$n - \frac{3m+k}{2} + m = 1$$

$$m = 2n - k - 2$$

$$h = 3n - k - 3 \qquad \square$$

T triangulace s m trojúhelníky.

Ta má $3m$ úhlů

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3m}$$

$$a(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{3m}),$$

Lexikografické uspořádání

$$a(T) < a(T')$$

$\exists i \quad \alpha_j = \alpha_j' \quad$ pro $j < i$,

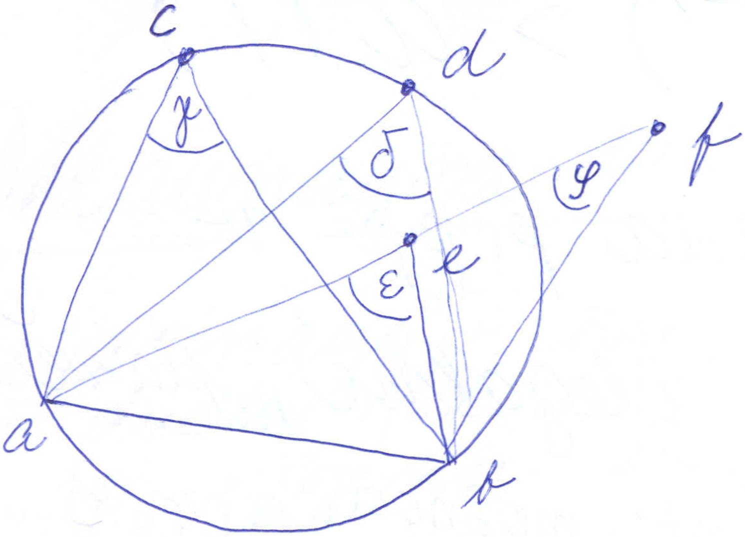
$$\alpha_i < \alpha_i'$$

Triangulace T se nazývá úhlově optimální, jestliže

$$a(T) \geq a(T')$$

pro všechny další triangulace.

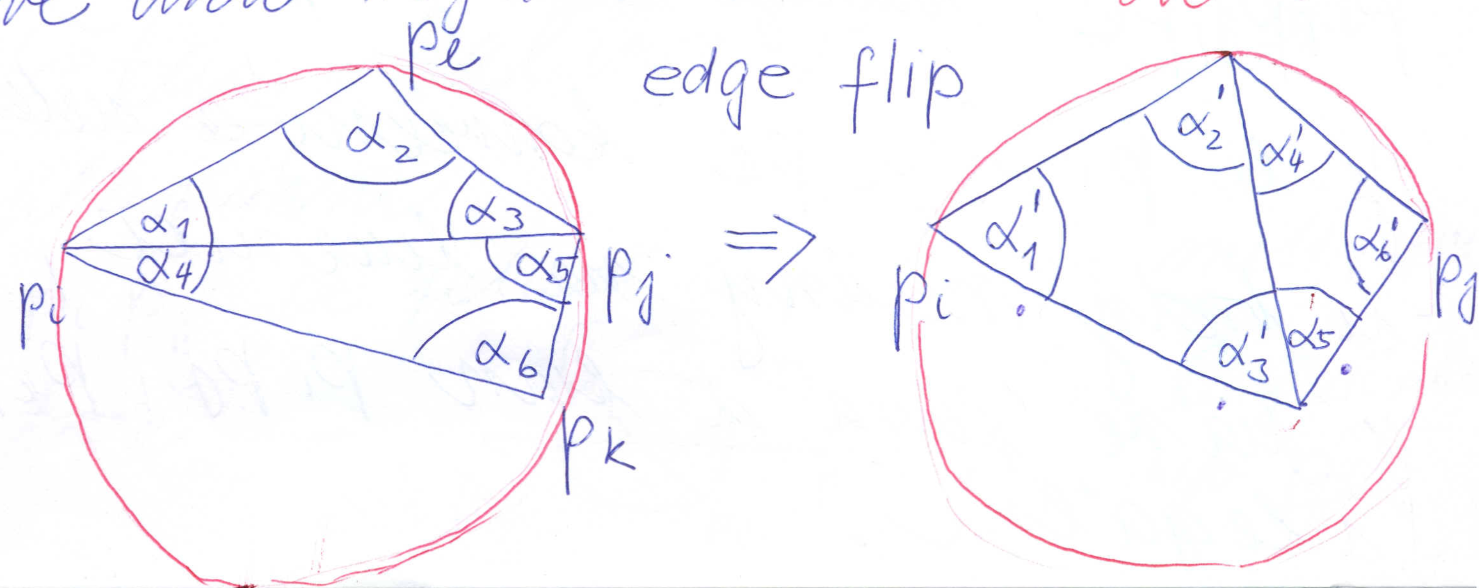
<u>Geometrie ze střední školy</u>



obr 7

Hrana $e = p_i p_j$ triangulace ležící ve dvou trojúhelnících

obr 8



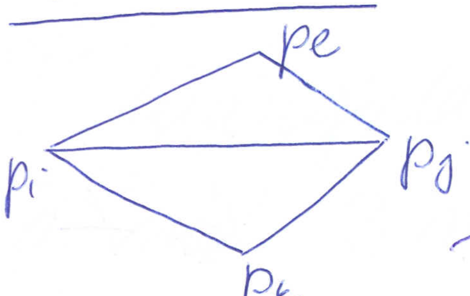
$p_i p_j$ je ilegální, jestliže

$$\min_{1\le i\le 6} \alpha_i < \min_{1\le i\le 6} \alpha_i'$$

Je-li T' získána z T flipem ilegální hrany, pak

$$A(T') > A(T)$$

Lemma Hrana $p_i p_j$ v



je ilegální, právě

Probrat možnosti obr 9

když ~~kružnice~~ určená body p_i, p_j, p_k obsahuje uvnitř p_ℓ.

Je-li $p_i p_j p_k p_\ell$ konvexní a neleží-li body všechny na kružnici, je právě jedna z hran $p_i p_j$, $p_k p_\ell$ ilegální.

Legální triangulace = triangulace neobsahující žádnou ilegální hranu. ALGORITMUS str. 35

Každá úhlově optimální triangulace je legální, ale ne naopak.

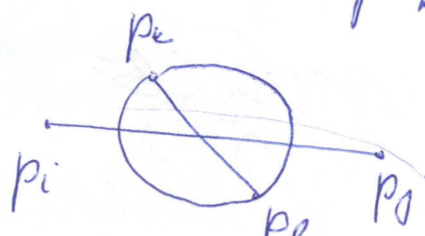
Delaunayova triangulace

Obr 10
11
12

Delaunayův graf množiny P
= duální graf k V-diagramu
$p_i p_j$ spojeny hranou, jestliže leží na kružnici, která neobsahuje uvnitř další bod P

Věta: Delaunayův graf je planární.

$p_i p_j$ se protíná s $p_k p_l$ ve vnitřním bodě



Potom C_{ij} obsahuje p_k nebo p_l

Delaunayův graf se skládá z konvexních k-úhelníků

jsou-li body množiny P v obecné poloze (žádné 4 na jedné kružnici) je D. graf triangulace.

D. triangulace = triangulace vzniklá triangulací konv. mnohoúhelníků D. grafu

Věta: Triangulace T je Delaunayova právě když kružnice opsaná △ z T neobsahuje uvnitř žádný další bod z P.

Věta: Triangulace je legální právě když je Delaunayova.

7

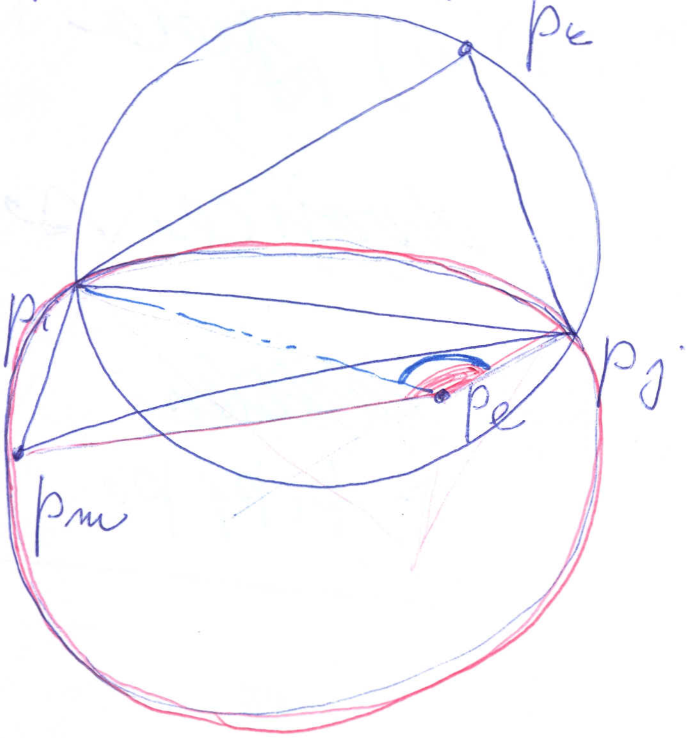
obr 14.

Dk: D. triangulace nemá ilegální hranu $\Rightarrow$ je legální

T legální a není D.

v kružnici $C(p_i, p_k, p_j)$ leží bod p_e

$p_i p_j$ musí být hranou jiného $\triangle p_i p_j p_m$



~~Předp. že $p_e \notin \triangle p_i p_j p_m$ pak $\angle p_i p_j$ je ilegální takový, že $\sphericalangle p_i p_e p_j$ je minimální~~

~~Existuje p_m tak, že $\sphericalangle p_m p_e p_j$ je menší~~ (= nejmenší

Vezmeme dvojici $(\triangle, \text{bod}) =$
$= (p_i p_j p_k, p_e)$ tak, že

8

$\sphericalangle (p_i p_j p_e)$ ~~max~~ minimální

a p_e leží v $C(p_i, p_j, p_e)$.

Nechť p_m bod tvořící

$\triangle p_i p_j p_m$. Potom

$p_e \in C(p_i, p_j, p_m)$, proto

$(p_i p_j p_m, p_e)$ je dvojice s

$\sphericalangle p_m p_e p_j$ ~~větším~~ $> p_i p_j p_e$

Důsledek

Úhlově opt. triang $\Rightarrow$ legální = Delaun.

P v obecné poloze $\Rightarrow$ jediná D. triang

a ta je optimální

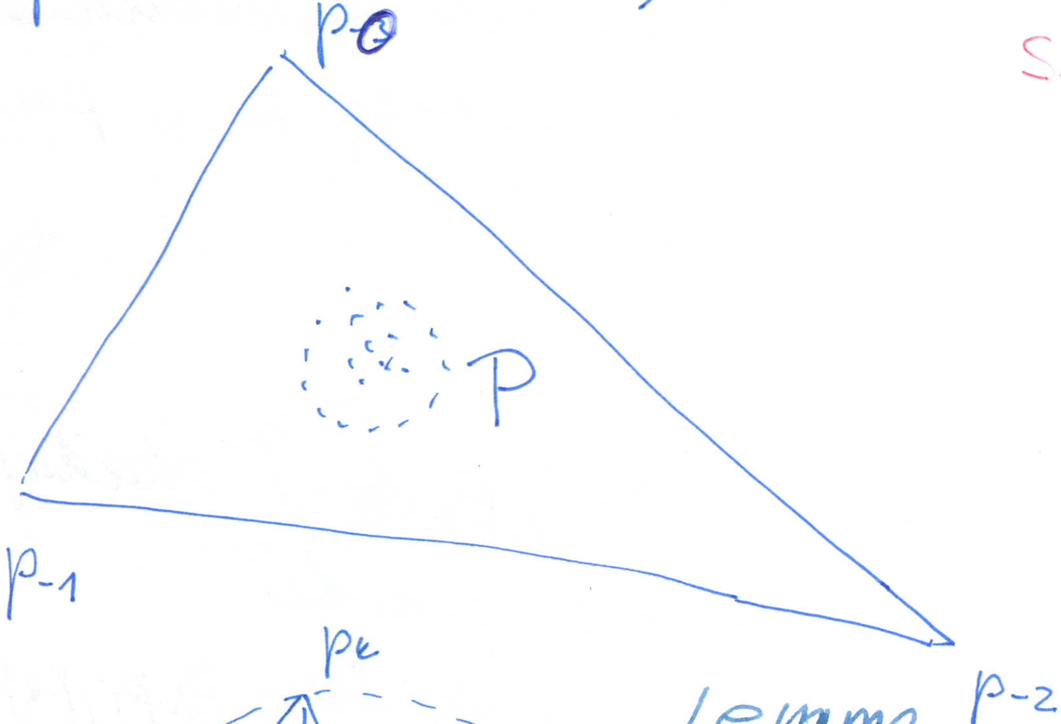
9

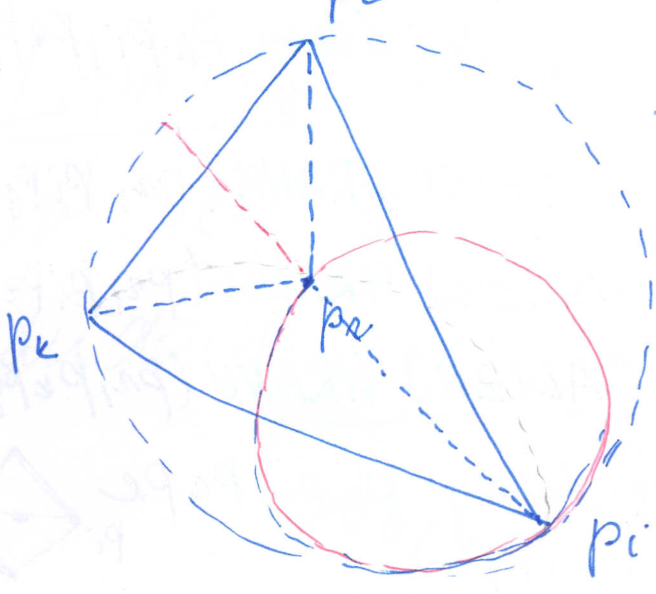
<u>Algoritmus</u> – lze z V-diagramu

– náhodnostní, přírůstkový

Vše v △ $p_0 p_{-1} p_{-2}$. Mějme D. triang. pro $p_{-2}, \dots, p_{r-1}$. Přidáme p_r (náhodně).

OBR str. 15





<u>Lemma</u>

Nové hrany ~~jsou~~ obsahující p_r jsou ~~legální~~ Delaunayovy.

OBR 16

Stejnolehlá kružnice

→ Delaunayova hrana

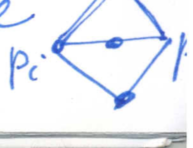
str. 36   10

Alg. DELAUNAYOVA TRIANGULACE

Vstup: množina P

Výstup: D. triangulace množiny P

1. Nechť p_0, p_{-1}, p_{-2} jsou vhodné body takové, že P je uvnitř $\Delta p_0, p_{-1}, p_{-2}$
2. Inicializuj triangulaci $T = \{\Delta p_0, p_{-1}$
   Inicializuj vyhledávací strukturu D.
3. Vem náhodnou permutaci $p_1, \ldots, p_n$.
4. for $r = 1$ to n
5.   do
6.   najdi $\Delta p_i p_j p_k \in T$ obsahující p_r
7.   if p_r leží uvnitř
8.   then přidej hrany $p_r p_i, p_r p_j, p_r p_k$
9.   LEGALIZUJ HRANU$(p_r, p_i p_j, T)$
10.   LEGALIZUJ HRANU$(p_r, p_i p_k, T)$
11.   LEGALIZUJ HRANU$(p_r, p_k p_j, T)$
12.   else přidej hrany $p_r p_k, p_r p_l$
    ($p_r \in \overline{p_i p_j}$)



11

13. LEGALIZUJ HRANU $(p_r, p_i p_k, T$

14. —— // ——

15. —— // ——

16. —— // ——

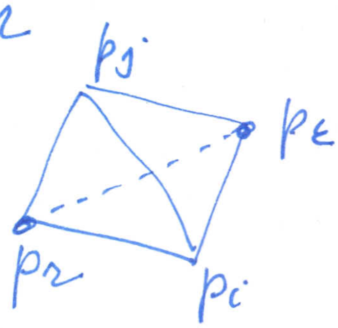
17. Vymaž p_{-1}, p_{-2}, p_{-3} a přilehlé hrany a Δ

18. Vrať T.

str. 37

LEGALIZUJ HRANU $(p_r, p_i p_j, T)$

1. je-li $p_i p_j$ ilegální
2. nahraď $\overline{p_i p_j}$ hranou $\overline{p_k p_r}$

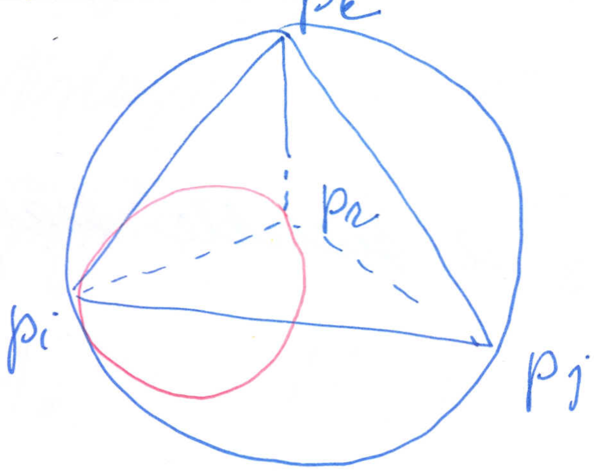


3. LEGALIZUJ HRANU $(p_r, p_i p_k, T)$
4. LEGALIZUJ HRANU $(p_r, p_j p_k, T)$

<u>Lemma</u> každá nová hrana vytvořená v alg. D. triangulace v průběhu přidání bodu p_r je legální. Delaunayova

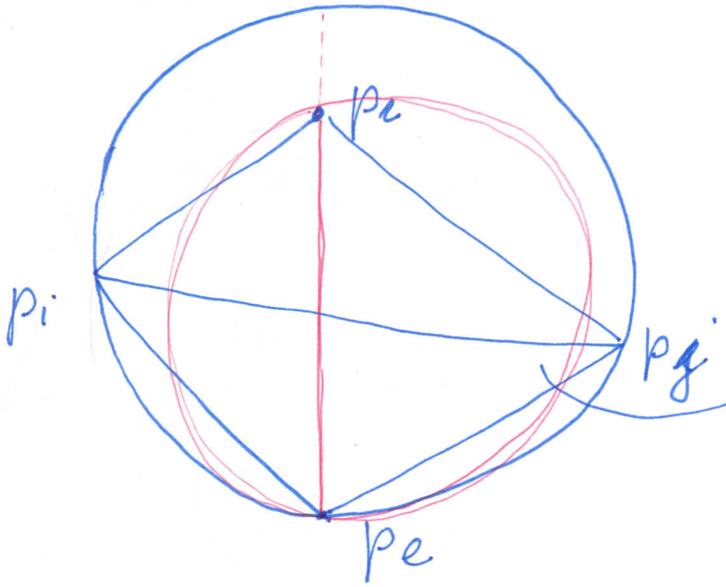
obr. 19

(1) Indukce 1. krok



stejnolehlost

(2) Ind. krok



→ Delaunayův Δ

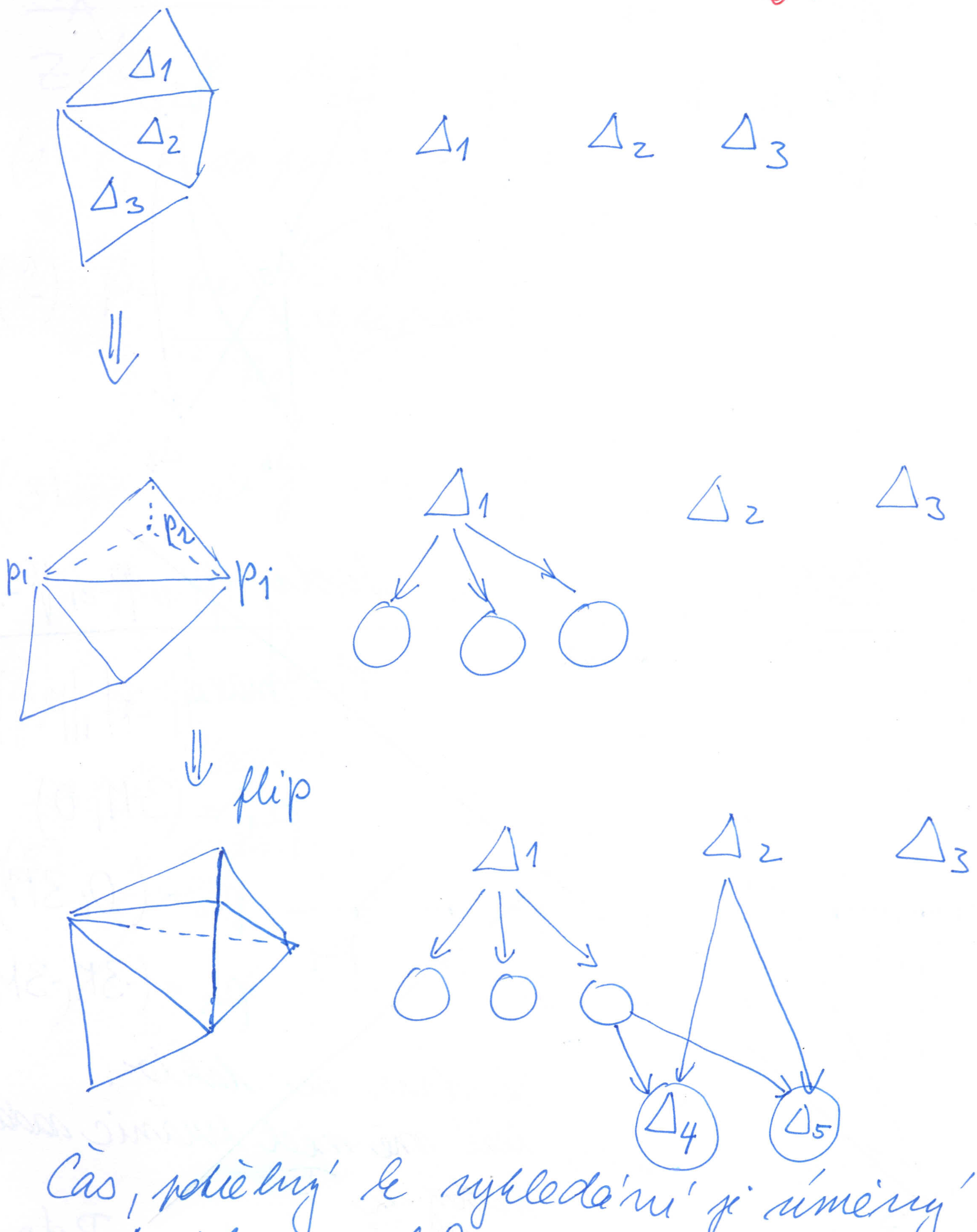
stejnolehlost

Vyhledávací struktura D

- acyklický orient. graf
- v listech Δ z T
- ostatní uzly – Δ z předchozích

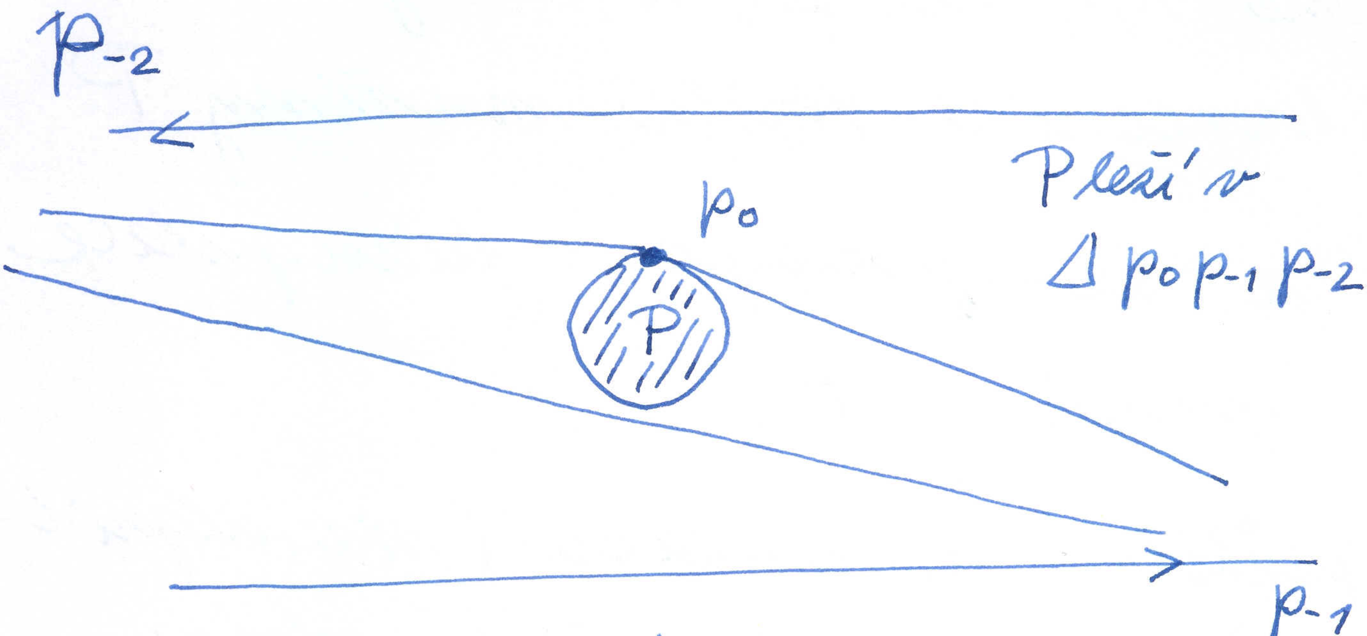
triangulací

OBR 20



Čas, potřebný k vyhledání je úměrný počtu uzlů

VÝBĚR BODŮ p_{-1}, p_{-2}



p_{-1} vně všech kružnic se tří bodů v P

p_{-2} vně všech kružnic opsaných třem bodům z $P \cup \{p_{-1}\}$

Každý čtyřúhelník

$$p_{-2}\, p_j\, p_{-1}\, p_k$$

je nekonvexní. Tedy p_{-1} leží vně kružnice opsané $\Delta\, p_{-2} p_j p_k$

Delaunayova triangulace množiny $P \cup \{p_{-1}, p_{-2}\}$ se skládá

(1) ze spojnic p_{-1} s vrcholy pravého

konv. obalu množiny P

2 ze spojnic p_{-2} s vrcholy levého konvexního obalu množiny P

3 z Delaunayovy triangulace množiny P.

V průběhu triangulace (viz. algoritmus) potřebujeme určit polohu bodu p_j vzhledem k orientované přímce $p_i p_k$. K tomu použijeme:

Ekvivalentní tvrzení

- p_j leží vlevo od $\overrightarrow{p_i p_{-1}}$
- p_j leží vlevo od $\overrightarrow{p_{-2} p_i}$
- $p_j > p_i$ v lexikografickém uspořádání nejdřív podle y a pak podle x.

Ilegalita hrany obsahující p_{-1} nebo p_{-2}.

- všechny hrany $\triangle p_0 p_{-1} p_{-2}$ jsou legální
- hrana $p_{-2} p_j$ s příslušnými vrcholy p_k a p_{-1} je legální
- hrana $p_{-1} p_j$ s příslušnými vrcholy p_k a p_{-2} je legální
- ~~hrana $p_{-2} p_j$ s příslušnými vrcholy p_k p_l (k a l ...)~~ je-li právě jedno z čísel ~~...~~ i, j, k, l záporné, pak hrana $p_i p_j$ je legální právě když

$$\min(k, l) < \min(i, j).$$