Cvičení 10: Číselné charakteristiky a transformace náhodných veličin

Teorie:

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $p_X(x)$ nenulovou pouze pro x_i, kde $i \in I$, je definována jako

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p_X(x_i).$$

Střední hodnota spojité náhodné veličiny X s hustotou $f_X(x)$ je definována jako

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Střední hodnotou náhodného vektoru je vektor střední hodnot jeho jednotlivých složek (náhodných veličin).

Rozptylem (variancí) náhodné veličiny X, která má konečnou střední hodnotu, nazýváme číslo

$$D(X) = \operatorname{var} X = E([X - E(X)]^2),$$

odmocnina z rozptylu $\sqrt{D(x)}$ se pak nazývá **směrodatná odchylka**. Na výpočet rozptylu je vhodné použít vzorec $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, platí rovněž $D(a + bX) = b^2 D(X)$.

Kovariancí náhodných veličin X_1, X_2 rozumíme

$$C(X_1, X_2) = E(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)).$$

Je-li $C(X_1, X_2) = 0$, říkáme, že X_1, X_2 jsou nekorelované. Stochasticky nezávislé náhodné veličiny jsou vždy nekorelované (nikoliv obráceně, nulová kovariance pouze znamená nulovou **lineární** závislost, nikoliv úplnou nezávislost!). **Koeficient korelace** je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right).$$

Kvantily: Pro ryze monotóní distribuční funkci F_X (tj. spojitou náhodnou veličinu X s všude nenulovou hustotou, jako je tomu např. u normálního rozdělení) jde o inverzní funkci $F_X^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. To znamená, že hodnota $y = F^{-1}(\alpha)$ je taková, že $P(X < y) = \alpha$. Obecněji, je-li $F_X(x)$ distribuční funkce náhodné veličiny X, pak definujeme **kvantilovou funkci**

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in (0,1).$$

Kvantil s $\alpha = 0{,}5$ nazýváme medián.

Transformace (funkce) náhodné veličiny

Náhodnou veličinu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ můžeme pomocí vhodné třídy (tzv. borelovských) funkcí $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transformovat na jinou náhodnou veličinu $Y = g(X)$ vztahem $\forall \omega \in \Omega : Y(\omega) = g(X(\omega))$. Přitom pro rozdělení pravděpodobnosti **diskrétní** náhodné veličiny Y zřejmě platí

$$P(Y = y) = \sum_{i:g(x_i)=y} P(X = x_i)$$

a pokud existuje inverzní funkce k funkci g (například při afinní závislosti, která není konstatní), dostáváme pro pravděpodobnostní funkce vztah

$$p_Y(y) = p_{g(X)}(y) = p_X(g^{-1}(y)).$$

Pro **spojitou** náhodnou veličinu s distribuční funkcí F_X dostáváme za předpokladu, že transformace g je rostoucí (analogicky klesající) funkce, vztah

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)),$$

odkud pro hustotu

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y} = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|.$$

Příklad 142. Uveďte příklad

a) diskrétní,

b) spojité

náhodné veličiny, pro níž neexistuje střední hodnota.

Příklad 143. Pravděpodobnost zásahu cíle jedním výstřelem je 0,75. Náhodná veličina X udává počet zásahů při 5 nezávislých výstřelech. Určete její rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Výsledek. $15/4; 15/16$.

Příklad 144. Diskrétní náhodná veličina X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ s pravděpodobností $P(X = k) = p(1-p)^k$ (tzv. geometrické rozdělení). Určete $E(X)$ (střední doba čekání na úspěch) a $D(X)$.

Výsledek. $\frac{1-p}{p}$, $\frac{1-p}{p^2}$

Příklad 145. Náhodná veličina X má hustotu $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$ pro $x \in (1, \infty)$ a jinde nulovou. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

Výsledek. $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}, E(X) = \frac{3}{2}, D(X) = \frac{3}{4}$.

Příklad 146. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $f_X(x) = \cos x$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a jinde nulovou. Určete střední hodnotu, rozptyl a medián této veličiny.

Výsledek. $\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{6}, \pi - 3$.

Příklad 147. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x \geq 0$, kde $\lambda > 0$ je daný parametr rozdělení, a jinde nulovou (tzv. exponenciální rozdělení). Určete střední hodnotu, rozptyl, modus (reálné číslo s maximální hustotou, resp. pravděpodobnostní funkcí) a medián této veličiny.

Výsledek. $\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln 2}{\lambda}, 0, \frac{1}{\lambda^2}$

Příklad 148. Diskrétní náhodný vektor (X_1, X_2) má simultánní pravděpodobnostní funkci $\pi(0,-1) = c, \pi(0,0) = \pi(0,1) = \pi(1,-1) = \pi(2,-1) = 0, \pi(1,0) = \pi(1,1) = \pi(2,1) = 2c, \pi(2,0) = 3c$ a rovnou nule jinde. Určete konstantu c a vypočtěte:

1. kovarianci $C(X_1, X_2)$,
2. korelační koeficient $R(X_1, X_2)$.

Výsledek. 1. 0,18; 2. 0,42.

Příklad 149. Náhodná veličina X má hustotu $f(x)$. Určete hustotu náhodné veličiny Y tvaru

a) $Y = e^X, X \geq 0$,

b) $Y = \sqrt{X}, X > 0$,

c) $Y = \ln X, X > 0$,

d) $Y = \frac{1}{X}, X > 0$.

Výsledek. $f(\ln y)\frac{1}{y}; 2f(y^2)y; f(e^y)e^y; f(1/y)\frac{1}{y^2}$.

Příklad 150. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Určete jeho hustotu a hustotu transformovaných veličin $Y = \sin X, Z = \operatorname{tg} X$.

Příklad 151. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $\cos x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a nulovou jinde. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$ a vypočtěte $E(Y), D(Y)$.

Výsledek. $\frac{\cos(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$ pro $0 < y < \frac{\pi^2}{4}, E(Y) = \frac{\pi^2 - 8}{4}, D(Y) = 20 - 2\pi^2$.