

## Cvičení 12: Náhodný výběr z normálního rozdělení, intervalové odhady

**Teorie:**

Případ, kdy je  $X_1, \dots, X_n$  náhodný výběr z normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ :

- $M$  a  $S^2$  jsou nezávislé náhodné veličiny.
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ , a tedy  $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$ .
- $K = (n - 1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n - 1)$ .
- $\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$ .
- $T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n - 1)$ .

**Intervaly spolehlivosti (jeden, resp. 2 výběry):**

$\mu$ (známe $\sigma^2$ )	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
$\mu$ (neznáme $\sigma^2$ )	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n - 1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n - 1))$
$\sigma^2$ (neznáme $\mu$ )	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)})$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ )	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ )	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m + n - 2)$
podíl rozptylů $\sigma_1^2/\sigma_2^2$	$(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)})$

**Příklad 1.** Ze základního souboru, z rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ , kde  $\sigma^2 = 0,06$  jsme pořídili náhodný výběr s realizacemi 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu.

*Výsledek.*  $1,22 \leq \mu \leq 1,58$ .

**Příklad 2.** Náhodná veličina  $X$  má normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ , kde  $\mu, \sigma^2$  nejsou známy. V následující tabulce jsou uvedeny četnosti jednotlivých realizací této náhodné veličiny.

$x_i$	8	11	12	14	15	16	17	18	20	21
četnost	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Vypočtěte:

- výběrový průměr,
- výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku,

- 99% interval spolehlivosti pro střední hodnotu  $\mu$ .

*Výsledek.*  $13,954 \leq \mu \leq 16,671$

**Příklad 3.** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozdělení  $N(\mu, 0,04)$ . Určete nejmenší počet měření, který je třeba provést, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro  $\mu$  nepřesáhla 0,16.

**Příklad 4.** Byla provedena čtyři nezávislá měření obsahu manganu u dvou vzorků oceli a byly získány výsledky:

1. vzorek	0,31%	0,30%	0,29%	0,32%
2. vzorek	0,59%	0,57%	0,58%	0,57%

Stanovte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot  $\mu_1 - \mu_2$  za předpokladu, že jde o realizace náhodného výběru z normálního rozdělení s neznámými, ale shodnými rozptyly.