Matematika III, 1. cvičení

CÍL CVIČENÍ: Rozvoj základní představy o funkčních hodnotách závisejících na více proměnných, práce s jednoduchými výrazy pro takové funkce, znázornění funkce pomocí grafu. Zároveň v této souvislosti připomeneme jednoduché pojmy z elementární geometrie.

Definiční obory

Poznámka. Pro kružnici se středem v bodě $[x, y]$ a poloměrem r budeme používat označení $k([x, y]; r)$.

Příklad 1. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}.$$

Řešení. Musí platit: $(x^2 + y^2 - 1 \geq 0, 4 - x^2 - y^2 \geq 0)$ nebo $(x^2 + y^2 - 1 \leq 0, 4 - x^2 - y^2 \leq 0)$, tj. $(x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4)$ nebo $(x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4)$, což je mezikruží mezi $k([0, 0]; 1)$ a $k([0, 0]; 2)$.

Výsledek. Mezikruží mezi $k([0, 0]; 1)$ a $k([0, 0]; 2)$

Příklad 2. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}.$$

Výsledek. Je to čtverec se středem v bodě $[0, 0]$, jeho vrcholy jsou v bodech $[\pm 1, \pm 1]$.

Příklad 3. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

Výsledek. Prostor mezi $k([\frac{1}{2}, 0]; \frac{1}{2})$ a $k([1, 0]; 1)$, menší kružnice tam patří, větší ne.

Příklad 4. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} - \frac{1}{|y| - |x|}.$$

Výsledek. Prostor mezi přímkami $y = x$ a $y = -x$ kromě těchto přímek (do této množiny patří osa y kromě bodu $[0, 0]$, množina vypadá jako přesýpací hodiny).

Příklad 5. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}.$$

Výsledek. Elipsa (i s vnitřkem) se středem v bodě $[0, 0]$, hlavní poloosou $a = 1$ (prochází bodem $[1, 0]$) a vedlejší poloosou $b = \frac{1}{2}$ (prochází bodem $[0, \frac{1}{2}]$).

Příklad 6. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Výsledek. Elipsoid (i s vnitřkem) se středem v bodě $[0, 0, 0]$ a poloosami a (prochází bodem $[a, 0, 0]$), b (prochází bodem $[0, b, 0]$) a c (prochází bodem $[0, 0, c]$).

Vrstevnice funkcí, polární souřadnice

Máme funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $c \in \mathbb{R}$. Množinu $f_c = \{[x, y] \in M; f(x, y) = c\}$ nazýváme vrstevnice funkce f na úrovni c. Chápeme-li graf funkce f jako reliéf krajiny, pak vrstevnice funkce na úrovni c je množina všech bodů s nadmořskou výškou c, což se shoduje s pojmem vrstevnice v mapách.

Příklad 7. *Určete vrstevnice funkce* $z = x^2 + y^2$.

Výsledek. Vrstevnice jsou $x^2 + y^2 = c$. Pokud $c < 0$, pak $z_c = \emptyset$. Pro $c = 0$ je $z_0 = [0, 0]$ a pro $c > 0$ máme $x^2 + y^2 = \sqrt{c}^2$, takže vrstevnice jsou kružnice $k([0, 0]; \sqrt{c})$.

Příklad 8. *Pomocí vrstevnic a řezů rovinami* $\varrho_{xz}\colon y = 0$ *a* $\varrho_{yz}\colon x = 0$ *určete v prostoru graf funkce*

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Vrstevnice jsou $2 - \sqrt{x^2 + y^2} = c$, tj. $x^2 + y^2 = (2 - c)^2$, což jsou kružnice $k([0, 0]; 2 - c)$, přičemž $2 - c \geq 0$, tj. $c \leq 2$.
Řez rovinou ϱ_{xz}: platí $y = 0$, tudíž $z = 2 - \sqrt{x^2} = 2 - |x|$.
Řez rovinou ϱ_{yz}: platí $x = 0$, tudíž $z = 2 - \sqrt{y^2} = 2 - |y|$.
Celkem z toho dostáváme, že graf funkce z je rotační kužel s vrcholem v bodě $[0, 0, 2]$ a hlavní osou, která je částí osy z od 2 do $-\infty$.
Graf funkce $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ se dá určit také převedením do polárních souřadnic r, φ:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Souřadnice r udává vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku $[0, 0]$ (tedy $r \geq 0$), φ je orientovaný úhel od kladné poloosy x k polopřímce začínající v bodě $[0, 0]$ a procházející bodem $[x, y]$. Po dosazení dostaneme

$$z = 2 - \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = 2 - \sqrt{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = 2 - \sqrt{r^2} = 2 - |r| = 2 - r,$$

tedy z nezávisí na φ. Z toho, že $z = 2 - r$, dojdeme ke stejnému výsledku jako výše.

Výsledek. Graf funkce z je rotační kužel s vrcholem v bodě $[0, 0, 2]$ a hlavní osou, která je částí osy z od 2 do $-\infty$

Příklad 9. *Pomocí vrstevnic a řezů rovinami* $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$ *určete v prostoru graf funkce*

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Výsledek. Grafem je horní polovina kulové plochy (leží v poloprostoru $z \geq 0$), jejímž středem je bod $[0, 0, 0]$ a poloměr je 1.

Příklad 10. *Pomocí vrstevnic a řezů rovinami* $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$ *určete v prostoru graf funkce*

$$z = x^2 + y^2.$$

Výsledek. Grafem je rotační paraboloid ležící v poloprostoru $z \geq 0$, jeho vrchol („nejnižší“ bod) je $[0, 0, 0]$.

Křivky v $\mathbb{R}^n$, tečna ke křivce

Křivka v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tedy c zobrazí reálné číslo x na bod $[c_1(x), \ldots, c_n(x)]$ v prostoru $\mathbb{R}^n$, přičemž $c_1, \ldots, c_n$ jsou funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derivace funkce c v bodě t_0, tj. vektor $c'(t_0) = (c_1'(t_0), \ldots, c_n'(t_0))$, je tečným vektorem ke křivce c v bodě $c(t_0)$. Přímka

$$p = \{c(t_0) + sc'(t_0); s \in \mathbb{R}\}$$

je tečna ke křivce c v bodě t_0.

Příklad 11. *Určete tečnu křivky dané předpisem $c(t) = (\ln t, \operatorname{arctg} t, e^{\sin(\pi t)})$ v bodě $t_0 = 1$.*

Výsledek. Tečna $p = \{[s, \frac{\pi}{4} + \frac{s}{2}, 1 - \pi s]; s \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 12. *Na křivce $c(t) = (t^2 - 1, -2t^2 + 5t, t - 5)$ nejděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $\varrho\colon 3x + y - z + 7 = 0$.*

Nápověda. Směrový vektor $c'(t_0)$ tečny ke křivce $c(t)$ v bodě t_0 musí být kolmý k normálovému vektoru roviny ϱ, takže skalární součin těchto dvou vektorů musí být roven 0. Pomocí tohoto skalárního součinu vypočítáme t_0.

Výsledek. Bod $[3, -18, -7]$.

Příklad 13. *Určete parametrickou rovnici tečny v bodě $[1, 1, \sqrt{2}]$ ke křivce, jež vznikla jako průsečík plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s plochou $x^2 + y^2 - 2x = 0$.*

Nápověda. Křivku si v okolí daného bodu vyjádřete stejným způsobem jako ve výše uvedených příkladech.

Výsledek. Tečna $p = \{[1 - \sqrt{2}s, 1, \sqrt{2} + s]; s \in \mathbb{R}\}$.