Matematika III, 2. cvičení

V tomto cvičení si procvičíme limity funkcí více proměnných, všimneme si rozdílů proti limitám funkcí jedné proměnné. Dále pak parciální a směrové derivace funkcí více proměnných také jejich diferenciál a jeho použití v Taylorově rozvoji. Zamyslíme se nad souvislostmi s tečnou rovinou ke grafu funkce. Tyto pojmy také využijeme při aproximacích funkce.

Limity funkcí více proměnných

Pro počítání limit $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ nemáme k dispozici žádnou analogii L'Hospitalova pravidla, musíme tedy používat různé úpravy. Rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou proměnných spočívá v odlišnosti okolí limitního bodu: u funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po přímce, tj. ze dvou stran (pak má funkce limitu v bodě, pokud existují obě jednostranné limity, které se rovnají), ale u funkce dvou a více proměnných se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby (po přímkách, parabolách, ...). Existence limity v daném bodě znamená, že nezáleží na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Pokud tedy dostaneme různé hodnoty limity pro různé cesty, limita v daném bodě neexistuje. V následujících příkladech vypočítejte limity, případně dokažte, že neexistují.

Nápověda. Pokud po dosazení limitních bodů nevyjde neurčitý výraz, můžeme tyto limitní body dosadit. Pokud vyjde neurčitý výraz, můžeme zkoušet různé postupy:

(1) rozložit čitatel nebo jmenovatel na součin podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;

(2) rozšířit čitatel i jmenovatel něčím vhodným podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;

(3) $\frac{\text{ohraničený výraz}}{\infty} = 0, 0 \cdot (\text{ohraničený výraz}) = 0$;

(4) použít vhodnou substituci, po které bychom dostali limitu jedné proměnné;

(5) převést limitu dvou proměnných do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi$$

(je-li v limitě výraz $x^2 + y^2$, polární souřadnice většinou fungují, protože pak dostaneme jednodušší výraz $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$, který nezávisí na φ);

(6) zvolit $y = kx$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po přímkách, v případě jiného limitního bodu je potřeba drobná úprava, aby přímky limitním bodem procházely), $y = kx^2$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po parabolách, v případě jiného limitního bodu je opět potřeba drobná úprava), případně jinak vhodně parametricky nahradit $x = f(k)$ a $y = g(k)$, a pokud bude hodnota limity záviset na parametru k, limita neexistuje; tento postup lze použít pouze k důkazu neexistence limity, nikoliv k výpočtu její hodnoty za předpokladu, že existuje!

Příklad 1. $\lim_{(x,y)\to(e^2,1)} \frac{\ln x}{y}$

Výsledek. 2.

Příklad 2. $\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

Nápověda. Rozložte jmenovatel na součin podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin.

Výsledek. $\frac{1}{4}$.

Příklad 3. *Dokažte, že* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y}{x^2-y}$ *neexistuje.*

Nápověda. Zkuste uvidět, proč limita neexistuje: zvolte $y = kx^2$, tedy k bodu $[0,0]$ se budeme blížit po parabolách.

Spojitost funkcí více proměnných

Funkce je spojitá v bodech, ve kterých má vlastní limitu (tj. limita existuje a je různá od $\pm\infty$), která je rovna funkční hodnotě.

Příklad 4. *Určete body, v nichž není spojitá funkce* $f(x,y) = \frac{2x-5y}{x^2+y^2-1}$.

Výsledek. Kružnice $k([0,0];1)$.

Příklad 5. *Určete body, v nichž není spojitá funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \textit{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \textit{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Výsledek. Funkce je všude spojitá, včetně bodu $[0,0]$.

Směrové derivace

Je-li $u = (u_1, u_2)$ nenulový vektor, pak směrová derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru vektoru u je

$$f'_u(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+u_1t, y_0+u_2t) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Zřejmě $f'_x = f'_{(1,0)}$ a $f'_y = f'_{(0,1)}$.

Jiný způsob výpočtu směrové derivace (pouze v případě, že funkce je diferencovatelná!): Nejdříve spočítáme obě parciální derivace $f'_x(x_0,y_0)$ a $f'_y(x_0,y_0)$. Pak

$$f'_u(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot u_1 + f'_y(x_0,y_0)\cdot u_2.$$

Pro funkce tří a více proměnných je to analogické.

Příklad 6. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x,y) = x^3 + 4xy$ *v bodě* $[2,-1]$ *ve směru vektoru* $(1,3)$.

Výsledek. $f'_{(1,3)}(2,-1) = 32$.

Příklad 7. *Vypočtěte* $f'_u(1,-1)$, *kde* $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ *a* $u = (1,2)$.

Výsledek. $-\frac{2}{5}$.

Parciální a směrové derivace

Je-li $u = (u_1, u_2)$ nenulový vektor, pak směrová derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru vektoru u je

$$f'_u(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + u_1 t, y_0 + u_2 t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Zřejmě $f'_x = f'_{(1,0)}$ a $f'_y = f'_{(0,1)}$.

Jiný způsob výpočtu směrové derivace (pouze v případě, že funkce je diferencovatelná!): Nejdříve spočítáme obě parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ a $f'_y(x_0, y_0)$. Pak

$$f'_u(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot u_1 + f'_y(x_0, y_0) \cdot u_2.$$

Pro funkce tří a více proměnných je to analogické.

Příklad 8. *Dvěma způsoby vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x, y) = x^3 + 4xy$ *v bodě* $[2, -1]$ *ve směru vektoru* $(1, 3)$.

Výsledek. $f'_{(1,3)}(2, -1) = 32.$

Příklad 9. *S využitím parciálních derivací vypočtěte* $f'_u(1, -1)$, *kde* $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ *a* $u = (1, 2)$.

Výsledek. $-\frac{2}{5}$.

Diferenciál, aproximace, tečná rovina

Pro funkci jedné proměnné $y = f(x)$ je diferenciál v bodě x_0 dán vztahem $df(x) = f'(x_0)dx$. Pro funkci dvou proměnných $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí $df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$, diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Pomocí diferenciálu se určí rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)).$$

V okolí bodu dotyku tečné roviny můžeme tedy přibližně vypočítat funkční hodnoty (místo přesné funkční hodnoty vezmeme hodnotu z tečné roviny):

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Analogicky se pomocí parciálních derivací prvního řádu určí vztahy pro diferenciál a tečnou nadrovinu funkce více proměnných.

Příklad 10. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\sqrt{2,98^2 + 4,05^2}$.

Řešení. Použijeme diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[3, 4]$. Pak $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, tudíž

$$\sqrt{2,98^2 + 4,05^2} \doteq \sqrt{3^2 + 4^2} + \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}(2,98 - 3) + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}(4,05 - 4) = 5 - \frac{0,06}{5} + \frac{0,2}{5} = 5,028.$$

Příklad 11. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95}$.

Nápověda. Zvolte funkci $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $x_0 = y_0 = 1$.

Výsledek. $\frac{\pi}{4} + 0,035$.

Příklad 12. *Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce* $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$ *v bodě* $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, ?]$.

Výsledek. $z_0 = 4, 3x + 5y - z = 4.$

Taylorův polynom

Příklad 13. *Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce* $f(x,y)=x^4y+xy^2+x+2$ *v bodě* $1,1]$.

Příklad 14. *Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte* $\sqrt{2,98^2+4,05^2}$.

Řešení. Zvolíme funkci $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, x_0=3, y_0=4$. Pak

$$f(3,4)=5,\quad f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \text{tudíž}\ f'_x(3,4)=\frac{3}{5},\quad f'_y(3,4)=\frac{4}{5}.$$

Druhé derivace vychází takto:

$$f''_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f''_{xx}(3,4)=\frac{16}{125},$$
$$f''_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f''_{xy}(3,4)=-\frac{12}{125},$$
$$f''_{yy}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f''_{yy}(3,4)=\frac{9}{125}.$$

Taylorův polynom je tedy

$$T_2(x,y)=5+\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4)+\frac{1}{2!}[\frac{16}{125}(x-3)^2-\frac{12}{125}(x-3)(y-4)+\frac{9}{125}(y-4)^2].$$

Pak

$$\sqrt{2,98^2+4,05^2}\doteq 5+\frac{3}{5}(-0,02)+\frac{4}{5}(0,05)+\frac{1}{250}[16(-0,02)^2+$$
$$+2(-12)(-0,02)(0,05)+9(0,05)^2]=5,0282116.$$

Na straně 1 jsme aproximací pomocí diferenciálu (uvědomme si, že to je totéž jako výpočet pomocí Taylorova polynomu 1. stupně) získali přibližnou hodnotu 5,028, přesná hodnota je 5,028210417... Vidíme tedy, že s použitím pracnějšího výpočtu získáme výrazně přesnější hodnotu.