Matematika III, 3. cvičení

V tomto cvičení se budeme věnovat extrémům funkcí více proměnných. Podobně jako u funkcí jedné proměnné, kde byla existence extrému diferencovatelné funkce v nějakém podmíněna nulovostí derivace v tomto bodě, je existence extrému funkce více proměnných podmíněna nulovostí všech parciálních derivací v tomto bodě. Další rozhodování o těchto bodech je jak uvidíme obtížnější.

Prozkoumáme také Jacobiho matici zobrazení a její vztah k invertibilitě zobrazení.

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme, že pro funkci jedné proměnné $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který platí $f'(x_0) = 0$) platí:

- je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- pokud má funkce f v bodě x_0 neostré lokální minimum, je $f''(x_0) \geq 0$,
- je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum,
- pokud má funkce f v bodě x_0 neostré lokální maximum, je $f''(x_0) \leq 0$.

Pro jednoduchost budeme uvažovat funkci dvou proměnných $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, obecný případ pro funkci $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ byl probrán na přednášce. Podobné tvrzení jako pro lokální extrémy funkcí jedné proměnné dostaneme pro funkce dvou (resp. více) proměnných:

Nechť $[x_0, y_0]$ je stacionární bod funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (tedy platí $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$) a nechť má tato funkce v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu. Pak platí:

- Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ a
$$\det Hf(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$
má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální minimum,
- Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ a $\det Hf(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální maximum,
- Je-li $\det Hf(x_0, y_0) < 0$, extrém v bodě $[x_0, y_0]$ nenastává,
- V ostatních případech (tj. pokud $\det Hf(x_0, y_0) = 0$), nic o extrému v bodě $[x_0, y_0]$ nevíme, musíme použít různé triky.

Dále platí, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (platí to i pro funkce více než dvou proměnných) může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

Příklad 1. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Příklad 2. *Určete lokální extrémy funkce*
$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$
ležící v prvním oktantu (tj v části prostoru, kde jsou všechny tři souřadnice nezáporné) a určete jejich typ.

Příklad 3. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Příklad 4. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

Jacobiho matice zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ a jeho inverze

Nechť $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že funkce f, g (tj. složky zobrazení F) mají v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace a že Jacobiho matice $F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$ je regulární, tj. $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$ ($\det F'(x_0, y_0)$ se nazývá jacobián zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$). Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je zobrazení F prosté, tudíž k němu existuje inverzní zobrazení F^{-1} v okolí bodu $F(x_0, y_0)$, a pro Jacobiho matici tohoto inverzního zobrazení v bodě $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$ platí $(F^{-1})'(u_0, v_0) = [F'(x_0, y_0)]^{-1}$.

Příklad 5. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = x^2 - y^2, g(x, y) = 2xy$ (tj. zobrazení $z \mapsto z^2$, uvažujeme-li F jako zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$), prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. V případě, že ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(2, 1)$.*

Příklad 6. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x}{y}$, prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2, 1)$.*

Příklad 7. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, g(x, y) = xy$, prosté v nějakém okolí bodu $[0, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(0, 1)$.*

Příklad 8. *Spočítejte jacobián funkce F, která je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.*

Nápověda. Funkce F je definována následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
[x, y] &\mapsto \left[\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] \text{ pro } x > 0, \\
[x, y] &\mapsto \left[\sqrt{x^2 + y^2}, \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] \text{ pro } x < 0, \\
[0, y] &\mapsto \left[y, \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y)\right].
\end{aligned}
$$

Z polárních souřadnic nazpět je to $F^{-1} : [r, \varphi] \mapsto [r \cos \varphi, r \sin \varphi]$. Lépe se bude počítat, když napřed určíme jacobián zobrazení F^{-1} a z něj pak jacobián zobrazení F.