Matematika III, 3. cvičení

V tomto cvičení se budeme věnovat extrémům funkcí více proměnných. Podobně jako u funkcí jedné proměnné, kde byla existence extrému diferencovatelné funkce v nějakém podmíněna nulovostí derivace v tomto bodě, je existence extrému funkce více proměnných podmíněna nulovostí všech parciálních derivací v tomto bodě. Další rozhodování o těchto bodech je jak uvidíme obtížnější.

Prozkoumáme také Jacobiho matici zobrazení a její vztah k invertibilitě zobrazení.

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme, že pro funkci jedné proměnné $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který platí $f'(x_0) = 0$) platí:

- je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- pokud má funkce f v bodě x_0 neostré lokální minimum, je $f''(x_0) \geq 0$,
- je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum,
- pokud má funkce f v bodě x_0 neostré lokální maximum, je $f''(x_0) \leq 0$.

Pro jednoduchost budeme uvažovat funkci dvou proměnných $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, obecný případ pro funkci $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ byl probrán na přednášce. Podobné tvrzení jako pro lokální extrémy funkcí jedné proměnné dostaneme pro funkce dvou (resp. více) proměnných:

Nechť $[x_0, y_0]$ je stacionární bod funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (tedy platí $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$) a nechť má tato funkce v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu. Pak platí:

- Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ a

  $$\det Hf(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

  má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální minimum,
- Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ a $\det Hf(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální maximum,
- Je-li $\det Hf(x_0, y_0) < 0$, extrém v bodě $[x_0, y_0]$ nenastává,
- V ostatních případech (tj. pokud $\det Hf(x_0, y_0) = 0$), nic o extrému v bodě $[x_0, y_0]$ nevíme, musíme použít různé triky.

Dále platí, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (platí to i pro funkce více než dvou proměnných) může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

Příklad 1. *Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.*

Výsledek. Stacionární body jsou $P_1 = [0, 0], P_2 = [1, 1]$, v P_1 není extrém, v P_2 je ostré lokální minimum.

Příklad 2. *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

ležící v prvním oktantu (tj v části prostoru, kde jsou všechny tři souřadnice nezáporné) a určete jejich typ.

Výsledek. Jediný stacionární bod je $[\frac{1}{2}, 1, 1]$, ve kterém je lokální minimum, neboť

$$Hf = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní např. podle Sylvestrova kritéria ($a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \det Hf > 0$).

Příklad 3. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Řešení. Funkce, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných x, y, proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy mohou tedy nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \quad f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0.$$

Odečtením rovnic dostaneme $4(x^3 - y^3) = 0$, tj. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$. Z první závorky plyne $x = y$, druhá závorka je nulová pouze pro $x = y = 0$, neboť pokud ji budeme uvažovat jako kvadratickou rovnici s proměnnou x, její diskriminant $-3y^2$ bude nezáporný pouze pro $y = 0$ a v tomto případě vyjde $x = 0$. Tento případ $x = y = 0$ je však již zahrnutý v prvním případě $x = y$.

Dosazením $x = y$ do obou rovnic výše uvedené soustavy dostaneme stejnou rovnici $4x^3-4x = 0$, tj. $4x(x+1)(x-1) = 0$, tj. $x = 0, x = 1, x = -1$. Dostáváme tři stacionární body:

$$P_1 = [0,0], \quad P_2 = [1,1], \quad P_3 = [-1,-1].$$

Parciální derivace druhého řádu jsou $f''_{xx} = 12x^2-2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2-2$, tudíž $\det Hf(x,y) = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4$. Protože $\det Hf(1,1) = \det Hf(-1,-1) = 96 > 0$ a $f''_{xx}(1,1) = f''_{xx}(-1,-1) = 10 > 0$, má funkce f v obou stacionárních bodech P_2, P_3 ostré lokální minimum.

Pro stacionární bod P_1 ale vychází $\det Hf(0,0) = 0$, takže o existenci extrému v tomto bodě zatím neumíme rozhodnout. Budeme tedy muset postupovat jiným způsobem:

Jistě $f(0,0) = 0$. Ukážeme-li, že funkce f nabývá v libovolném okolí bodu $[0,0]$ kladných i záporných hodnot, bude to díky faktu $f(0,0) = 0$ znamenat, že v tomto bodě extrém nenastává.

Funkci f si upravíme na tvar $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2)$. Volbou $y = -x$ dostaneme $f(x,-x) = 2x^4 > 0$ pro $x \neq 0$. Jinou volbou $y = 0$ dostaneme $f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) < 0$ pro $x \in (-1,0) \cup (0,1)$. V libovolném okolí bodu $[0,0]$ leží body $[\varepsilon, -\varepsilon]$, $[\varepsilon, 0]$ pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$, přičemž $f(\varepsilon, -\varepsilon) > 0$ a $f(\varepsilon, 0) < 0$, takže v bodě $[0,0]$ extrém nenastává.

Výsledek. Tři stacionární body: $P_1 = [0,0]$, $P_2 = [1,1]$, $P_3 = [-1,-1]$. V P_1 extrém nenastává, v obou bodech P_2, P_3 má funkce f ostré lokální minimum.

Příklad 4. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

Výsledek.

$$f'_x = y\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right], \quad f'_y = x\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right],$$

stacionární body jsou

$$P_{1,2} = [0, \pm 1], \quad P_{3,4} = [\pm 1, 0], \quad P_{5-8} = [\pm 1/\sqrt{2e}, \pm 1/\sqrt{2e}].$$

Dále

$$f''_{xx} = \frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \ln(x^2+y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$\det Hf(P_{1-4}) = \det \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -4 < 0$, tudíž v bodech P_{1-4} není extrém.
Pro $P_5 = [1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}]$ a $P_6 = [-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}]$ je $f''_{xx}(P_{5,6}) = 2 > 0, \det Hf(P_{5,6}) = 4 > 0$, tudíž v bodech P_5, P_6 je ostré lokální minimum.
Pro $P_7 = [1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}]$ a $P_8 = [-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}]$ je $f''_{xx}(P_{7,8}) = -2 < 0, \det Hf(P_{5,6}) = 4 > 0$, tudíž v bodech P_7, P_8 je ostré lokální maximum.

Jacobiho matice zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ a jeho inverze

Nechť $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že funkce f, g (tj. složky zobrazení F) mají v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace a že Jacobiho matice $F'(x_0, y_0) = \left(\begin{smallmatrix} f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \end{smallmatrix}\right)$ zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$ je regulární, tj. $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$ ($\det F'(x_0, y_0)$ se nazývá jacobián zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$). Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je zobrazení F prosté, tudíž k němu existuje inverzní zobrazení F^{-1} v okolí bodu $F(x_0, y_0)$, a pro Jacobiho matici tohoto inverzního zobrazení v bodě $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$ platí $(F^{-1})'(u_0, v_0) = [F'(x_0, y_0)]^{-1}$.

Příklad 5. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = x^2 - y^2, g(x, y) = 2xy$ (tj. zobrazení $z \mapsto z^2$, uvažujeme-li F jako zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$), prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. V případě, že ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(2, 1)$.*

Řešení. $F'(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{smallmatrix}\right), F'(2, 1) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right), \det F'(2, 1) = 16 + 4 \neq 0$, tudíž v nějakém okolí bodu $[2, 1]$ je F prosté. Dále $F(2, 1) = [3, 4]$,

$$(F^{-1})'(3, 4) = [F'(2, 1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Výpočet inverzní matice k regulární matici $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ je snadný, neboť $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.
Výsledek. $\det F'(2, 1) = 20 \neq 0$, tudíž v nějakém okolí bodu $[2, 1]$ je F prosté. Dále

$$(F^{-1})'(3, 4) = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x}{y}$, prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2, 1)$.*

Výsledek. $\det F'(2, 1) = -4 \neq 0$, tudíž F je prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. Dále

$$(F^{-1})'(2, 2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, g(x, y) = xy$, prosté v nějakém okolí bodu $[0, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(0, 1)$.*

Výsledek. $\det F'(0,1) = -1 \neq 0$, tudíž F je prosté v nějakém okolí bodu $[0,1]$. Dále

$$(F^{-1})'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 8. *Spočítejte jacobián funkce F, která je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.*

Nápověda. Funkce F je definována následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
[x,y] &\mapsto \left[\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] \text{ pro } x>0,\\
[x,y] &\mapsto \left[\sqrt{x^2+y^2}, \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] \text{ pro } x<0,\\
[0,y] &\mapsto \left[y, \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(y)\right].
\end{aligned}$$

Z polárních souřadnic nazpět je to $F^{-1} : [r,\varphi] \mapsto [r\cos\varphi, r\sin\varphi]$. Lépe se bude počítat, když napřed určíme jacobián zobrazení F^{-1} a z něj pak jacobián zobrazení F.

Výsledek. $\det(F^{-1})' = r, \det F' = \frac{1}{r}$.