

## Matematika III, 6. cvičení

### Transformace souřadnic při integraci

Nechť  $G(x, y): M \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je prosté, prvky Jacobiho matice  $G'(x, y)$  jsou spojité funkce a  $\det G'(x, y) \neq 0$  pro všechna  $[x, y] \in M$ . Pak pro každou „rozumnou“ (přesněji Riemannovsky měřitelnou) množinu  $K$  a spojitou funkci  $f: G(K) \rightarrow \mathbb{R}$  platí:

$$\iint_{G(K)} f(s, t) ds dt = \iint_K f(G(x, y)) |\det G'(x, y)| dx dy.$$

Velmi důležitá je transformace do polárních souřadnic:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

tj. pro dané  $r$  a  $\varphi$  dostaneme bod ve vzdálenosti  $r$  od počátku  $[0, 0]$ , přičemž velikost orientovaného úhlu, vedeného v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček) od osy  $x$  k polopřímce začínající v  $[0, 0]$  a procházející přes tento bod, je  $\varphi$ .

Tedy  $G(r, \varphi) = [r \cos \varphi, r \sin \varphi] = [g(r, \varphi), h(r, \varphi)]$ . Pak Jacobiho matice zobrazení  $G$  je  $G'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} g'_r & g'_\varphi \\ h'_r & h'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ . Dále jacobíán je  $\det G'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$ . Protože poloměr  $r \geq 0$ , je  $|\det G'(r, \varphi)| = |r| = r$ . Transformace do polárních souřadnic je obvykle výhodná, pokud je množina, přes kterou integrujeme, kruhem, mezikružím, kruhovou výsečí nebo něčím podobným.

Někdy je lepší použít transformaci do polárních souřadnic se středem v bodě  $[a, b]$  (obvykle v případech, kdy je množina, přes kterou integrujeme, podobná kruhu se středem v bodě  $[a, b]$ ) místo výše uvedené transformace se středem v bodě  $[0, 0]$ :

$$x = r \cos \varphi + a, \quad y = r \sin \varphi + b.$$

Snadno si můžete ověřit, že jacobíán této transformace je opět  $r$ . Přípustné hodnoty nových proměnných jsou  $r \in \langle 0, \infty \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

Zdůrazněme zejména, že transformace při výpočtu integrálů více proměnných vybíráme podle tvaru množiny, přes kterou se integruje, nikoliv podle integrované funkce, jako je tomu u integrálů jedné proměnné!

**Příklad 1.** Pomocí přechodu k polárním souřadnicím zjednodušte dvojný integrál

$$I = \iint_M f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy,$$

kde  $M: x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Příklad 2.** Spočítejte integrál

$$\iint_M \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} dx dy,$$

kde  $M: 1 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$ .

*Nápověda.*  $M$  je mezikružím se středem  $[1, -1]$ , tudíž použijeme polární souřadnice se středem  $[1, -1]$ .

**Příklad 3.** Užitím transformace  $u = xy, y = vx$  spočítejte  $I = \iint_A x^2 y^2 dx dy$ , kde množina  $A$  je ohraničena křivkami  $xy = \frac{1}{2}, xy = 2, 2y = x, y = 2x$ , přičemž  $x, y \geq 0$ .

**Příklad 4.** Užitím transformace  $u = xy, v = \frac{y^2}{x}$  spočtěte  $I = \iint_A \sqrt{xy} \, dx \, dy$ , kde množina  $A$  je ohraničena křivkami  $y^2 = 2x, y^2 = x, xy = 1, xy = 2$ .

*Nápověda.* Není potřeba vyjadřovat transformaci  $G : x = f(u, v), y = g(u, v)$ . Stačí uvažovat inverzní transformaci  $G^{-1} : u = xy, v = \frac{y^2}{x}$ , neboť  $G \circ G^{-1} = id$ , tudíž  $\det G' \cdot \det(G^{-1})' = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$  a z toho  $\det G'(u, v) = \frac{1}{\det(G^{-1})'(x, y)}$ , přičemž pravou stranu rovnosti budeme muset převést do proměnných  $u, v$ .

**Příklad 5.** Vypočtěte integrál  $\iint_A 2(x^2 + y^2) \, dA$ , kde  $A : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|$ .

*Nápověda.* Převeďte do polárních souřadnic.

**Příklad 6.** Vypočtěte  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx$ .

*Nápověda.* Transformujte do polárních souřadnic.

## Obsah plochy, hmotnost, těžiště

Integrály můžeme využít například při výpočtu následujících věcí:

- (1) obsah plochy  $A$  je

$$\iint_A dx \, dy,$$

- (2) hmotná destička mající plochu  $A$  a hustotu v bodě  $[x, y]$  danou funkcí  $\varrho(x, y)$  má hmotnost

$$M = \iint_A \varrho(x, y) \, dx \, dy,$$

- (3) hmotná destička mající plochu  $A$  a hustotu v bodě  $[x, y]$  danou funkcí  $\varrho(x, y)$  má souřadnice těžiště  $[x_0, y_0]$  dané vztahy

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_A x \varrho(x, y) \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_A y \varrho(x, y) \, dx \, dy.$$

**Příklad 7.** Určete obsah množiny  $A$  ohraničené křivkami  $x = y^2$  a  $x = 4y^2 - 3$ .

**Příklad 8.** Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami o rovnicích  $x = 0, y = \frac{1}{x}, y = 8$  a  $y = 4x$ .

**Příklad 9.** Máme destičku ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 1, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen a v protější vrcholu je rovna 2. Najděte těžiště destičky.

*Nápověda.* Uvažujte trojúhelník s vrcholy  $[0, 0], [1/\sqrt{2}, 0], [0, 1/\sqrt{2}]$ .

**Příklad 10.** Určete souřadnice těžiště homogenní destičky ohraničené grafy křivek  $y = x^2$  a  $x + y = 2$ .