

Cvičení 9: Náhodné veličiny a náhodné vektory

Příklad 1. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru (X, Y) , jehož distribuční funkce je

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -1 \\ \frac{1}{\pi^2}(\arcsin x + \frac{1}{2})(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } |x| < 1 \\ \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Určete rovněž marginální hustoty a rozhodněte, jsou-li veličiny X a Y nezávislé.

Výsledek. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, kde $f_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 1$, jinak 0, a $f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Jsou nezávislé.

Příklad 2. V urně je 14 kuliček – 4 červené, 5 bílých a 5 modrých. Náhodně bez vracení vybereme 6 kuliček. Určete rozložení náhodného vektoru (X, Y) , označuje-li X počet tažených červených kuliček a Y počet tažených bílých kuliček. Určete rovněž marginální rozložení veličin X a Y . Dále vypočtete $P(X \leq 3)$, $P(1 \leq Y \leq 4)$.

Příklad 3. Hustota náhodného vektoru (X, Y, Z) je

$$f(x, y, z) = \begin{cases} c(x + y + z) & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c , distribuční funkci a vypočtete $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{3}, 0 \leq Z \leq \frac{1}{4})$.

Výsledek. $c = \frac{2}{3}$, $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{3}, 0 \leq Z \leq \frac{1}{4}) = \frac{5}{48}$.