Zadání cvičení pro 3. týden: 1.-5.10. 2018

Toto cvičení bude zaměřeno na určování lokálních extrémů funkcí více proměnných. Postup je hodně podobný jako u jedné proměnné: (1) stacionární body, (2) přiblížení druhého řádu v těchto bodech - Hessián, (3) rozhodování o extrému - zejména Sylvestrovo kritérium. (Pokud je determinant Hessiánu nenulový, vždy umíme určit. Pouze u znamének hlavních minorů $+, +, \dots, +$ jde o minimum, $-, +, -, \dots, \pm$ odpovídá maximu, jinak jde o sedlový bod.)

Letmo se dostaneme k Jacobiho matici zobrazení $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Příklad. 1. *Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.*
(Stacionární body $[0, 0]$ a $[1, 1]$, v prvním není extrém, ve druhém lokální minimum.)

Příklad. 2. *Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ v prvním oktantu (tj. všechny tři souřadnice jsou nezáporné).*
(Jediný stacionární bod $[1/2, 1, 1]$, je to minimium.)

Příklad. 3. *Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.*
(Vyjdou tři stacionární body $[0, 0]$, $[1, 1]$, $[-1, -1]$, v prvním neumíme rozhodnout podle Hessiánu, další dva jsou minima. V počátku extrém nenastane – v okolí jsou kladné i záporné hodnoty.)

Příklad. 4. *Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ na celém jejím definičním oboru.*
(Definiční obor je celé $\mathbb{R}^2$, kromě počátku. Stacionárních bodů je osm: $[0, \pm 1]$, $[\pm 1, 0]$, $[\pm 1/\sqrt{2\,\mathrm{e}}, \pm 1/\sqrt{2\,\mathrm{e}}]$, v prvních čtyřech není extrém, v dalších jsou dvě minima a dvě maxima.)

Pro zobrazení $F = (f_1, \dots, f_n)$ je je lineárním přiblížení (diferenciál) dán maticí, v jejíž řádcích jsou diferenciály funkcí f_i. Je to tzv. Jacobiho matice DF. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je v okolí bodu invertibilní, právě když je v tomto bodu invertibilní jeho Jacobiho matice. Determinant DF se nazývá jacobián.

Příklad. 5. *Spočtěte Jacobiho matici a jacobián zobrazení, které popisuje transformaci kartézkých a polárních souřadnic.*

Příklad. 6. *Ověřte, že je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to R^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $g(x, y) = 2xy$ (tj. zobrazení $z \mapsto z^2$, uvažujeme-li F jako zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) invertibilní v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. Určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(2, 1)$. Je diferenciál F násobení komplexním číslem?*