$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \longmapsto A \cdot x = y$

$y = f(x)$ $\quad A = (a_{ij})$

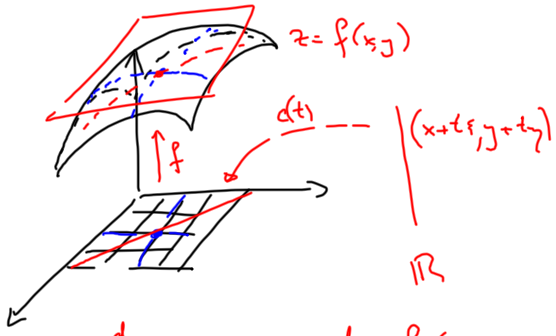
LINEÁRNÍ

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x^T \cdot A \cdot x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

KVADRATICKÉ FORMY $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

OBECNĚ: $f(x,y) = \sin x \cos y$

zář 25-14:01



$\frac{d}{dt} f \circ c(t) \Big|_{t=0} = d_{(\xi,\eta)} f(x,y)$

$\boxed{f_x \cdot \xi + f_y \cdot \eta}$

zář 25-14:12

EXISTENCE

$f(x+v) = f(x) + \boxed{df(x)}(v) + \alpha(v)$

bod $\mathbb{R}^n$ $\quad$ přírůstek v $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{\|v\|} \alpha(v) = 0}$

aproximace

$x \xrightarrow{v} x+v$

Theorém: f má spojité parciální derivace blízko x $\Rightarrow$ je diferencovatelná

zář 25-14:16

parciální derivace = "operátor" na funkcích

$f(x) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$

vyšší řád:

$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i}\right) =: \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ $\quad$ také $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}$

Th. f třídy C^k, tj. všechny parc. derivace až do řádu k spojité, pak nezáleží na pořadí.

k-tý řád: $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$ $\quad 1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$

zář 25-14:32

Dk. (náznak)

1) stačí pro $k=2$

2) stačí pro $n=2$

$f_{yx} \rightsquigarrow$ STEJNÝ VÝRAZ

$f_{xy}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f_x(x,y+t) - f_x(x,y)\right)$

$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f(x+s,y+t) - f(x,y+t) - (f(x+s) - f(x,y))\right)\right)$

? $\stackrel{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\left(\quad \right)$

NENÍ KOR.

zář 25-14:39

2. řád:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

matice kvadratické formy H $\quad$ symetrická matice

? $f(x+v) = \boxed{f(x)} + \boxed{df(x)(v)} + \boxed{\frac{1}{2} Hf(x)(v)}$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ $\quad (f_{x_1} v_1 + \ldots + f_{x_n} v_n)$ $\quad (v_1 \ldots v_n) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Tj. $f(x,y) = x^2 + 2xy + x - 2y + 1$ $\quad v \quad (0,0) = (x_0, y_0)$

$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 2 \quad f_{yy} = 0$

$f(\xi,\eta) = \boxed{1} + \boxed{1 \cdot \xi - 2\eta} + \boxed{\frac{1}{2} \cdot (2\xi^2 + 4\eta\xi)}$

zář 25-14:50

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad c(t) = x + tv$

$\boxed{\varphi(t) = f(c(t))}$ $\quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$n = 1:$ $\quad \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0)t^{k-1} + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(\theta)t^k$

$0 \le \theta \le t$

$\Rightarrow$

$$\boxed{f(x+v) = f(x) + D^1 f(x)(v) + \dots + \frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}f(x)(v) + \frac{1}{k!}D^k f(x+\theta v)(v)}$$

zář 25-15:18

$k = 2$

$$f(x+v) - f(x) = \overset{=0}{df(x)(v)} + \frac{1}{2}Hf(x+\theta v)(v)$$

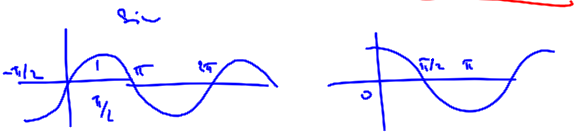
zář 25-15:27

Klasifikace kvadratické formy

$H = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\sim \pm 2xy$
$x \mapsto x^T H x$

$f(x,y) = \sin x \cos y$

sin



$H = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \pm(x^2 + y^2)$

zář 25-15:31

$H =$ 

zář 25-15:39