ODE :

např. Malthusiánský model populace:

$y(t)$ ... velikost populace v čase t

$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ počáteční hodnota v t_0

$$\boxed{y' = r y}$$

($r = 0.05 \sim 5\%$ nárůst)

řešení: $\boxed{C e^{rt}}$ $C \in \mathbb{R}$ obecné řešení

$y(0) = 1000 \Rightarrow C e^{r0} = \underbrace{C = 1000}$

$\Rightarrow y(t) = 1000 \cdot e^{rt}$.

říj 30-14:01

nehomogenní případ:

$y' = ry + \underline{s}$ r, s konstanty $r \neq 0$

$\underbrace{y' = ry}, \underbrace{z' = rz + s} \Rightarrow (y+z)' = r(y+z) + s$

$w' = rw + s \Rightarrow (z-w)' = r(z-w)' + \cancel{(s-s)}$

$y \equiv \alpha$: $0 = r\alpha + s \Rightarrow \alpha = -\frac{s}{r}$

$\Rightarrow$ obecné řešení: $\boxed{y = C e^{rt} - \frac{s}{r}}$

1. semestr: "[illegible]" diferenční rovnice

$y_{n+1} = r y_n + s$ ($r = 1.05 \sim 5\%$ nárůst)

$(y_{n+1} - y_n) = (r-1) y_n + s$

říj 30-14:05

příklad 2. řádu: $y'' = -\omega^2 y$

$\boxed{y'' = -y}$ obecné řešení:

$C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$

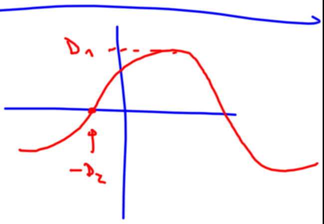
$\boxed{D_1 \sin(t + D_2)} = \underbrace{D_1 \sin t \cos D_2 + D_1 \cos t \sin D_2}$

$\boxed{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \quad 1 \end{array}}$ $C_2 = 1$

$C_1 + 0 = 0 \quad 1$

$y(t) = \cos(t)$

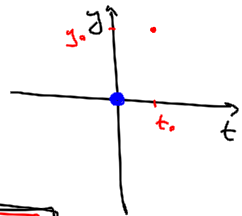
$= \cos(t) + \sin(t)$



říj 30-14:21

$\boxed{t y' = y}$

$\boxed{y' = \frac{y}{t}}$ $t \neq 0$



$\boxed{y' = f(t, y)}$ $y = y(t)$

$\boxed{dy = f(t, y)\, dt}$ $t\, dy = y\, dt$

říj 30-14:34

$y' = f(t) g(y)$

$\frac{1}{g(y)} dy = f(t) dt$, $g(y) \neq 0$

$\boxed{G(y) = F(t) + C}$

primitivní fce "volná" konstanta

říj 30-14:41

$\boxed{y' = t y}$

$G(y) = \int_1^y \frac{1}{z} dz$ $F(t) = \frac{1}{2} t^2$

$= \ln|y| \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} t^2 + C$ $C \in \mathbb{R}$

1) $y = 0 \Rightarrow y(t) = 0$ řešení

2) $y > 0 \Rightarrow y = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot \underbrace{e^C}_{D > 0}$ řešení!

3) $y < 0 \Rightarrow +y = e^{\frac{1}{2}t^2} \underbrace{(-e^C)}_{D < 0}$ řešení!

$\Rightarrow$ obecné řešení $y(t) = C e^{\frac{1}{2}t^2}$ $C \in \mathbb{R}$.

říj 30-14:45

$\boxed{ty' = y}$ $\boxed{y' = \frac{1}{t}y}$

$\Rightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{1}{t}dt \Rightarrow y = Ct$

ODE lineární 1. řád

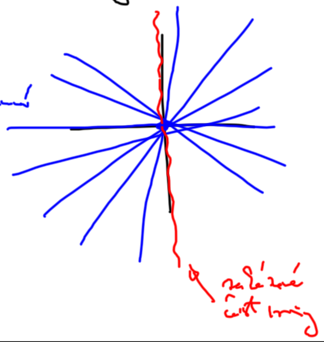
$y' = a(t)y$ homogenní

$\Rightarrow \ln|y| = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$

$F(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$

$\boxed{y(t) = y_0 F(t,t_0)}$

$y(t_0)$



říj 30-14:59

Příklad:

$y' = t - 2yt$

homogenní: $y' = \underbrace{-2t}_{= a(t)} y$ $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} -2s\,ds} = y_0 e^{-t^2+t_0^2}$

nehomogenní:

1) "hádání" $y' + 2yt = t$

hledáme $y = \alpha t + \beta$ $y' = \alpha$ $\alpha + 2(\alpha t + \beta)t = t$

$\Rightarrow t^2: \alpha = 0$ $t: 2\beta = 1$

$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}}$ Obecné řešení: $\boxed{Ce^{-t^2+t_0^2} + 1/2}$

2) variace konstant: $y(t) = C(t)e^{t_0^2-t^2}$ $y' = C'e^{t_0^2-t^2} + Ce^{t_0^2-t^2}(-2t)$

dosadíme: $(C' + \cancel{C(-2t)} + \cancel{2tC})e^{t_0^2-t^2} = t \Rightarrow C' = t\cdot e^{t^2-t_0^2}$

říj 30-15:08

transformace závislé:

$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$ $z = \frac{y}{t}$ $y = y(t)$

$z' = \frac{y't - y}{t^2} = \frac{1}{t}(f(z) - z)$ ← separované proměnné

$y' = \frac{y}{t}$ $z' = 0$ $z = C$ $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = Ct$ ✓

říj 30-15:21

$y' = f(t,y)$

$\boxed{y(t)} = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \boxed{y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds}$

$Ly(t)$

$y_{(0)}(t) = y_0$

$y_{(1)}(t) = Ly_{(0)}(t)$

$\vdots$

$y_{(n+1)}(t) = Ly_{(n)}(t)$

říj 30-15:27

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (t, y)

$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = F(t,y) = \begin{pmatrix} F_1(t,y) \\ \vdots \\ F_n(t,y) \end{pmatrix}$

$x' = \boxed{\alpha}x - \boxed{\beta y}x$

$y' = -\gamma y + \delta xy$

říj 30-15:33

$\boxed{y^{(k)} = f(t, y, y', \dots, y^{(k-1)})}$

→ $y_0 = y$

$y_1 = y_0'$

$y_2 = y_1' = y''$

$\vdots$

$y_{k-2} = y_{k-1}'$

$\boxed{\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{k-2}' &= y_{k-1} \\ y_{k-1}' &= f(t, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \end{aligned}}$

říj 30-15:43