Masarykova univerzita
Ekonomicko-správní fakulta

STATISTIKA I - Průběžná verze 1

Sbírka úloh

Vlastimil Reichel, Tereza Nováčková, Petra Ráboňová
Natalie Tomanová, Soňa Daneshjoová

Brno, 2018

Předmluva

Tento učební text je určen primárně pro studenty předmětů Statistika 1 (BKM_STA1 a BKM_STA1) Ekonomicko-správní fakulty Masarykovy univerzity. Materiál je učební pomůckou sloužící k osvojení základních statistických metod a je koncipován tak, aby byl student, po jeho propočtení, schopen bez obtíží projít základními kontrolními body (zápočet a zkouška). Před otevřením tohoto materiálu se očekává elementární znalost statistiky dávkovaná na přednáškách a doplněná povinnou literaturou. Při řešení je doporučena také spolupráce s větším kolektivem. Kapitoly 1-5 zahrnují učivo, které by měl student zvládnout do prvního průběžného testu. Zbylé kapitoly je vhodné průběžně řešit mezi prvním průběžným testem a zkouškou.

V předmluvě bych rád prohlásil, že tento text byl zčásti vytvořen a zčásti sesbírán z různých dostupných sbírek příkladů. Všechny využité sbírky jsou zmíněny ve zdrojích. Citace k jednotlivým příkladům nebyly uvedeny, neboť bylo prakticky nemožné vysledovat primární zdroj příkladu.

Na závěr bych rád poděkoval celému tvůrčímu týmu konkretně Soni, Natce, Terce a Peti. Velký dík patří také Masarykově univerzitě, která vytvoření sbírky finančně podpořila[1].

Brno, září 2018 Vlastík Reichel

1. Projekt: Tvorba podpůrných materiálů při výuce statistických předmětů (MUNI/FR/0101/2018).

Obsah

1 Statistika 1

1.1 Integrál

1.1.1 Řešené příklady

Příklad 1:

Řešte dvojný integrál s reálnou konstantou a:

$$\int_0^1 \int_y^2 e^{-x} + axy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Řešení:

S konstantou pracujeme jako s obyčejným číslem. Představme si, že dvojný integrál je jako cibule, která má dvě slupky. V našem případě vnitřní slupkou je vnitřní integrál, který integrujeme podle proměnné x. Na to "nabalíme"druhou slupku, která představuje vnější integrál integrovaný podle proměnné y. Integrujeme:

$$\int_0^1 \int_y^2 e^{-x} + axy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[-e^{-x} + \frac{ax^2y}{2} \right]_y^2 \mathrm{d}y = \int_0^1 -e^{-2} + 2ay + e^{-y} - \frac{ay^3}{2} \, \mathrm{d}y =$$

$$= \left[-e^{-2}y + ay^2 - e^{-y} - \frac{ay^4}{8} \right]_0^1 = -\frac{1}{e^2} + a - \frac{1}{e} - \frac{a}{8} - \left(-e^0 \right) = \frac{7a}{8} - \frac{e+1}{e^2} + 1$$

$\square$

Příklad 2:

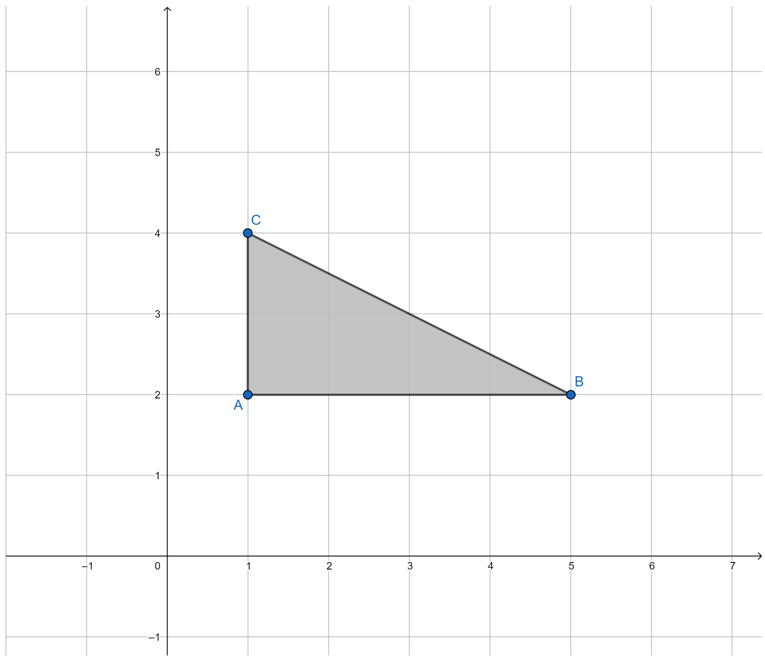
Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

na množině Ω, která je trojúhelník daný body $A = [1,2]$, $B = [5,2]$, $C = [1,4]$.

Řešení:

Začneme tím, že si nakreslíme graf s body ze zadání, body spojíme a vyznačíme si oblast, na které máme integrovat (trojúhelník).



Dále si potřebujeme určit meze pro vnitřní a vnější integrál. Vždy musíme meze určit tak, aby vnější meze již neobsahovaly neznámou a obsahovaly jen čísla či konstanty. Vnitřní meze naopak neznámou obsahovat mohou a to tu, kterou integrujeme až jako druhou. Vnější meze pro proměnnou x jsou od 1 do 5 (pro názornost si do obrázku můžete označit oblast x>1 a x<5). Vnitřní meze pro y jsou ohraničené stranami trojúhelníka AB (dolní mez) a BC (horní mez). Strana AB má jednoduché vyjádření přímky: $y = 2$. Potřebujeme si vyjádřit i rovnici druhé přímky, která je jen "protáhnutím"úsečky BC do nekonečna. Víme, že na přímce obsahující úsečku BC leží oba body B i C, jejichž souřadnice známe. Do směrnicového vyjádření přímky oba body postupně dosadíme, čímž získáme dvě rovnice o dvou neznámých, které vyřešíme. Směrnicový tvar rovnice přímky vypadá takto:

$$y = kx + q$$

Dosazením za x a y bodu B získáme:

$$2 = 5k + q$$

Dosazením za x a y bodu C pak získáme:

$$4 = k + q$$

Tyto dvě rovnice od sebe odečteme, tím se zbavíme q:

$$-2 = 4k$$

Potom už nám vyjde k:

$$k = -0,5$$

Neznámou q vypočítáme tak, že dosadíme $k = -0,5$ do například druhé rovnice:

$$4 = -0,5 + q$$

Výsledné q tedy bude:

$$q = 4,5$$

Přímka BC je tedy tvaru:

$$y = -0,5x + 4,5$$

Když si zakreslíme nerovnice pro všechny meze x>5, x<1,y>2 a y<-0,5x+4,5 zjistíme že výsledná oblast přesně popisuje oblast Ω.

Počítáme následující integrál:

$$\int_1^5 \int_2^{-0,5x+4,5} xy \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^5 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_2^{-0,5x+4,5} \mathrm{d}x = \int_1^5 \left(\frac{(-0,5x+4,5)^2}{2}x - \frac{4}{2}x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^5 x\left(\frac{0,25x^2 - 4,5x + 20,25 - 4}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^5 \left(0,25x^3 - 4,5x^2 + 16,25x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[0,25\frac{x^4}{4} - 4,5\frac{x^3}{3} + 16,25\frac{x^2}{2}\right]_1^5 = \frac{1}{2}\left[0,25\cdot\frac{625}{4} - 4,5\cdot\frac{125}{3} + 16,25\cdot\frac{25}{2} - \left(0,25\cdot\frac{1}{4} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -4,5\cdot\frac{1}{3} + 16,25\cdot\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{625}{16} - \frac{1125}{6} + \frac{1625}{8} - \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{2} + \frac{65}{8}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{96}{2} = 24$$

$\square$

Příklad 3:

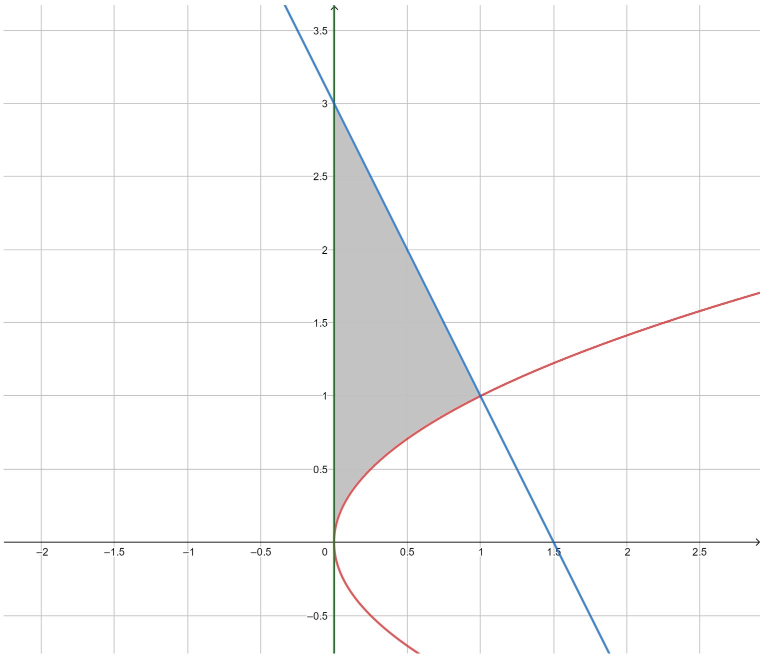
Určete meze pro výpočet dvojného integrálu ohraničeného křivkami $\Omega : x = 0, y = 3 - 2x, x = y^2$ (integrál nepočítejte):

a) $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

b) Otočte meze oproti bodu a).

Řešení:

a) Nejprve si křivky znázorníme v grafu:



Obrázek 1.1: Graf k příkladu 3

Oblast, na které budeme integrál počítat, je taková, která je ohraničená všemi třemi křivkami (vybarvená část obrázku).

Nejdříve se podíváme na vnější integrál. Na grafu vidíme, že vybarvená oblast je pro x ohraničena přímkou x=0, dolní mez bude tedy hodnota 0, horní mez musíme vypočítat, z obrázku vidíme, že se jedná o průnik funkcí $y = 3 - 2x$ a $x = y^2$, dosazením za y získáme x-ovou souřadnici:

$$x = (3 - 2x)^2$$

$$x = 9 - 12x + 4x^2$$
$$0 = 9 - 13x + 4x^2$$
$$0 = (x-1)(4x-9)$$

kořeny jsou tedy x=1 a x=9/4. Z obrázku vidíme, že hledaným kořenem je x=1. Takto jsme získali vnější horní mez pro x 1. Meze vnějšího integrálu jsou následující: dolní mez je 0, horní 1 (dolní hodnotou je menší číslo, horní hodnotou je větší z obou čísel).

Oblast pro y je ohraničená dvěma křivkami, jejichž funkční předpis známe ze zadání, jen ho potřebujeme mít vyjádřený pro proměnnou y. Přímka

$$y = 3 - 2x$$

je již v požadovaném tvaru, parabolu

$$x = y^2$$

musíme do správného tvaru upravit:

$$y = \sqrt{x}.$$

To jsou meze pro vnitřní integrál, kdy dolní mez je $\sqrt{x}$ a horní mez je $3 - 2x$. Zde rozlišení horní a dolní meze integrálu zjistíme tak, že jdeme pro y od 0 (nejnižší hodnota pro y vybarvené oblasti) a křivka, na kterou "narazíme"dříve, představuje dolní hodnotu a křivka, která je více vzdálená, představuje horní hodnotu. Výsledný dvojný integrál v tomto případě vypadá následovně:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

b) Oblast ohraničená křivkami ze zadání vypadá stejně jako v případě a). Nyní máme ovšem otočené pořadí integrace, tedy vnitřní integrál počítáme podle proměnné x a vnější podle proměnné y. Opět začneme mezemi pro vnější integrál, tedy mezemi pro y. Vidíme, že vybarvená část začíná na ose y v 0, ale koncovou souřadnici neumíme ihned určit. Spočítáme si tedy průsečík křivek

$$x = 0 \quad \text{a} \quad y = 3 - 2x.$$

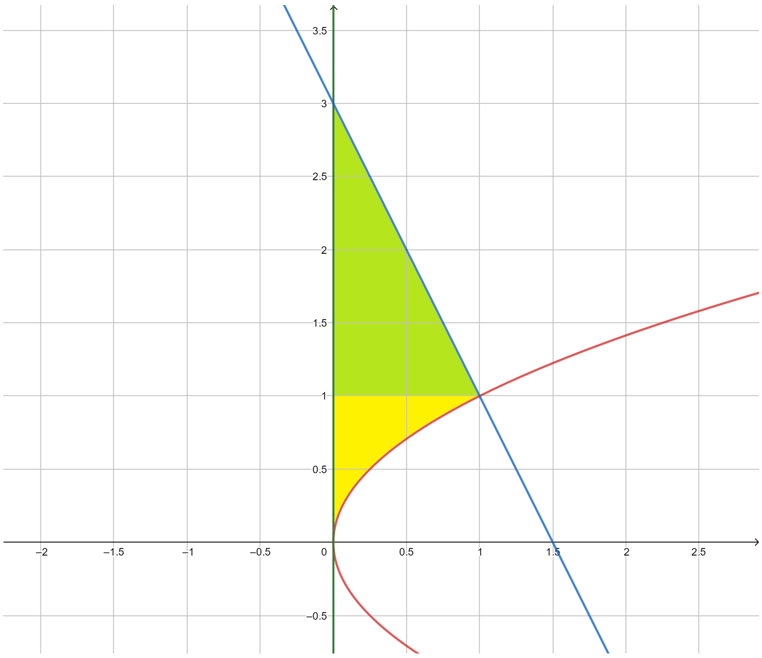
Máme dvě rovnice o dvou neznámých, kdy tu první můžeme dosadit do té druhé a získáme tím průsečík

$$y = 3.$$

Tedy horní mezí vnějšího integrálu je 3. Jak jsme si řekli v případě a), meze pro vnitřní integrál jsou ohraničené křivkami, které určíme tak, že se posouváme po ose od nejnižšího bodu naší oblasti, kterým je pro x hodnota 0 až po nejvyšší bod, kterým je průsečík křivek

$$y = 3 - 2x \quad \text{a} \quad x = y^2.$$

Dolní mezí tedy bude křivka $x = 0$. Horní mez ovšem nedokážeme určit jen pomocí jedné křivky. Musíme si tedy danou oblast rozdělit na dvě podoblasti a spočítáme dva dvojné integrály, které potom sečteme.



Obrázek 1.2: Graf k příkladu 3 s rozlišenými podoblastmi

Pro každou podoblast nyní dokážeme horní mez vnitřního integrálu bez problému určit. Rozdělením původní oblasti se nám změní i meze pro vnější integrál, které budou v prvním dvojném integrálu od 0 po 1 a ve druhém od 1 po 3. Dělící hodnotu y zjistíme tak, že najdeme průsečík křivek

$$y = 3 - 2x \quad \text{a} \quad x = y^2.$$

Druhou rovnici dosadíme do první a vše převedeme na jednu stranu rovnice:

$$y = 3 - 2y^2$$

$$2y^2 + y - 3 = 0$$

Nyní máme kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou 1 a $-\frac{3}{2}$. Nás zajímá ten první kořen (průsečík), neboť ten druhý neleží v naší oblasti. První dvojný integrál má pro y meze od 0 do 1 a pro x od 0 po křivku

$$x = y^2,$$

tedy horní mez je y^2. Druhý dvojný integrál má vnější meze od 1 do 3 a vnitřní meze od 0 po křivku

$$y = 3 - 2x,$$

kterou ještě musíme upravit do tvaru

$$x = \frac{3-y}{2}.$$

Horní mez pro x má tedy hodnotu $\frac{3-y}{2}$. Výsledný součet obou integrálů vypadá následovně:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-y}{2}} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

□

1.1.2 Neřešené příklady

1. Určete meze pro výpočet dvojného integrálu $\iint_\Omega f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a integrál nepočítejte:
   (a) M: [1,1], [2,1], [2,2]
   (b) M: [0,0], [2,0], [1,1], [0,1]
   (c) M: [2,2], [3,2], [2,3], [3,4]
   (d) M: [1,2], [3,4], [1,4]
   (e) M: [1,0], [3,-2], [1,3], [3,5]
2. Určete meze pro výpočet dvojného integrálu $\iint_\Omega f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a integrál nepočítejte:
   (a) $y = x^2, x = y$
   (b) $x = 2, x = 4, y = 6, y = 8$
   (c) $x = 2, x + y = 3, x = y - 4$

(d) $y = 1, y = 2, y = \frac{x}{2}, x + y = -1$

(e) $y = (x+1)^2 + 1, y = 2$

3. Určete meze pro výpočet dvojného integrálu $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a integrál nepočítejte:

   (a) $x = \sqrt{y-2}, y = 2x + 5, 0 \leq x \leq 2$

   (b) $-3 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2$

   (c) $-1 \leq y \leq 0, y = \sqrt{x+1}, y = 3(x-2)$

   (d) $-5 \leq x \leq -3, x = 2(y-2), x = \frac{y}{2}$

   (e) $0 \leq y \leq 3, y = 3x, x - 2y = 1$

4. Zaměňte pořadí integrace pro následující integrály:

   (a) $\int_{-2}^{0}(\int_{y^2-4}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$

   (b) $\int_{0}^{1}(\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$

   (c) $\int_{0}^{1}(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$

   (d) $\int_{1}^{2}(\int_{1}^{y} f(x,y)dx)dy + \int_{2}^{4}(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$

5. Spočtěte $\iint_\Omega x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \{(x,y) \mid x \in< 0,1 > \wedge y \in< 1,2 >\}$.

6. Spočtěte $\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

7. Spočtěte $\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

8. Spočtěte $\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $1 \leq x \leq y \leq 3$.

9. Spočtěte $\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2e$.

10. Spočtěte $\iint_\Omega x^2 + y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $y = x^2, y^2 = x$.

11. Spočtěte $\iint_\Omega \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $2 \leq x \leq 4, y = x, y = 2x$.

12. Spočtěte $\iint_\Omega e^{2x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 2, y = 0, y = 1, x = 0$.

13. Spočtěte $\iint_\Omega y - x + 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $1 \leq y \leq 2, y = x, y = x + 1$.

14. Spočtěte $\iint_\Omega 2xy + 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy

(a) $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$
(b) $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, x + y \geq 2$

15. Spočtěte $\iint_\Omega x^2 + 2y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy
    (a) $0 \leq x \leq 2, y = 0, y = 1 + x$
    (b) $0 \leq x \leq 2, y = 0, y = 1 + x, y \geq 1$
    (c) $0 \leq x \leq 2, y = 0, y = 1 + x, y \geq 2 - x$

16. Spočtěte $\iint_\Omega 2x + y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy
    (a) $x = 0, y = 0, x + y \leq 3$
    (b) $x = 0, y = 0, x + y \leq 3, x \leq y$
    (c) $x = 0, y = 0, x + y \leq 3, x \geq y$

17. Spočtěte $\iint_\Omega 1 + xy + x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy
    (a) $y = 2x, y = 2x - 2, 0 \leq y \leq 2$
    (b) $y = 2x, y = 2x - 2, 0 \leq y \leq 2, x \leq 1$
    (c) $y = 2x, y = 2x - 2, 0 \leq y \leq 2, x - y \geq 0$

18. Spočtěte $\iint_\Omega 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vrcholy obdélníku
    (a) $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 4]$, $[2, 4]$
    (b) $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 4]$, $[2, 4]$ a platí $y + 2x \geq 4$
    (c) $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 4]$, $[2, 4]$ a platí $y \leq 2x$.

19. Spočtěte $\iint_\Omega x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy
    (a) $x \geq 0$, $2x^2 \leq y \leq 2$
    (b) $x \geq 0$, $2x^2 \leq y \leq 2$, $x + y \geq 1$

20. Vypočítejte konstantu $a > 0$:
    (a) $\int_0^a \int_0^a 20xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 405$
    (b) $\int_0^a \int_0^a e^x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = e - 1$
    (c) $\int_0^a \int_0^a x - y + 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 25$

(d) $\int_0^a \int_0^a 4xy + x - y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2404$

(e) $\int_0^a \int_0^a x + y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8$

(f) $\int_0^a \int_0^a 2x^2 + 3y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2160$

21. Vypočítejte integrál s kladnou konstantou a:

(a) $\int_0^2 \int_1^a \frac{1}{a^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^a \frac{2}{2(x+a)} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(c) $\int_{-1}^1 \int_0^2 (2x + 3a)^2 - 7xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(d) $\int_0^1 \int_a^2 6(xy + ax^2 + ay^3) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(e) $\int_{-2}^1 \int_1^3 ae^{ax} + xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(f) $\int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{a}{e^x} + e^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

22. Vypočtěte integrál s kladnou konstantou a:

(a) $\int_1^2 \int_y^{y^2} \frac{1}{a} + x + y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{ay} + ax \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(c) $\int_{-2}^0 \int_y^{2y+1} 2a - xy^2 + 3axy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(d) $\int_1^3 \int_y^1 (3x + ay)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(e) $\int_0^3 \int_0^{y-1} (a + x)^2 + (a + y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

23. Spočtěte jednoduchý určitý integrál:

(a) $\int_0^2 e^{5x}, \mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^1 bx^2(12 - x) \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 \sqrt{x} + x^2 \,\mathrm{d}x$

(d) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{x^2-2x+1}{x-1} \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^8 \frac{x-2}{x^2-4} \,\mathrm{d}x$

24. Spočtěte jednoduchý neurčitý integrál:

(a) $\int 2 + e^{-x} \,\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{x+3+x^3}{2} \,\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{x-9}{x+3} \,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{x^2-4}{x-2} \,\mathrm{d}x$

(e) $\int 4x + \frac{1}{e^{2x}} \,\mathrm{d}x$

1.2 Pravděpodobnost

1.2.1 Řešené příklady

Příklad 1:

Ve třídě máme 30 studentů, z toho je 17 chlapců a 13 děvčat. Do senátu potřebujeme náhodně vybrat 5 studentů. Jaká je pravděpodobnost, že:

a) všichni vybraní studenti budou chlapci,

b) nejvýše 1 vybraný student bude chlapec,

c) nejméně 1 vybraný student bude děvče?

Řešení:

a) Označme: A ... jev všichni vybraní studenti jsou chlapci.

Chceme, aby všech 5 studentů vybraných do senátu byli chlapci, ale není pro nás podstatné v jakém pořadí budou vybráni a zároveň žádný z chlapců nemůže zastávat více funkcí v senátu, proto pro výběr použijeme kombinace bez opakování. Vybereme tedy ze všech chlapců (17) požadovaných 5. Takový výběr uděláme pomocí kombinačního čísla:

$$m(A) = \binom{17}{5} = 6\,188$$

Číslo $m(A)$ značí počet možných výsledků příznivých hledanému jevu A. (Jiný způsob výpočtu je uvažovat, že pro výběr prvního chlapce máme 17 způsobů, pro výběr druhého chlapce máme 16 způsobů a tak dále až pro výběr pátého chlapce máme 13 způsobů, tedy celkem $17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$ způsobů jak vybrat chlapce do senátu. V tomto případě jsme ale chlapce vybrali v určitém pořadí, ale nám na pořadí nezáleží, musíme zjistit kolik je tedy možných prohození mezi pěti chlapci a tímto číslem výsledek podělit, abychom se tohoto pořadí „zbavili“. Představme si, že máme pět židlí, na které chceme chlapce usadit a my chceme vědět, kolik je různých možností rozsazení těchto chlapců, to bude odpovídat všem možným prohozením mezi chlapci. Tedy na první židli můžeme usadit jednoho z pěti chlapců, máme tedy 5 možností, jak chlapce vybrat, pomyslně posaďme jednoho z chlapců na tuto židli a pokračujme obsazováním druhé židle, na ni můžeme posadit jednoho ze zbylých čtyř chlapců a takto pokračujeme dál až na pátou židli nám zbude poslední chlapec, tedy máme $5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1 = 5!$ možností. Celkově pro výběr do senátu máme $m(A) = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5!} = 6188$ možností.).

Nyní potřebujeme znát i počet všech možných výsledků $m(\Omega)$. Tedy ze všech studentů bez ohledu na pohlaví vybereme 5 studentů. Tento výběr opět provedeme pomocí kombinačního čísla:

$$m(\Omega) = \binom{30}{5} = 142\,506$$

Klasická pravděpodobnost P(A) ukazuje poměr mezi příznivými výsledky a všemi možnými výsledky. Proto dáme obě kombinační čísla do zlomku a zjistíme výslednou pravděpodobnost:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\binom{17}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{6\,188}{142\,506} = 0,0434$$

Pravděpodobnost, že do senátu vybereme 5 chlapců je tedy 4,34% .

b) Označme: B ... jev do senátu vybereme nevýše jednoho chlapce,
B_1 ... jev do senátu vybereme právě jednoho chlapce,
B_2 ... jev do senátu nevybereme žádného chlapce.

Příznivé výsledky budou v tomto případě takové, kde ve vybrané skupině bude buď právě 1 chlapec (a 4 děvčata), nebo zde nebude žádný chlapec (tedy vybereme 5 děvčat).

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$$

Pravděpodobnost, že ve skupině bude právě 1 chlapec, se spočítá takto:

$$P(B_1) = \frac{m(B_1)}{m(\Omega)} = \frac{\binom{17}{1}\binom{13}{4}}{\binom{30}{5}} = \frac{17 \cdot 715}{142\,506} = 0,0853$$

Pravděpodobnost, že ve skupině nebude žádný chlapec, získáme následovně:

$$P(B_2) = \frac{m(B_2)}{m(\Omega)} = \frac{\binom{17}{0}\binom{13}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{1 \cdot 1\,287}{142\,506} = 0,0090$$

Pravděpodobnost, že ve skupině bude právě jeden chlapec a zároveň žádný je nulová (pravděpodobnost nemožného jevu). Tedy jevy B_1 a B_2 jsou neslučitelné. Celkem

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0,0853 + 0,0090 - 0 = 0,0943.$$

c) Označme C ... jev nejméně jeden vybraný student bude děvče.

V tomto případě chceme získat takovou skupinu studentů, ve které je alespoň 1 dívka. Můžeme použít podobný postup jako v minulém případě, tedy sečíst pravděpodobnosti toho, že ve skupině je postupně 1 dívka, 2 dívky, 3 dívky, 4 dívky a 5 dívek. Jednodušší a rychlejší ovšem bude takový postup, ve kterém si spočítáme jev opačný $P(C')$, tedy že ve skupině budou samí chlapci. Tuto pravděpodobnost jsme již spočítali v bodě **a)** a je rovna:

$$P(C') = P(A) = 0,0434.$$

Abychom získali hledanou pravděpodobnost, tedy že ve skupině bude alespoň jedno děvče, musíme získanou pravděpodobnost odečíst od 1:

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - 0,0434 = 0,9566$$

□

Příklad 2:

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami (kostky jsou navzájem rozlišitelné):

a) padne lichý součet bodů na kostkách,

b) na obou kostkách padne 6?

Řešení:

a) Označme D ... jev padne lichý součet bodů na kostkách
Musíme si určit, jaké součty můžeme dvěma kostkami získat. Zjistíme, že součet se může pohybovat mezi 2 a 12. Liché součty tedy budou:

$$3, 5, 7, 9, 11.$$

Pro každý z těchto součtů si napíšeme všechny možnosti, které lze dvěma kostkami vytvořit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{3} &: 1+2,\ 2+1 \\
\mathbf{5} &: 1+4,\ 4+1,\ 2+3,\ 3+2 \\
\mathbf{7} &: 1+6,\ 6+1,\ 2+5,\ 5+2,\ 3+4,\ 4+3 \\
\mathbf{9} &: 3+6,\ 6+3,\ 4+5,\ 5+4 \\
\mathbf{11} &: 5+6,\ 6+5
\end{aligned}$$

Vidíme, že počet příznivých výsledků je pro každý součet *(součet: počet příznivých výsledků)*:

$$\mathbf{3}: 2 \qquad \mathbf{5}: 4 \qquad \mathbf{7}: 6 \qquad \mathbf{9}: 4 \qquad \mathbf{11}: 2$$

Dohromady tedy máme 18 příznivých výsledků. Nyní potřebujeme získat počet všech možných výsledků. Počet možných výsledků na první kostce je 6, na druhé kostce je počet možných výsledků také 6, tedy při hodu dvěma kostkami máme 36 možných výsledků.
Pravděpodobnost, že nám padne lichý součet bodů, spočítáme jako podíl:

$$P(D) = \frac{18}{36} = 0,5$$

b) Označme E ... jev na obou kostkách padne šestka
Počet příznivých možností m(E)=1. Počet všech možností známe z bodu a):

$$P(E) = \frac{1}{36} = 0,0278$$

□

Příklad 3:

Zkoušku úspěšně složí 69 % studentů. Ze zkušenosti víme, že pokud se studenti připraví, s 90 % pravděpodobností zkoušku úspěšně složí. K testu se ale připravilo pouze 75 % studentů. Jakou pravděpodobnost na úspěch ve zkoušce má student, který se nepřipravil? (Tedy jaká je pravděpodobnost, že zkoušku složí, přestože se na ní neučil?) Jaká je pravděpodobnost, že se náhodně vybraný student neučil, pokud víme, že zkoušku složil?

Řešení:

Nejprve si vypíšeme důležité informace ze zadání a označíme si potřebné jevy písmeny.

1. jev A – student se připraví na zkoušku, $P(A) = 0,75$
2. jev A' – student se nepřipraví na zkoušku, $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,75 = 0,25$
3. jev B – student úspěšně složí zkoušku, $P(B) = 0,69$
4. pokud se student připraví, složí zkoušku s danou pravděpodobností – $P(B|A) = 0,9$

Potřebujeme zjistit pravděpodobnost úspěchu studenta, který se na zkoušku nepřipravil, tedy $P(B|A')$. Dále chceme znát pravděpodobnost toho, že student, který zkoušku složil, se na ní nepřipravil, tedy $P(A'|B)$. První hledanou pravděpodobnost zjistíme z pomocí úplné pravděpodobnosti:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')$$

Z této rovnice si vyjádříme potřebnou pravděpodobnost a dosadíme hodnoty:

$$P(B|A') = \frac{P(B) - P(B|A)P(A)}{P(A')} = \frac{0,69 - 0,9 \cdot 0,75}{0,25} = 0,06$$

Pravděpodobnost, že uspěje student, který se na zkoušku nepřipravil je 6%.

Z Bayesova vzorce vypočítáme druhou hledanou pravděpodobnost následovně:

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} \rightarrow P(A'|B) = \frac{P(B|A')P(A')}{P(B)} = \frac{0,06 \cdot 0,25}{0,69} = 0,0217$$

Pravděpodobnost, že se student nepřipravoval, když víme, že zkoušku složit je 2,17%.

□

Příklad 4:

Hodíme jedenkrát hrací kostkou a zajímá nás pravděpodobnost těchto jevů:

a) Jev A: Na kostce padne 1.

b) Jev B: Padne lichý počet teček.

c) Jev C: Padne číslo větší než 4.

d) Jev D: Padne sudé číslo, které je větší než 3.

e) B'

f) $A \cup C$

g) $C \cap D$

h) $C \setminus B$

i) $B' \cap C'$

Řešení:

a) Víme, že hrací kostka má 6 stran, počet všech možných výsledků je tedy $m(\Omega) = 6$. Jen jedno z šesti čísel je 1, tedy $m(A) = 1$. Pravděpodobnost jevu A je tedy:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

b) Opět použijeme stejnou logiku jako v prvním případě. Lichá čísla jsou na kostce tři: 1,3,5. Pravděpodobnost jevu B je tedy:

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) Čísla větší než 4 jsou dvě: 5 a 6. Pravděpodobnost jevu C je:

$$P(C) = \frac{m(C)}{m(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d) Sudá čísla jsou na kostce tři: 2,4,6. Čísla větších než 3 jsou na kostce tři: 4,5,6. Tedy sudá čísla, která jsou větší než 3, jsou jen dvě: 4 a 6. Pravděpodobnost jevu D je:

$$P(D) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

e) Nyní chceme zjistit pravděpodobnost jevu opačného k jevu B. Víme, že součet pravděpodobností jevů B a jevu k němu opačnému, je 1. Tedy pravděpodobnost jevu B' spočítáme takto:

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

f) Pravděpodobnost, že padne 1 nebo že padlé číslo bude větší než 4 spočítáme podle vzorečku:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

K tomu nám chybí ještě výpočet pravděpodobnosti současného nastoupení obou jevů. Jaká je pravděpodobnost, že nám padne 1 a zároveň bude číslo větší než 4? Nulová, takový hod nemůže nastat, tyto dva jevy nemohou nastat zároveň, jsou neslučitelné tj. $P(A \cap C) = 0$. Počítáme tedy:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$$

g) Hledáme průnik dvou jevů. Jev $C = \{5, 6\}$, jev $D = \{4, 6\}$. Vidíme, že průnikem je jen číslo 6. Pravděpodobnost průniku těchto dvou jevů je:

$$P(C \cap D) = \frac{m(C \cap D)}{m(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

h) V tomto případě počítáme rozdíl jevů. Chceme, aby nastal jev B, ale uvažujeme jen ty případy, které se neobjeví v jevu C. Jev $B = 1, 3, 5$, jev $C = 5, 6$. Tedy přípustné případy jsou hody 1 a 3 (5 patří i do jevu C, což nechceme). Počítáme:

$$P(C \backslash B) = \frac{m(C \backslash B)}{m(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

i) Jev opačný k jevu B je $B' = \{2, 4, 6\}$, tedy padne sudý počet teček. K jevu C je pak jevem opačným $C' = \{1, 2, 3, 4\}$, tedy nepadne číslo větší než 4. Počítáme průnik, což jsou čísla 2 a 4:

$$P(B' \cap C') = \frac{m(B' \cap C')}{m(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

□

Příklad 5:

Pravděpodobnost, že student spočítá příklad (jev A), je $0,4$. Písemná zkouška se skládá z 10 příkladů. Jaká je pravděpodobnost, že student spočítá alespoň 1 příklad?

Řešení:

Chceme znát pravděpodobnost toho, že student spočítá alespoň 1 z 10 příkladů.
Označme: B ... jev studen spočítá alespoň jeden z deseti příkladů,
B_i ... jev student spočítá i-tý příklad

Tedy spočítá buď 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nebo všech 10 příkladů $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{10}$. Nyní máme dvě možnosti. Můžeme jednak spočítat pravděpodobnosti pro všechny výše zmíněné možnosti spočítaných příkladů, nebo spočítáme pravděpodobnost opačného jevu (jev $B' = B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_{10}$) a tu odečteme od 1, čímž získáme stejný výsledek. Opačným jevem v našem případě je to, že student nespočítá ani jeden příklad. Druhá možnost je početně mnohem jednodušší, ukážeme si tedy tu.

Pravděpodobnost toho, že student nespočítá příklad, zjistíme pomocí opačného jevu jevu A:

$$P(B'_i) = 1 - P(B_i) = 1 - 0,4 = 0,6$$

Příkladů ovšem máme 10 a potřebujeme, aby student nespočítal ani jeden z nich a předpokládáme, že výpočty jednotlivých příkladů jsou navzájem **nezávislé**. Počítáme dále takto:

$$P(B') = P(B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_{10}) = P(B'_1) \cdot P(B'_2) \cdot \ldots \cdot P(B'_{10}) = 0,6^{10} \doteq 0,006$$

Nyní už jen zjištěnou pravděpodobnost odečteme od 1 a získáme tím pravděpodobnost jevu B:

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0,006 = 0,994$$

□

1.2.2 Neřešené příklady

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne:
   (a) sudé číslo,
   (b) liché číslo,
   (c) číslo 8,
   (d) číslo větší než 2?
2. Házíme dvakrát kostkou. Rozhodněte, zda jsou následující jevy navzájem neslučitelné, stochasticky nezávislé:
   (a) V prvním hodu padne sudé číslo, v druhém hodu padne 6.
   (b) Součet padlých hodnot na obou kostkách je 3 a na obou kostkách padla alespoň 2.
   (c) V prvním hodu padne číslo menší než 3 a v druhém padne větší než 3.
   (d) V obou hodech padne 3.

(e) V obou hodech padne číslo menší než 2 a v obou hodech padne sudé číslo.

(f) V prvním hodu padlo sudé číslo, ve druhém hodu padlo liché číslo.

3. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami (řešte oběma způsoby, kdy kostky jsou i nejsou navzájem rozlišitelné):

   (a) bude součet bodů na kostkách 10,

   (b) bude součet bodů na kostkách vetší než 7,

   (c) padnu dvě stejná čísla,

   (d) alespoň na jedné kostce padne sudé číslo?

4. Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že:

   (a) padne součet 10,

   (b) padne součet vetší než 10,

   (c) padne alespoň jedno liché číslo,

   (d) padne právě jedno sudé číslo,

   (e) nepadne ani jednou čtyřka,

   (f) padne nejvýše jednou šestka?

5. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi stejnými mincemi najednou:

   (a) padne alespoň na jedné rub,

   (b) nepadne ani jednou líc,

   (c) padne na všech třech rub,

   (d) padne číslo větší než 2,

   (e) padne na dvou mincí líc a na jedné rub?

6. Maminka slíbila dětem, že jim koupí zmrzlinu (Předpokládejme, že maminka slib dodrží). Děti ze zkušenosti ví, že maminka koupí nanuky, pokud šla nakupovat do supermarketu s pravděpodobností 90%, pokud nešla nakupovat do supermarketu, koupí kopečkovou zmrzlinu s pravděpodobností 70%. (Maminka nekupuje jiné druhy zmrzliny než kopečkovou a nanuky). Maminka jde nakoupit do supermarketu ve čtyřech z pěti případů.

   (a) Vypočtěte pravděpodobnost, že maminka koupí nanuky.

(b) Pokud maminka koupila kopečkovou zmrzlinu, jaká je pravděpodobnost, že nakupovala v supermarketu?

(c) Jsou jevy „maminka koupí nanuky“ a „maminka nakupuje v supermarketu“ neslučitelné? Odpověď zdůvodněte.

(d) Určete pravděpodobnost, že maminka koupí nanuky nebo nakupuje v supermarketu.

7. Z balíčku karet (32 karet) vybereme postupně dvě karty. Jako druhou kartu jsme vytáhli krále. Jaká je pravděpodobnost, že i první karta bude král?

8. Na základě obrázku "Zadání 1"a dodatečných informací odpovězte na níže položené otázky. Informace: $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$, $P(A_3) = P(A_4) = 1/6$ a $P(A_3 \cap A_4) = 1/12$

   (a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou jevy A_1 a A_3 neslučitelné.

   (b) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou jevy A_1 a A_2 stochasticky nezávislé.

   (c) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jev A_1 má za důsledek jev A_2.

   (d) Určete: $P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)')$

   (e) Určete: $P((A_1 \cup A_2) \cup A_3)$

9. Na základě obrázku "Zadání 2"a dodatečných informací odpovězte na níže položené otázky. Informace: $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_3) = P(A_4) = 0,1$ a $P(A_1 \cap A_2) = 0,05$

   (a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou jevy A_4 a A_3 neslučitelné.

   (b) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou jevy A_1 a A_2 stochasticky nezávislé.

   (c) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jev A_1 má za důsledek jev A_2.

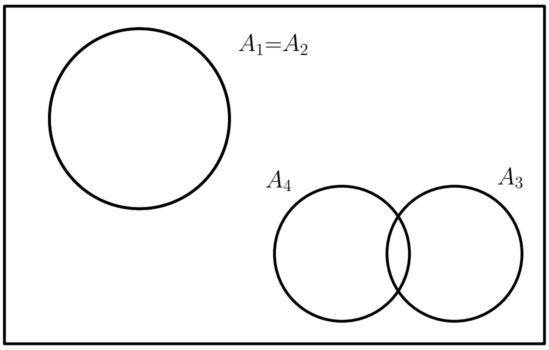
   (d) Určete: $P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)')$

   (e) Určete: $P((A_1 \cup A_2) \cup A_3)$

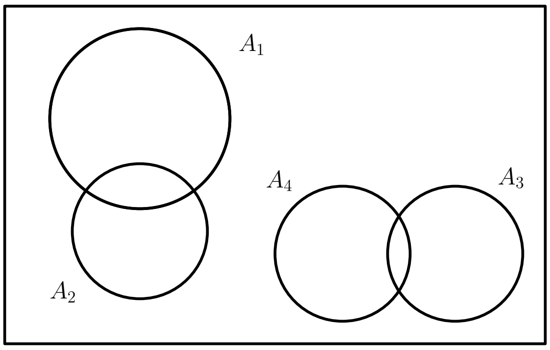
10. Číslice 1, 2, 3, 4, 5 jsou napsané na 5 kartách. Náhodně vybereme dvě karty a naskládáme je vedle sebe v tom pořadí, v jakém jsme je vybrali. Vypočítejte pravděpodobnost, že takto vzniklé dvouciferné číslo

    (a) bude liché,

    (b) začíná sudou číslicí.



(a) Zadání 1 k příkladu 8



(b) Zadání 2 k příkladu 9

11. Z balíčku (32 karet) vybereme dvě karty, přičemž kartu po vytažení ihned vrátíme do balíčku. Jaká je pravděpodobnost, že:
    (a) obě karty budou mít stejnou barvu,
    (b) obě karty budou král,
    (c) jedna karta bude eso a druhá král?

12. Nechť $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$. Uvažujme jevy $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ a $C = \{2, 5, 8, 11\}$.
    (a) Jsou jevy A, B, C nezávislé? Dokažte.
    (b) S jakou pravděpodobností nastane alespoň jeden ze všech tří jevů?
    (c) S jakou pravděpodobností nastanou všechny tři jevy zároveň?

13. Z balíčku karet (32 karet) vybereme postupně tři karty. Jaká je pravděpodobnost, že:
    (a) druhá karta bude eso,
    (b) minimálně jedna karta bude eso,
    (c) první karta bude eso a druhá bude král?

14. Máme 15 podniků: 7 malých, 3 střední a 5 velkých. Náhodně vybereme 4 podniky. Jaká je pravděpodobnost, že jsme:
    (a) vybrali dva malé, 1 střední a 1 velký podnik,
    (b) vybrali dva malé a dva velké podniky,

(c) nevybrali ani jeden malý podnik?

15. Ve firmě je 30 zaměstnanců: 21 mužů a 9 žen. Losováním se vyberou tři vedoucí. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vedoucími:

    (a) budou zastoupená obě pohlaví,

    (b) mužské pohlaví nebude zastoupené?

16. Do firmy nastoupili 4 noví zaměstnanci: Aleš, Jan, Anna, Michal. Dvojice, ve kterých budou spolupracovat, budou určené losem. Jaká je pravděpodobnost, že Aleš bude spolupracovat s Michalem a Jan s Annou?

17. Máme 40 výrobků: 32 dobrých, 8 zmetků. Náhodně vybereme 4 výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že:

    (a) ani jeden výrobek nebude zmetek,

    (b) právě 3 budou dobré,

    (c) nejvýše 2 budou zmetky?

18. Jaká je pravděpodobnost, že slovem náhodně sestaveným z písmen A, A, I, I, K, S, S, T, T, T bude STATISTIKA?

19. Dva kamarádi spolu mají chodit pravidelně každý týden na squash. Ovšem pravděpodobnost, že přijde první kamarád, je jen 40 % a pravděpodobnost, že přijde druhý, je 80 %. Pravděpodobnost, že se objeví alespoň jeden z nich, je 90 %. Jaká je pravděpodobnost, že si squash zahrají (tedy že přijdou oba)?

20. V knihovně máme 10 ekonomických knih postavených vedle sebe. Jaká je pravděpodobnost, že:

    (a) dvě určité knihy budou vedle sebe,

    (b) že mezi dvěma určitými knihami bude právě jedna jiná kniha?

21. Jev A znamená, že alespoň jeden ze tří ekonomů neumí vypočítat tento příklad. Jev B znamená, že alespoň tři ze čtyř ekonomů neumí vypočítat tento příklad. Co znamenají jevy A', B', $A \cup B$, $A' \cap B$?

22. Ve skupině 10 osob se nachází 5 šikovných a 5 nešikovných studentů. Náhodně vybereme 6 studentů. K tomu, aby skupina vytvořila slušný projekt, ale aby se mezi sebou moc šikovných studentů nehádalo, potřebujeme, aby mezi náhodně vybranými studenty byli právě

2 šikovní. Jaká je pravděpodobnost, že se nám podaří vybrat skupinu 6 osob, kde právě 2 studenti budou šikovní?

23. Vybíráme třikrát ze sáčku, ve kterém se nachází 5 zmetků a 12 dobrých výrobků. Po vytažení výrobky nevracíme. Jev A znamená, že vybereme tři zmetky. Jev B znamená, že nejvýše jeden z vytažených výroků bude zmetek. Jaká je pravděpodobnost jevu A, B, $A \cup B$?

24. 11 studentů jde večer po přednášce do kina. Mají koupené lístky v jedné řadě bez přerušení a domlouvají se, jak budou sedět. Víme, že Adéla nechce sedět vedle Dominika a že Klára chce sedět vedle Ondry. Předpokládáme, že každé jméno se ve skupině vyskytuje právě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že se Adéle a Kláře při náhodném losování lístků splní přání?

25. Pokud maminka nakupovala v supermarketu, koupila zmrzlinu s pravděpodobností 0,8. Jestliže maminka nenakupovala v supermarketu, nekoupila zmrzlinu s pravděpodobností 0,4. Pravděpodobnost, že maminka koupila zmrzlinu je 0,6. Určete:
    (a) s jakou pravděpodobností maminka nakupovala v supermarketu.
    (b) s jakou pravděpodobností maminka nakupovala v supermarketu, pokud koupila zmrzlinu.
    (c) zda jsou jevy maminka nakupovala v supermarketu a maminka koupila zmrzlinu stochasticky nezávislé.

26. Máme množinu Ω všech čtyřciferných čísel sestavených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5.
    (a) Kolik čísel množina Ω obsahuje?
    (b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo z Ω bude složeno z různých cifer?
    (c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo z Ω bude sudé?
    (d) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo z Ω bude obsahovat 1 a 2 vedle sebe?

27. Dvakrát po sobě házíme kostkou. Jev A značí, že v druhém hodu padne jiné číslo než v prvním hodu. Jev B potom značí, že v druhém hodu padne větší číslo než v prvním. Spočtěte:
    (a) $P(A \cap B)$
    (b) $P(A \cup B)$
    (c) $P(A|B)$
    (d) $P(B|A)$

(e) $P(A')$

28. Podnik si vybírá 2 ze 3 největších měst v České republice, ve kterých otevře nové pobočky. Víme, že nepreferuje žádné město ani žádnou kombinaci měst před jinou. Jaká je pravděpodobnost, že
    (a) mezi vybranými městy bude Ostrava,
    (b) mezi vybranými městy nebude Brno,
    (c) podnik vybere Brno a Prahu?

29. 50 studentů se má rozdělit do tří cvičebních skupin, kdy v první skupině (A) bude 15 studentů, ve druhé (B) 16 studentů a ve třetí (C) 19 studentů. Jaká je pravděpodobnost, že určitý student bude
    (a) ve skupině B,
    (b) ve skupině A nebo B,
    (c) nebude ve skupině C?

30. Pravděpodobnost jevu A je $0,4$, jevu B je $0,6$ a jevu C je $0,3$. Dále víme, že $P(A \cap B) = 0,2$, $P(A \cap C) = 0$, $P(B \cap C) = 0,1$, $P(A \cap B \cap C) = 0$. Určete pravděpodobnost jevů:
    (a) A'
    (b) $(A \cup B)$
    (c) $(B' \cup C')'$
    (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
    (e) $(B \cup C)$
    (f) $(A \cup B \cup C)$

31. Máme dva jevy A a B, které mají neprázdný průnik. Dokažte, že pravděpodobnost jevu $A \cap B$ se rovná pravděpodobnosti jevu $(A' \cup B')'$.

32. Jakub si chce založit firmu a začít podnikat. Pro založení musí splnit 2 podmínky: úspěšně dokončit školu a získat půjčku (tyto 2 jevy jsou nezávislé).
    - Škola: Na závěrečných zkouškách bude Jakuba zkoušet 5členná komise, jejíž členové jsou náhodně vybraní z 12 profesorů. Z toho 7 profesorů je hodných a 5 je přísných. Aby Jakub složil zkoušku, v komisi musí být většina profesorů hodných.

- Půjčka: Jakub má 20% pravděpodobnost získání půjčky v náhodně vybrané bance.

Předpokládejte, že pro Jakuba je pravděpodobnost získání půjčky ve všech bankách stejná. V kolika bankách musí Jakub požádat o půjčku, aby pravděpodobnost, že se mu podaří založit firmu, byla alespoň 0,5?

33. Na zkoušce jsou zkoušeny tři okruhy otázek. Student bude mít náhodně vylosován jeden ze tří okruhů. Ví, že z okruhu A umí 60 %, okruh B umí na 85 % a okruh C zvládá na 80 %.

    (a) Jaká je pravděpodobnost, že ho ze zkoušky vyhodí?
    (b) Jaká je pravděpodobnost, že ho vyhodí z okruhu B?
    (c) Když zkoušku úspěšně složí, jaká je pravděpodobnost, že ji složí s okruhu C?

34. Pravděpodobnost jevu A je $0,2$. Pravděpodobnost jevu B je $0,6$. Pravděpodobnost jevu $A \cap B$ je $0,4$. Zjistěte, zda jsou jevy A a B stochasticky nezávislé.

35. Ze všech dětí ve třídě má 70 % rádo čokoládovou zmrzlinu a 35 % má rádo čokoládovou i vanilkovou zmrzlinu. Kolik procent dětí, které mají rády čokoládovou zmrzlinu, má rádo i vanilkovou?

36. Hodíme dvakrát po sobě hrací kostkou. Jev A znamená, že v prvním hodu padlo sudé číslo. Jev B znamená, že v druhém hodu padlo číslo větší než 3. Jev C znamená, že v obou hodech padlo liché číslo.

    (a) Vypište všechny možné výsledky hodů příznivé jevům A, B, C.
    (b) Zjistěte, zda jevy A, B, C jsou stochasticky nezávislé.

37. 100 lidí si koupilo auto. Z nich 40 si přikoupilo i alarm, 30 airbagy navíc a 20 z nich si přikoupilo jak alarm, tak i airbagy navíc. Pokud si náhodně vybraný kupec koupil alarm, jaká je pravděpodobnost, že si koupil také airbag?

38. Z minulého ročníku předmětu Statistika 1 víme, že ze všech 309 studentů zkoušku úspěšně složilo 240. Na první pokus zkoušku udělalo 141 studentů. O vybraném studentovi víme, že neudělal zkoušku na první pokus, ale nevíme, zda se mu ji podařilo udělat na další dva pokusy, nebo jestli musí předmět opakovat. Jaká je pravděpodobnost, že student zkoušku složil a nemusí tedy předmět opakovat? Zkuste spočítat pomocí podmíněné pravděpodobnosti.

39. Tři studenti musí složit stejnou zkoušku (při skládání zkoušky od sebe neopisují). Pravděpodobnost, že student A zvládne zkoušku, je 0,7. Druhý student B zkoušku zvládne s pravděpodobností 0,5. Třetí student C zkouškou úspěšně projde s pravděpodobností 0,9.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že alespoň studenti B a C zvládnou zkoušku?

(b) Pokud víme, že první student A zkoušku složil, jaká je pravděpodobnost, že ji nesloží zbývající dva studenti?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku složí jen studenti A a B?

40. Příklad vychází z této kontingenční tabulky:

	Má mazlíčka	**Nemá mazlíčka**	**Celkem**
Muž	0,41	0,08	0,49
Žena	0,45	0,06	0,51
Celkem	0,86	0,14	1

Spočtěte, kolik žen nemá mazlíčka a dále určete pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná osoba vlastnící mazlíčka je muž.

41. Pravděpodobnost výskytu jevu A je rovna $0,2$ a je při každém pokusu stejná a pokusy jsou navzájem nezávislé. Pokusy se opakují tak dlouho, dokud jev nenastane. Jaká je pravděpodobnost, že se bude muset provést čtvrtý pokus?

42. Z 50 zaměstnanců podniku, ze kterých je 30 mužů, se vybírají náhodně 4 zaměstnanci. Jaká je pravděpodobnost, že

(a) všichni vybraní zaměstnanci budou ženy,

(b) první tři zaměstnanci budou muži a poslední bude žena?

43. Kolik je třeba vzít čísel z tabulky náhodných celých čísel (sudých a lichých čísel je v tabulce stejně), abychom s pravděpodobností $0,9$ mohli tvrdit, že je mezi nimi sudé číslo? (Nápověda: Označme A_j takový jev, kdy vybereme sudé číslo v j-tém tahu.)

44. V urně jsou dvě koule: černá a bílá. Vybíráme koule tak dlouho, dokud nevybereme černou kouli, přičemž kdykoliv vytáhneme bílou kouli, hodíme ji zpět do urny a přidáme tam ještě další dvě bílé koule. Jaká je pravděpodobnost, že při prvních 4 tazích černou kouli nevytáhneme?

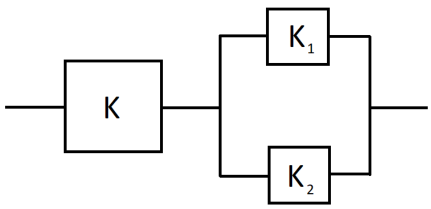
45. Firma odebírá stejné výrobky od dvou dodavatelů. Od prvního dodavatele odebírá měsíčně 8000 výrobků, ze kterých je 10 % vadných. Od druhého dodavatele odebírá měsíčně 2000 výrobků, ze kterých je 5 % vadných. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z měsíční dodávky je vadný? Pokud je výrobek vadný, jaká je pravděpodobnost, že pochází od:

(a) prvního dodavatele,

(b) druhého dodavatele?

46. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě šestky, jestliže víme, že součet padlých teček je dělitelný šesti?

47. Přerušení elektrické sítě může nastat následkem poruchy elementu K nebo dvou elementů K_1 a K_2. Pravděpodobnost poruchy elementu K je 0,3. Pravděpodobnosti poruchy elementů K_1 a K_2 jsou 0,2. Poruchy nastávají nezávisle na sobě. Určete pravděpodobnost přerušení sítě.



Obrázek 1.3: Schéma k příkladu 47

48. Tři lovci vyrazili na lov divokého kance. Všichni naráz vystřelili a kanec padl. Zjistili, že kance trefila jen jedna ze tří kulek. Pravděpodobnosti zásahu jednotlivými střelci jsou 0,2; 0,4; 0,6. Určete pravděpodobnost, že kance zastřelil:

(a) první lovec,

(b) druhý lovec,

(c) třetí lovec?

49. V domě se nachází pět bytů. V jednom žijí dva muži, v druhém žena a tři muži, ve třetím dvě ženy a tři muži, ve čtvrtém šest žen a jeden muž a v posledním žije manželský pár. Jestliže zaklepeme na dveře a otevře žena, s jakou pravděpodobností jsem se dostali k manželskému páru?

50. Předpokládejme, že máme školu s 60 % chlapců a 40 % dívek. Všichni chlapci nosí kalhoty. Z dívek nosí kalhoty polovina. Pozorovatel vidí z dálky studenta v kalhotách. Jaká je pravděpodobnost, že tento student je dívka?

51. Učitel Kubík přijde do třídy, kde je 30 % lhářů, 15 % náladových a 55 % normálních studentů. Lháři lžou s pravděpodobností 0,9. Normální studenti mluví s pravděpodobností 0,75

pravdu. Náladoví studenti v polovině případů lžou a v polovině říkají pravdu. Učitel Kubík se zeptá jednoho ze studentů, jestli je normální. Jaká je pravděpodobnost, že mu student odpoví, že je normální?

52. V léčebně je 10 % pacientů předepsán lék proti bolesti. Ovšem 5 % pacientů je závislých na látce obsažené v tomto léku proti bolesti. Ze všech pacientů, kterým je lék předepsán, je 8 % závislých. Pokud je pacient závislý, jaká je pravděpodobnost, že mu bude předepsán lék proti bolesti?

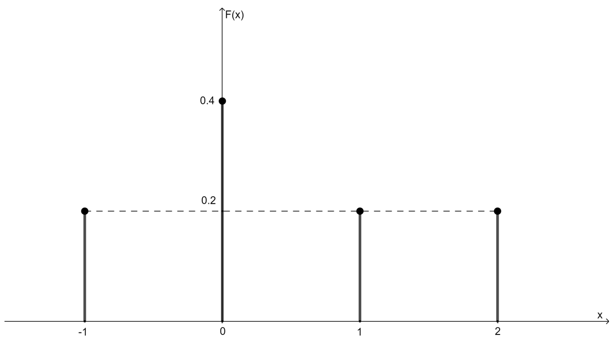
53. Skupina studentů plánuje na dnešní den piknik, ale ráno je zataženo. Víme, že 50 % ze všech dní, kdy prší, je ráno zataženo. Ale také jsou zatažená rána poměrně běžná (40 % všech dní je ráno zataženo). Tento měsíc je navíc měsíc sucha, pouze 10 % dní by mělo pršet. Jaká je pravděpodobnost, že dnes bude pršet?

1.3 Pravděpodobnostní funkce a hustota pravděpodobnosti

1.3.1 Řešené příklady

Příklad 1:

Je dána pravděpodobnostní funkce $p(x)$ dle obrázku:



Obrázek 1.4: Graf pravděpodobnostní funkce

Určete:

a) předpis pravděpodobnostní funkce $p(x)$,

b) $P(X = 3)$,

c) $P(X \leq 1)$,

d) $P(-1 < X < 4)$.

Řešení:

a) Z obrázku ze zadání si vyčteme souřadnice všech bodů: $[-1; 0,2]$, $[0; 0,4]$, $[1; 0,2]$ a $[2; 0,2]$. Nejprve si vypíšeme, které realizace náhodné veličiny X mohou nastat s nenulovou pravděpodobností, toho docílíme tak, že si vypíšeme x-ové souřadnice bodů, $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Když sečteme všechny y-ové hodnoty, měli bychom díky vlastnosti pravděpodobnostní funkce získat 1. Ověříme tím, že jde o pravděpodobnostní funkci:

$$0,2 + 0,4 + 0,2 + 0,2 = 1$$

Nic nám tedy nebrání v zapsání předpisu této funkce. Nejde o ni jiného, než o seskupení x-ových hodnot se stejnou y-ovou hodnotou:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0,4 & \text{pro} \quad x = 0; \\ 0,2 & \text{pro} \quad x \in \{-1, 1, 2\}; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) Pro následující body budeme jen sčítat hodnoty z pravděpodobnostní funkce. Pravděpodobnost, že $X = 3$ zjistíme tak, že se podíváme buď na graf ze zadání, nebo na předpis z předchozího bodu a zjistíme hodnotu pro $x = 3$. Ta je v tomto případě rovna 0. Tedy:

$$P(X = 3) = p(3) = 0$$

c) V tomto případě sčítáme y-ové hodnoty pro $x \leq 1$:

$$P(X \leq 1) = p(-1) + p(0) + p(1) = 0,2 + 0,4 + 0,2 = 0,8$$

d) Opět stejný postup jako v předchozích případech:

$$P(-1 < X < 4) = p(0) + p(1) + p(2) = 0,4 + 0,2 + 0,2 + 0 = 0,8$$

□

Příklad 2:

Pro každý z 5 kontrolovaných výrobků je pravděpodobnost 0,6, že vydrží zkoušku pevnosti a tahu. Kontrola končí, jakmile první výrobek zkoušku nevydrží. Náhodná veličina X udává počet zkontrolovaných výrobků do zjištění nekvalitního výrobku (včetně).

a) Určete pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

b) S jakou pravděpodobností nebude zjištěna závada do třetí kontroly?

c) Určete pravděpodobnost, že závada bude zjištěna při třetí kontrole.

Řešení:

a) Náhodná veličina X může nabývat hodnot:

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Každé z čísel znamená, že výrobek v pořadí daného čísla nevydržel zkoušku. U pátého výrobku už je nám ovšem jedno, zda vydrží či nevydrží zkoušku (zkontrolován bude tak či tak), protože dál už jít nemůžeme, takže $X = 5$ budeme interpretovat tak, že čtvrtý výrobek vydržel zkoušku. Nyní pro každý z pěti výrobků určíme pravděpodobnost, s jakou nevydrží zkoušku, s předpokladem toho, že výrobky před daným výrobkem zkouškou úspěšně prošly:

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= 0,4 \\
P(X = 2) &= 0,6 \cdot 0,4 \\
P(X = 3) &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \\
P(X = 4) &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \\
P(X = 5) &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6
\end{aligned}$$

Získáme tím pravděpodobnostní funkci:

$$p(x) = \begin{cases} 0,4 & \text{pro} \quad x = 1; \\ 0,24 & \text{pro} \quad x = 2; \\ 0,144 & \text{pro} \quad x = 3; \\ 0,0864 & \text{pro} \quad x = 4; \\ 0,1296 & \text{pro} \quad x = 5; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro kontrolu můžeme sečíst všechny pravděpodobnosti a zjistíme, že se opravdu rovnají 1.

b) Aby nebyla zjištěna závada do třetí kontroly, musí být buď zjištěna od třetí kontroly dále, nebo nesmí být zjištěna vůbec. Tento příklad je možné počítat dvěma způsoby, ukážeme si oba. První způsob je takový, že sečteme pravděpodobnosti pro $X \in \{3, 4, 5\}$, protože to jsou případy, které splňují zadání. Vyjde nám následující pravděpodobnost:

$$P(X \geq 3) = p(3) + p(4) + p(5) = 0,144 + 0,0864 + 0,1296 = 0,36$$

Také můžeme úlohu řešit tak, že nechceme, aby závada nastala při první nebo druhé kontrole, takže od 1 odečteme pravděpodobnosti toho, že by při těchto kontrolách závada nastala:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0,4 + 0,24) = 1 - 0,64 = 0,36$$

Vidíme, že v obou případech nám vyšlo, že s 36% pravděpodobností nebude vadný ani první ani druhý výrobek.

c) Nyní požadujeme, aby závada byla zjištěna při třetí kontrole. Tuto hodnotu můžeme přímo vyčíst z předpisu pravděpodobnostní funkce.

$$P(X = 3) = 0,144$$

□

Příklad 3:

Nechť je dána funkce $f(x)$, a a b jsou reálná čísla:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-3) & \text{pro} \quad x \in (-3, b); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Pro $b = 1$ určete a tak, aby $f(x)$ byla funkce hustoty pravděpodobnosti.

b) Pro $a = 2$ určete b tak, aby $f(x)$ byla funkce hustoty pravděpodobnosti.

c) Jaká je pravděpodobnost, že $P(X = -1)$ pro $a = -\frac{2}{27}$ a $b = 0$?

d) Spočtěte $P(X < -2)$ pro $a = -\frac{2}{27}$ a $b = 0$.

Řešení:

a) Víme, že pokud má být funkce $f(x)$ funkcí hustoty, musí být obsah pod touto funkcí roven jedné tj. její integrál pro $x \in (-\infty, \infty)$ roven 1. Počítáme tedy rovnici:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x-3)\,\mathrm{d}x = 1$$

Protože ze zadání máme řečeno, že funkce nabývá až na interval $(-3, b)$ nulové hodnoty, můžeme si meze integrálu zmenšit na daný interval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x-3)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-3} 0\,\mathrm{d}x + \int_{-3}^{b} a(x-3)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{b} a(x-3)\,\mathrm{d}x$$

Konstantu b máme v tomto případě zadanou, můžeme ji tedy dosadit za horní mez a integrál spočítat:

$$\int_{-3}^{1} a(x-3)\,\mathrm{d}x = a\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-3}^{1} = a\left[\frac{1}{2} - 3 - \left(\frac{9}{2} + 9\right)\right] = a(-16)$$

Následně dosadíme výsledek do původní rovnice a zjistíme tím hodnotu konstanty a:

$$\begin{aligned} -16a &= 1 \\ a &= -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

b) Postup je zde téměř totožný s předchozím případem. Opět máme stejnou rovnici, akorát nyní známe a a potřebujeme zjistit b. Nejdříve si spočítáme integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2(x-3)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{b} 2(x-3)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-3}^{b} = 2\left[\frac{b^2}{2} - 3b - \left(\frac{9}{2} + 9\right)\right] = b^2 - 6b - 27$$

Výsledek se opět musí rovnat 1, protože chceme, aby $f(x)$ byla funkcí hustoty pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} b^2 - 6b - 27 &= 1 \\ b^2 - 6b - 28 &= 0 \end{aligned}$$

Nejdříve spočítáme diskriminant kvadratické rovnice:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ D &= 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) \\ D &= 148 \end{aligned}$$

Poté dosadíme do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice:

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$b_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{148}}{2}$$
$$b_1 = 3 + \sqrt{37}$$
$$b_2 = 3 - \sqrt{37}$$

Vyšla nám dvě čísla. Číslo b_2 neleží v požadovaném intervalu ze zadání (není větší než -3), tedy funkce $f(x)$ je funkcí hustoty pravděpodobnosti pro $a = 2$ a $b = b_1 = 3 + \sqrt{37}$.
c) Pravděpodobnost je nulová. V intervalu $(-3, 0)$ je nekonečně mnoho reálných čísel a pravděpodobnost, že z nekonečna vybereme jedno konkrétní číslo, je rovna nule.
d) Tuto pravděpodobnost spočteme pomocí určitého integrálu s mezemi od -3 do 0. Počítáme:

$$\int_{-3}^{-2} -\frac{2}{27}(x-3)\mathrm{d}x = -\frac{2}{27}\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-3}^{-2} = -\frac{2}{27}\left(8 - \frac{9}{2} - 9\right) = -\frac{2}{27}\left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{11}{27}$$

□

Příklad 4:

Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot 0,5^x & \text{pro} \quad x = 1, 2, 3 \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete konstantu k.

b) Vypočtěte $P(X > 10)$.

c) Vypočtěte $P(1 \leq X < 7)$.

Řešení:

a) Abychom mohli určit konstantu k, připomeneme si vlastnost pravděpodobnostní funkce, která říká, že součet pravděpodobností $p(x)$ pro všechna x musí být roven 1. Můžeme tedy sečíst všechny pravděpodobnosti pro každé x a to položit rovno jedné:

$$\sum_{x=1}^{\infty} k \cdot 0,5^x = 1 \tag{1.1}$$

Sumu na levé straně rovnice můžeme jednoduše spočítat, neboť se jedná o geometrickou řadu s kvocientem $q = 0,5$ (kvocient je v absolutní hodnotě menší než 1, řada tedy konverguje) a prvním členem pro $x = 1$ $a_1 = 0,5$. Dosadíme tedy do vzorce pro součet nekonečné geometrické řady:

$$\sum_{x=1}^{\infty} k \cdot 0,5^x = \frac{a_1}{1-q} = k \cdot \frac{0,5}{1-0,5} = k \cdot 1 = k$$

Konstantu k jsme vytkli před vzorec pro součet nekonečné řady, protože každý člen této řady je koeficientem násoben, tudíž ho můžeme vytknout před celý součet. Součet řady je tedy roven k. Z rovnice (1.1) vidíme, že součet naší řady musí být roven 1, z toho plyne, že:

$$k = 1.$$

b) Nejdříve si pravděpodobnost převedeme do tvaru, se kterým umíme počítat a ten dále upravíme do sumy:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{t=-\infty}^{10} p(t)$$

Ze zadání víme, že pravděpodobnost pro $x \leq 0$ je rovna 0, můžeme tedy sumu upravit:

$$\sum_{t=-\infty}^{10} p(t) = \sum_{t=1}^{10} p(t)$$

Následně za $p(t)$ dosadíme funkci ze zadání a sumu spočítáme (z předchozího bodu už víme, že $k = 1$):

$$1 - \sum_{t=1}^{10} p(t) = 1 - \sum_{t=1}^{10} 0,5^x = 1 - a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - 0,5 \cdot \frac{1-0,5^{10}}{1-0,5} = 0,0010$$

c) Opět si musíme přepsat pravděpodobnost do lepšího tvaru:

$$P(1 \leq X < 7) = P(1 \leq X \leq 6)$$

Zde máme dvě nerovnosti a můžeme pravděpodobnost spočítat tak, že od sebe odečteme dvě pravděpodobnosti. První z nich vytvoříme z nerovnosti na pravé straně, druhou z nich pak z nerovnosti na levé straně. Ovšem u nerovnosti na levé straně potřebujeme mít pravděpodobnost, že x bude menší než daná nerovnost. Plyne to z definice pravděpodobnostní funkce. Rozdělení nerovností vypadá následovně:

$$P(1 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 0)$$

Druhá z pravděpodobností je ze zadání rovna 0, tím se nám v tomto případě počítání zjednodušilo a počítáme tedy jen první pravděpodobnost (stejným způsobem jako v předchozím případě):

$$P(X \leq 6) - P(X \leq 0) = P(X \leq 6) - 0 = P(X \leq 6) = \sum_{t=1}^{6} 0,5^x = 0,5 \cdot \frac{1 - 0,5^6}{1 - 0,5} = 0,9844$$

□

1.3.2 Neřešené příklady

Pravděpodobnostní funkce

1. Majitel autorizovaného servisu nabídl půjčovně automobilů své služby. Za každý automobil zapůjčený jeho prostřednictvím obdrží od půjčovny automobilů 500 Kč. Zároveň se však zavázal, že každý den investuje do údržby zapůjčených automobilů 800 Kč.Pravděpodobnost zapůjčení počtu automobilů x_i prostřednictvím autorizovaného servisu za 1 den je popsána pravděpodobnostní funkcí v následující tabulce:

x_i	0	1	2	3	4	5	6 a víc
$p(x_i)$	0,01	0,40	0,25	0,15	0,10	?	0,03

   (a) Údaj pro 5 automobilů byl špatně čitelný, dopočtěte ho.
   (b) S jakou pravděpodobností bude půjčeno 1 až 5 aut?
   (c) Určete pravděpodobnostní funkci pro zisk majitele servisu. (Nápověda: Jaký zisk bude mít majitel servisu pro postupně 0 až 6 zapůjčených automobilů?)

2. V masokombinátu jsou zásoby čerstvého masa skladovány v chladírnách maximálně 5 dnů. Doba skladování (tedy doba od uložení do expedice) je určena poptávkou a z minulosti je známo, že se jedná o náhodnou veličinu X s následujícím rozdělením pravděpodobnosti:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{6-x}{15} & \text{pro} \quad x = 1,2,3,4,5; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Určete pravděpodobnost, že doba skladování nepřesáhne 3 dny.

3. Která z uvedených funkcí je pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X, která nabývá hodnot 0, 2, 4, 6?

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \frac{c}{x+1}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-4}{2}$

4. Student musí v jednom předmětu úspěšně napsat 3 testy. Každý test napíše úspěšně s 70% pravděpodobností. Náhodná veličina X udává počet zvládnutých testů do prvního neúspěšného. Najděte pravděpodobnostní funkci $p(x)$ a nakreslete ji.

5. Házíme mincí pětkrát nezávisle na sobě. Náhodná veličina X je rovna počtu padlých rubů ve všech pěti kolech. Najděte pravděpodobnostní funkci $p(x)$ a nakreslete ji.

6. Pět kamarádů (2 chlapci a 3 dívky) jde do kina a stojí za sebou v řadě na lístky. Náhodná veličina X udává počet kamarádů stejného pohlaví, kteří stojí za sebou (směrem od pokladny na konec řady). Určete pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

7. Házíme (opakovaně) hrací kostkou s osmi stěnami (tedy má puntíky od jednoho po osm). Hody jsou na sobě nezávislé. Máme rádi číslo 3, takže nás zajímá, kdy se nám podaří toto číslo hodit. Náhodná veličina X udává počet neúspěšných hodů před prvním hodem 3.

   (a) Najděte pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

   (b) S jakou pravděpodobností nám 3 padne v lichém hodu?

8. Lucka stojí před košem s 10 obálkami. V 5 obálkách jsou vstupenky na koncert její oblíbené skupiny a v 5 dalších obálkách jsou jen prázdné papírky. Lucka z koše náhodně vylosuje 2 obálky a jejich obsah si ponechá. Náhodná veličina X udává počet vstupenek, které takto Lucka získá. Určete pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

9. Tři střelci nezávisle na sobě vystřelili na terč. Pravděpodobnost zásahu je u prvního střelce 0,9, u druhého 0,6 a u třetího 0,3. Náhodná veličina X udává, kolik střelců zasáhlo cíl.

   (a) Najděte pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

   (b) Vypočtěte pravděpodobnost, že v terči bude nanejvýš jeden zásah.

   (c) Vypočtěte pravděpodobnost, že v terči bude alespoň jeden zásah.

10. V dílně pracují dva stroje (nezávisle na sobě). První stroj se porouchá s pravděpodobností 20 %. Pravděpodobnost poruchy druhého stroje je 30 %. Náhodná veličina X označuje počet porouchaných strojů v dílně. Určete pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

11. Z osudí, ve kterém je 6 bílých a 4 černé kuličky, vylosujeme jednu kuličku, zaznamenáme její barvu a vrátíme ji zpět do osudí. Potom osudí zamícháme, znovu vylosujeme jednu kuličku, zaznamenáme její barvu a také ji vrátíme zpět do osudí. Nakonec osudí opět zamícháme a vylosujeme ještě jednu kuličku. Náhodná veličina X udává, v kolika z těchto tří tahů jsme vylosovali bílou kuličku. Vyjádřete pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

12. Střelec má 4 náboje a střílí na cíl až do prvního zásahu, nebo dokud nevystřílí všechny náboje. Pravděpodobnost, že zasáhne cíl při jednom výstřelu, je 0,4. Náhodná veličina X představuje počet vystřelených nábojů.

    (a) Napište pravděpodobnostní funkci $p(x)$.

    (b) Jaká je pravděpodobnost, že počet vystřelených nábojů bude větší než 2?

13. Dva studenti hrají karty. Pravděpodobnost, že vyhraje první student, je 0,75 a pravděpodobnost, že vyhraje druhý student, je 0,25. Hra se opakuje tak dlouho, dokud nevyhraje druhý student. Určete:

    (a) pravděpodobnostní funkci,

    (b) pravděpodobnost, že budou hrát nejvýše třikrát,

    (c) pravděpodobnost, že budou hrát právě dvakrát.

14. Pravděpodobnost, že student přijde včas na vyučování, je $\frac{1}{3}$. Tato pravděpodobnost je stejná každý den, není závislá na předchozích dnech. Náhodná veličina X udává počet dnů před prvním pozdním příchodem.

    (a) Určete pravděpodobnostní funkci.

    (b) Jaká je pravděpodobnost, že první tři dny v týdnu přijde student na vyučování včas?

15. Vytáčení telefonického připojení k internetu je maximálně 8krát opakováno (tj. po osmi neúspěšných vytáčeních se v pokusu o spojení nepokračuje). Jednotlivá vytáčení jsou navzájem nezávislá. Pravděpodobnost správného připojení při každém vytáčení je rovna 0,8. Veličina X udává počet vytáčení při daném pokusu o spojení. Určete:

    (a) pravděpodobnostní funkci,

    (b) pravděpodobnost pro $x = 8$.

16. Hráči A a B hrají následující hru: Losují za regulérních pravidel losy s čísly 1 až 20 (vytažení libovolného čísla je stejně pravděpodobné). Pokud je vytaženo některé z čísel 1 až 4, dává hráč A hráči B 40 Kč (zisk hráče A je záporný). Pokud je taženo některé z čísel 5 až 12, dává

hráč A hráči B 60 Kč (zisk hráče A je záporný). Pokud je taženo číslo 13 nebo 14, dává hráč B hráči A k Kč. Pokud je taženo číslo 15 až 20, dává hráč B hráči A 30 Kč. Náhodná veličina X značí zisk hráče B v jednom kole hry.

(a) Určete pravděpodobnostní funkci (hodnotu k určovat nemusíte).

(b) S jakou pravděpodobností bude hráč A platit hráči B?

17. Rodiče mají 9 dětí. Náhodná veličina X udává počet dívek. Jaká je pravděpodobnost, že mezi sourozenci jsou:

(a) právě 3 dívky,

(b) více než 2 dívky,

(c) Méně než 4 dívky.

(d) Určete pravděpodobnostní funkci.

18. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{pro} \quad x = 1, 2, 3 \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Vypočtěte $P(-1 < X < 2)$.

(b) Vypočtěte $P(X = 2)$.

(c) Vypočtěte $P(X < 5)$.

(d) Vypočtěte $P(X \leq 2 \vee X > 4)$.

(e) Vypočtěte $P(-1 \leq X < 3)$.

19. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x & \text{pro} \quad x = 1, 2, 3 \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Vypočtěte $P(2 < X < 4)$.

(b) Vypočtěte $P(X = 0)$.

(c) Vypočtěte $P(X > 3)$.

(d) Vypočtěte $P(X < 4)$.

(e) Vypočtěte $P(X < \frac{3}{2})$.

20. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 0.3^x & \text{pro} \quad x = 2, 4, 6 \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Vypočtěte $P(2 \leq X \leq 4)$.
   (b) Vypočtěte $P(X = 2 \cup X = 4)$.
   (c) Vypočtěte $P(X \leq 6)$.
   (d) Vypočtěte $P(\frac{3}{2} < X < \frac{13}{2})$.

21. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot (3 - x) & \text{pro} \quad x \in \{-2, 0, 2\}; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu k.
   (b) Vypočtěte $P(X = 0)$.
   (c) Vypočtěte $P(X < 1)$.
   (d) Vypočtěte $P(-2 < X \leq 1)$.

22. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} \frac{k}{x+2} & \text{pro} \quad x \in \{-5, -3, -1, 1\}; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu k.
   (b) Vypočtěte $P(X > -4)$.
   (c) Vypočtěte $P(X = 0)$.
   (d) Vypočtěte $P(-7 \leq X < 0)$.

23. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{pro} \quad x = 1, 2, 3 \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu k.
   (b) Vypočtěte $P(X < 5)$.

(c) Vypočtěte $P(1 \leq X \leq 3)$.

(d) Vypočtěte $P(X = 1 \vee X = 3)$.

24. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot \left(\frac{x}{12}\right) & \text{pro} \quad x = 1, 2, 3 \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu k.

(b) Vypočtěte $P(X = 6)$.

(c) Vypočtěte $P(X \leq 2,5)$.

(d) Vypočtěte $P(2 < X \leq 5)$.

Funkce hustoty

23. Nechť X je spojitá náhodná veličina definovaná hustotou pravděpodobnosti $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)(1+x) & \text{pro} \quad -1 < x < 1; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Nalezněte konstantu c tak, aby $f(x)$ byla korektně zadána.

(b) Zakreslete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$.

(c) Určete $P(X = 0,5)$.

24. Doba životnosti přístroje má rozdělení s hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + 1\right) & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq 2; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ověřte, zda je $f(x)$ opravdu hustotou pravděpodobnosti.

25. Která z uvedených funkcí je funkcí hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která nabývá hodnot 0, 2, 4, 6?

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-4}{2}$

(d) Žádná z uvedených možností.

26. Nechť X je spojitá náhodná veličina definovaná hustotou pravděpodobnosti $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)x^3 & \text{pro} \quad x \in \langle 0;1\rangle; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Nalezněte konstantu c tak, aby $f(x)$ byla korektně zadána.

(b) Zakreslete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$.

27. Je zadána funkce $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{pro} \quad x \in (1,a); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete hodnotu a tak, aby $f(x)$ byla funkce hustoty pravděpodobnosti.

28. Určete, která z uvedených funkcí může být funkcí hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ náhodné veličiny X:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in (2,4); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{pro} \quad x \in (-1,0); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in (0,2); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in (-1,0); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x \in (0,2); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

(f) Žádná z uvedených možností.

29. Určete, jaká je pravděpodobnost, že životnost žárovky bude 200 hodin.

30. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{pro} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{pro} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(a) Vypočtěte $P(X \leq -1)$.
(b) Vypočtěte $P\left(X \leq \frac{\pi}{4}\right)$.
(c) Vypočtěte $P\left(X \leq \frac{\pi}{3}\right)$.
(d) Vypočtěte $P(X \leq 2)$.

31. Náhodná veličina X má hustotu:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+3x^2}{2} & \text{pro} \quad x \in \langle 0;1\rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Vypočtěte $P\left(X \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right)$.
(b) Vypočtěte $P(X < 0,3)$.
(c) Vypočtěte $P\left(X > \frac{4}{5}\right)$.
(d) Vypočtěte $P(X < 2)$.
(e) Vypočtěte $P(X > 3)$.

32. Náhodná veličina X má hustotu:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro} \quad x \in (0,1\rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Vypočtěte $P\left(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2}\right)$.
(b) Vypočtěte $P\left(X < \frac{1}{4}\right)$.
(c) Vypočtěte $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$.

33. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{pro} \quad x \in (-1,0) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Vypočtěte $P(-2 \leq X \leq -0,5)$.
(b) Vypočtěte $P(-2 \leq X \leq -1)$.

34. Náhodná veličina X má rozdělení popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & \text{pro} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty pravděpodobnosti.

(b) Vypočtěte $P(0.2 < X < 0.8)$.

(c) Vypočtěte $P(X = 0.5)$.

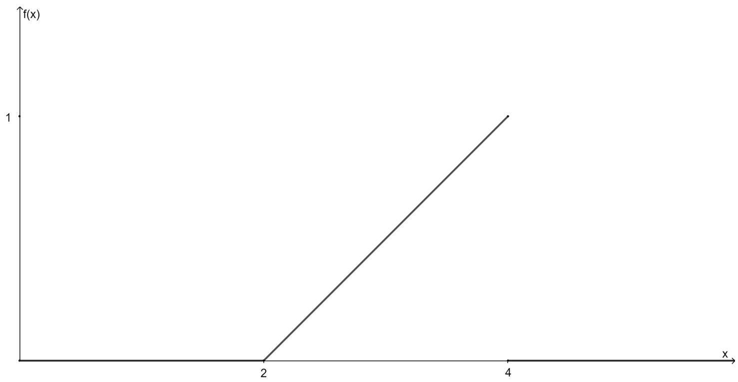
35. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 0 \\ cxe^{-x} & \text{pro} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Určete konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty pravděpodobnosti.

(b) Vypočtěte $P(0 \leq X < 2)$.

36. Je dána funkce $f(x)$ obrázkem:



Obrázek 1.5: Graf k příkladu číslo 36

Určete:

(a) funkční předpis $f(x)$,

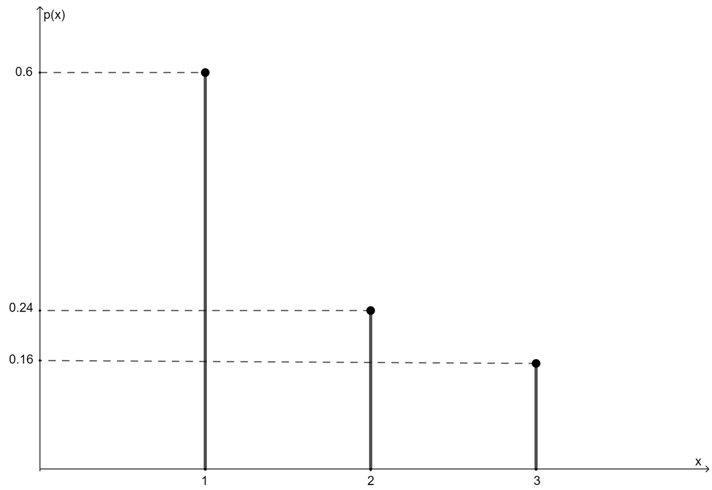
(b) $P(3 < X \leq 5)$,

(c) $P(X > 4)$,

(d) $P(X = 3)$.

37. Je dána funkce $p(x)$ obrázkem:

Určete:



Obrázek 1.6: Graf k příkladu číslo 37

(a) funkční předpis $p(x)$,

(b) $P(X = 2)$,

(c) $P(X > 1)$,

(d) $P(X \leq 2,5)$,

(e) $P(X \leq 4)$.

Více příkladů na hustotu pravděpodobnosti a na pravděpodobnostní funkci naleznete v další kapitole spolu s distribuční funkcí.

1.4 Distribuční funkce

1.4.1 Řešené příklady

Příklad 1:

Dvě děti si hází mincí o to, kdo půjde koupit zmrzlinu. Hází jedno z dětí a to celkem třikrát. Náhodná veličina X je rovna počtu padlých rubů na minci ve všech třech hodech.

a) Určete pravděpodobnostní i distribuční funkci a nakreslete jejich grafy.

b) Pomocí obou funkcí potom spočítejte pravděpodobnost toho, že hra skončí buď 2:1 nebo 1:2.

Řešení:

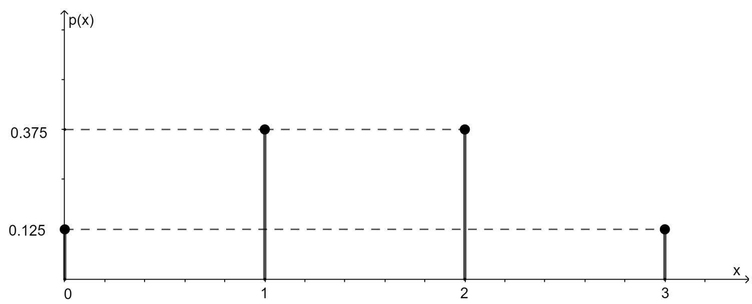
a) Ze zadání vidíme, že náhodná veličina X je diskrétní a nabývá hodnot $X \in 0, 1, 2, 3$. Nejdříve budeme počítat pravděpodobnostní funkci:

$$\begin{aligned}
p(0) &= P(X = 0) = 0,5^3 = 0,125 \\
p(1) &= P(X = 1) = 0,5^3 + 0,5^3 + 0,5^3 = 0,375 \\
p(2) &= P(X = 2) = 0,5^3 + 0,5^3 + 0,5^3 = 0,375 \\
p(3) &= P(X = 3) = 0,5^3 = 0,125
\end{aligned}$$

Pro ostatní X je $p(x) = 0$. Zjištění pravděpodobností jednotlivých počtů padlých rubů si vysvětlíme na $p(1)$. Chceme tedy, aby nám rub padl ze všech tří hodů jen jedenkrát. To se může stát v libovolném ze tří kol. Pokud rub padne v prvním kole, počítáme pravděpodobnost padnutí rubu a násobíme to pravděpodobností padnutí líce v druhém a ve třetím kole. Protože pravděpodobnost, že padne rub, je 0,5, tak nám vyjde $0,5^3$ pro padnutí rubu v prvním kole (první polovina je za rub, druhé dvě poloviny jsou pravděpodobnost padnutí líce). Pro padnutí rubu ve druhém nebo třetím kole platí stejná pravidla, takže $p(1)$ bude pak součet všech tří možností. Formální zápis pravděpodobnostní funkce vypadá pak následovně:

$$p(x) = \begin{cases} 0,125 & \text{pro} \quad x \in \{0, 3\}\,; \\ 0,375 & \text{pro} \quad x \in \{1, 2\}\,; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Graficky můžeme vidět pravděpodobnostní funkci na následujícím obrázku:



Obrázek 1.7: Graf pravděpodobnostní funkce

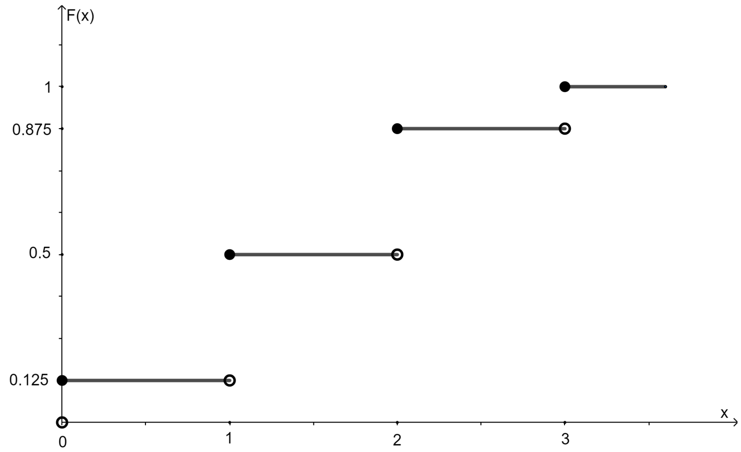
Dále spočítáme distribuční funkci $F(x)$. Pro distribuční funkci platí v diskrétním případě následující vztah:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} p(t)$$

Abychom tedy z pravděpodobnostní funkce získali funkci distribuční, budeme jednotlivé pravděpodobnosti sčítat:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 0; \\ 0,125 & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1); \\ 0,5 & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2); \\ 0,875 & \text{pro} \quad x \in \langle 2, 3); \\ 1 & \text{pro} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Distribuční funkci si můžeme prohlédnout i graficky:



b) Nejdříve výsledek hry 1:2 nebo 2:1 (padnou buď dva ruby a jeden líc, nebo padne jeden rub a dva líce) spočítáme pomocí pravděpodobnostní funkce pouhým součtem požadovaných případů:

$$p(1) + p(2) = 0,375 + 0,375 = 0,75$$

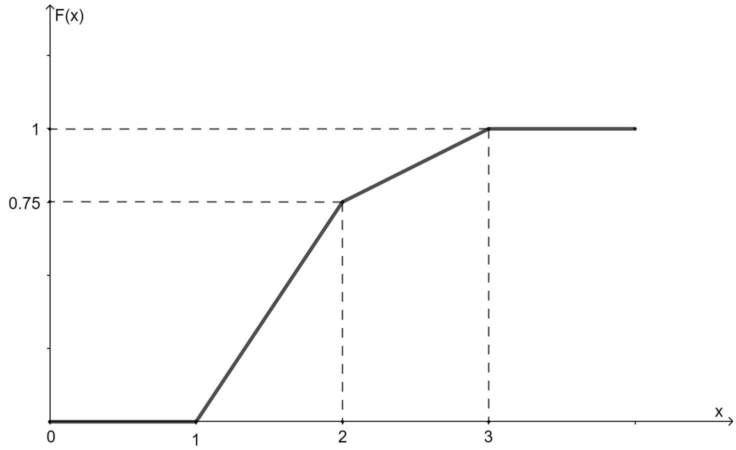
Následně zjistíme to samé pomocí distribuční funkce (pomocí jedné z vlastností distribuční funkce):

$$P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = 0,875 - 0,125 = 0,75$$

□

Příklad 2:

Nechť máme následující graf:



Obrázek 1.8: Graf k příkladu 2

Určete:

a) předpis této distribuční funkce náhodné veličiny X,

b) předpis hustoty náhodné veličiny X a nakreslete její graf,

c) $F(2{,}5)$,

d) $F(0{,}5)$.

e) $P(1{,}5 < X < 2{,}5)$

Řešení:

a) Jedná se o funkci spojitou, tedy náhodná veličina X, jejíž distribuční funkci vidíme, je také spojitá. Předpis funkce vyčteme z grafu. Musíme u toho myslet na to, kde bude uzavřený a kde otevřený interval. Z vlastností distribuční funkce víme, že je zprava spojitá, tedy uzavřený interval bude ten levý a otevřený ten pravý. Ještě si musíme zjistit rovnice úseček, které nejsou rovnoběžné s osou x. Nejdříve se podíváme na úsečku vedoucí z bodu $[1; 0]$ do bodu $[2; 0{,}75]$. Do směrnicového vyjádření přímky oba body postupně dosadíme, čímž získáme dvě rovnice o dvou neznámých, které vyřešíme. Směrnicový tvar rovnice přímky vypadá takto:

$$y = kx + q$$

Dosazením za x a y prvního bodu získáme:

$$0 = k + q$$

Dosazením za x a y druhého bodu pak získáme:

$$0,75 = 2k + q$$

Následně od sebe obě rovnice odečteme (první od druhé), čímž se zbavíme q a vyjde nám k:

$$0,75 = k$$

Dopočítáme q dosazením $k = 0,75$ do první rovnice:

$$0 = 0,75 + q \rightarrow q = -0,75$$

Rovnice přímky (nás zajímá jen úsečka mezi dříve zmíněnými dvěma body) má tedy následující tvar:

$$y = 0,75x - 0,75$$

Analogicky spočítáme i rovnici pro druhou přímku, kde nás zajímá úsečka mezi body $[2; 0,75]$ a $[3; 1]$. Opět získáme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 0,75 &= 2k + q \\ 1 &= 3k + q \end{aligned}$$

Soustavu rovnic vyřešíme a vyjdou nám následující hodnoty pro k a q:

$$k = q = 0,25$$

Rovnice druhé přímky tedy vypadá následovně:

$$y = 0,25x + 0,25$$

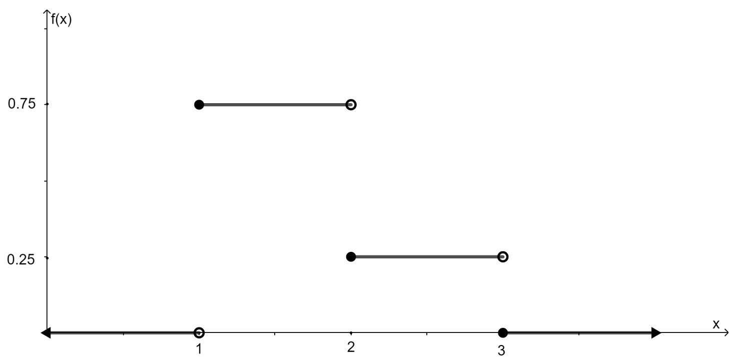
Nyní můžeme formálně zapsat tvar distribuční funkce náhodné veličiny X:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 1; \\ 0,75x - 0,75 & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2); \\ 0,25x + 0,25 & \text{pro} \quad x \in \langle 2, 3); \\ 1 & \text{pro} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

b) Abychom z distribuční funkce získali funkci hustoty, musíme distribuční funkci derivovat podle proměnné x na každém intervalu (konstanty 0 a 1 spojíme do jednoho bodu, obě se derivují na 0):

$$f(x) = \begin{cases} 0,75 & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2); \\ 0,25 & \text{pro} \quad x \in \langle 2, 3); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Následně podle předpisu funkce hustoty vytvoříme graf:



c) Abychom spočítali hodnotu distribuční funkce $F(2,5)$, dosadíme hodnotu do distribuční funkce (2,5 leží v intervalu $\langle 2, 3)$):

$$F(2,5) = 0,25 \cdot 2,5 + 0,25 = 0,875.$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina X je menší nebo rovna 2,5 je tedy $87,5\%$.

d) Analogicky jako v předchozím případě (nyní nás zajímá interval $x < 1$):

$$F(0,5) = 0.$$

e) Z jedné z vlastností distribuční funkce víme, že hledanou pravděpodobnost zjistíme následovně (Distribuční funkce je spojitá, tedy uzavřenost či otevřenost intervalu nehraje roli. Pravděpodobnost nastání konkrétní hodnoty je totiž nulová.):

$$P(1,5 < X < 2,5) = P(X < 2,5) - P(X \leq 1,5) = P(X \leq 2,5) - P(X = 2,5) - P(X \leq 1,5) =$$
$$= F(2,5) - 0 - F(1,5).$$

Z bodu **a)** víme, jaký je funkční předpis distribuční funkce v jednotlivých intervalech, můžeme tedy hodnoty distribuční funkce spočítat:

$$F(2,5) - F(1,5) = 0,25 \cdot 2,5 + 0,25 - (0,75 \cdot 1,5 - 0,75) = 0,875 - 0,375 = 0,5$$

□

1.4.2 Neřešené příklady

1. Pro náhodnou veličinu X značme $p(k) = P(X = k)$, je $p(1) = \frac{1}{3}$, $p(2) = \frac{1}{4}$, $p(3) = \frac{1}{6}$ a $p(4) = \frac{1}{4}$, v ostatních případech je pravděpodobností funkce nulová. Nakreslete graf pravděpodobnostní i distribuční funkce.

2. Rodina má 4 děti. Náhodná veličina X je rovna počtu chlapců v rodině (rodiče nepočítáme). Určete:

   (a) pravděpodobnostní funkci $p(x)$,

   (b) distribuční funkci $F(x)$,

   (c) pravděpodobnost, že 2 ze 4 dětí jsou chlapci,

   (d) pravděpodobnost, že alespoň 3 ze 4 dětí jsou chlapci.

3. V urně je 6 bílých a 4 černé koule. Z urny se postupně vybere 5 koulí, přičemž po každém tahu se koule vrátí zpět. Určete:

   (a) rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která značí počet vytáhnutých bílých koulí,

   (b) distribuční funkci a její graf,

   (c) $P(X < 3)$,

   (d) $P(X \leq 3)$,

   (e) $P(1 < X < 4)$

4. Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ diskrétní náhodné veličiny X je sudá funkce (osově souměrná podle osy y), pro kterou platí, že $p(x) > 0$ jen pro $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Určete:

(a) $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + \ldots = ?$,

(b) hodnotu distribuční funkce $F(x)$ pro $x = 3$.

5. Distribuční funkce Rayleighova rozdělení spojité náhodné veličiny má tvar:

$$F(x) = c - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \; x > 0$$

v ostatních případech je $F(x) = 0$. Určete:

(a) konstantu c,

(b) hustotu pravděpodobnosti $f(x)$,

(c) P(1 < X < 10) pro $\sigma = 1$.

6. Nechť máme funkci $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 2a - \frac{3b}{e^x} & \text{pro} \quad x > 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete reálné konstanty a, b tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí náhodné veličiny X.

(b) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

(c) Určete pravděpodobnost $P(1 < X < 4)$ pomocí hustoty pravděpodobnosti.

(d) Určete pravděpodobnost $P(1 < X < 4)$ pomocí distribuční funkce.

7. Životnost zařízení v tisících hodinách je spojitá náhodná veličina X s hustotou:

$$f(x) = \begin{cases} 10e^{-10x} & \text{pro} \quad x > 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci $F(x)$.

8. Napište a zakreslete distribuční funkci rozdělení daného hustotou $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro} \quad x \in (0,1); \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x \in \langle 1,2 \rangle; \\ \frac{3-x}{2} & \text{pro} \quad x \in (2,3); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

9. Je dána náhodná veličina X s distribuční funkcí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < -8; \\ -16x^3 - 372x^2 - 2880x - 7424 & \text{pro} \quad x \in \langle -8; -7{,}5 \rangle; \\ 1 & \text{pro} \quad x > -7{,}5 \end{cases}$$

Spočtěte:

(a) $P(X = -7{,}7)$,

(b) $P(X > -7{,}6)$,

(c) $P(-7{,}9 \leq X < -7{,}75)$.

(d) Určete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$.

10. Házíme třikrát kostkou. Náhodná veličina X značí počet padnutí šestky. Určete distribuční funkci $F(x)$ a nakreslete její graf.

11. Náhodná veličina X je určena distribuční funkcí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 0; \\ 2x - 4 & \text{pro} \quad x \in \langle 0; 2{,}5 \rangle; \\ 1 & \text{pro} \quad x > 2{,}5 \end{cases}$$

Určete:

(a) pravděpodobnost toho, že X je menší než $\frac{7}{3}$,

(b) hustotu pravděpodobnosti $f(x)$.

12. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci $F(x)$.

13. Náhodná proměnná X má distribuční funkci::

$$F(x) = \begin{cases} a + \frac{b}{1+x^2} & \text{pro} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Určete:

(a) konstanty a, b;
(b) hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné.

14. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci::

$$F(x) = \left\{ a + b \arctan \frac{x}{2} \quad \text{pro} \quad -\infty < x < \infty \right.$$

Určete:

(a) konstanty a, b;
(b) hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny;
(c) x_1 tak, aby $P(X > x_1) = \frac{1}{4}$.

15. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot \cos(2x) & \text{pro} \quad x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete:

(a) konstantu k tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty,
(b) distribuční funkci $F(x)$,
(c) $P\left(-3 < X < \frac{\pi}{12}\right)$.

16. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (3x - x^2) & \text{pro} \quad x \in (0, 3); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete:

(a) konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty,
(b) distribuční funkci $F(x)$,
(c) $P(1 < X \leq 2)$.

17. Je dána funkce:

$$F(x) = \begin{cases} a + b \cdot e^{-x} & \text{pro} \quad x \in (0, \infty); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete:

(a) konstantu a a b tak, aby funkce $F(x)$ byla distribuční funkci náhodné veličiny,

(b) hustotu pravděpodobnosti $f(x)$,

(c) $P(1 \leq X < 4)$,

(d) $P(X \geq 2)$,

(e) $P(0 < X < 3)$.

18. Je dána funkce:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 3 \\ ax - 1 & \text{pro} \quad 3 < x \leq 6 \\ 1 & \text{pro} \quad x > 6 \end{cases}$$

Určete:

(a) konstantu a tak, aby funkce $F(x)$ byla distribuční funkci náhodné veličiny,

(b) graf $F(x)$,

(c) hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ a její graf,

(d) $P(4 \leq X \leq 5)$,

(e) $P\left(-\frac{1}{2} < x < 5\right)$,

(f) c_1 a c_2 takové, že $P(X \leq c_1) = 0,05$ a $P(X \leq c_2) = 0,9$.

19. Je dána funkce $f(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).

Určete:

(a) funkční předpis $f(x)$,

(b) příslušnou distribuční funkci $F(x)$ a její graf,

(c) $P(2 < X < 4)$,

(d) $P(X < 2,5)$,

(e) $P(X > 3,5)$.

20. Je dána funkce $f(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).

Určete:

(a) funkční předpis $f(x)$,

(b) pro jakou hodnotu $a \in R$ je $f(x)$ hustotou pravděpodobnosti náhodné proměnné

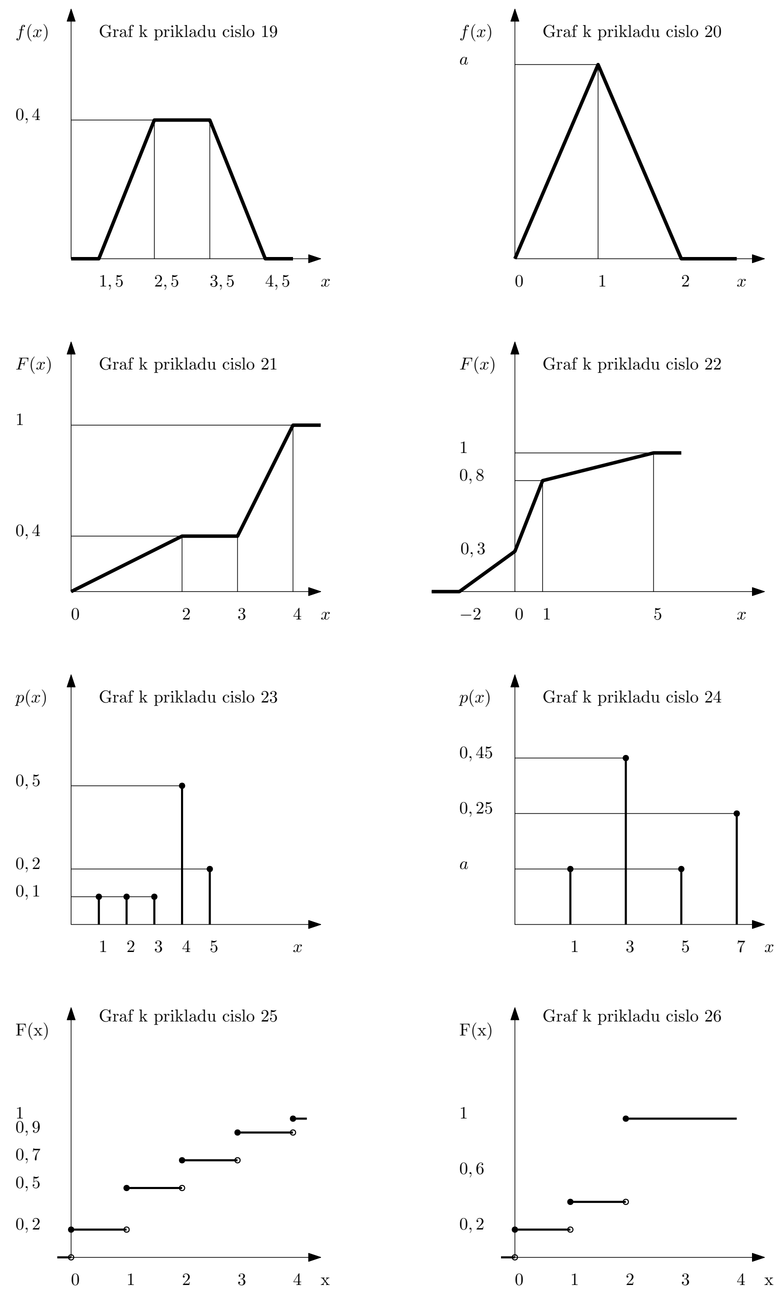
(c) příslušnou distribuční funkci $F(x)$ a její graf,
(d) $P(X > \frac{1}{2})$,
(e) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$,
(f) $P(X > 3)$.

21. Je dána funkce $F(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).
Určete:
    (a) funkční předpis $F(x)$,
    (b) příslušnou hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ a její graf,
    (c) $P(X > 2)$,
    (d) $P(1 < X < 3{,}5)$,
    (e) $P(X < 4)$.

22. Je dána funkce $F(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).
Určete:
    (a) funkční předpis $F(x)$,
    (b) příslušnou hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ a její graf,
    (c) $P(X > -1)$,
    (d) $P(1 < X < 4)$,
    (e) $P(0 < X < 2)$,
    (f) $P(X = 0)$.

23. Je dána funkce $p(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).
Určete:
    (a) funkční předpis $p(x)$,
    (b) příslušnou distribuční funkci $F(x)$ a její graf,
    (c) $P(X = 2) + P(X = 4)$,
    (d) $P(X \geq 4)$,
    (e) $P(\frac{5}{2} \leq X \leq \frac{9}{2})$,
    (f) $P(X \leq 3)$.

24. Je dána funkce $p(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).
Určete:
   (a) konstantu a
   (b) funkční předpis $p(x)$,
   (c) příslušnou distribuční funkci $F(x)$ a její graf,
   (d) $P(X > 7)$,
   (e) $P(X > \frac{11}{2})$
   (f) $P(X \in < 1; 5 >)$,
   (g) $P(X \leq 3)$.
25. Je dána funkce $F(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).
Určete:
   (a) funkční předpis $F(x)$,
   (b) příslušnou pravdepodobnostní funkci $F(x)$ a její graf,
   (c) $P(X \geq 1)$,
   (d) $P(X < 3)$,
   (e) $P(X = 5)$
   (f) $P(X \in (1; 4))$.
26. Je dána funkce $F(x)$ obrázkem (obrázek na konci kapitoly).
Určete:
   (a) funkční předpis $F(x)$,
   (b) příslušnou pravděpodobnostní funkci $F(x)$ a její graf,
   (c) $P(X > 1)$,
   (d) $P(X \leq 2)$,
   (e) $P(X = 4)$,
   (f) $P(X \in < 0; 2 >)$,
   (g) $P(X < 2)$.



Obrázek 1.9: Grafy k neřešeným příkladům

1.5 Popisná statistika

1.5.1 Řešené příklady

1. Dodavatel elektrické energie rozlišuje zákazníky podle množství odebrané energie (znak X) na malé, střední a velké odběratele a podle místa odběru (znak Y) na odběratele z čech a moravy. Pro přehled o svých zaměstnancích si zhotovil následující tabulku sloupcově podmíněných relativních četností:

$p_{j(k)}$	čechy	morava
malý	4/7	1/2
střední	2/7	c
velcí	1/7	1/6

   (a) Určete procentuální zastoupení odběratelů, kteří jsou střední a zároveň žijí na moravě.

   (b) Vytvořte kontingenční tabulku absolutních četností, víte-li, že z 200 000 odběratelů je 20 000 odběratelů z čech a zároveň patří mezi velké odběratele.

   (c) Vytvořte variační řadu pro znak X a zakreslete graf empirické distribuční funkce.

   (d) Pro znak X vypočtěte 55 a 60 kvantil.

Řešení:

a) Protože se jedná o sloupcově podmíněné četnosti, musí být součet v každém sloupci roven jedné, to v prvním sloupci platí, ze druhého dopočítáme konstantu c

$$1 = 1/2 + c + 1/6$$

$$c = 1/3.$$

Procentuální zastoupení odběratelů, kteří jsou střední a zároveň žijí na moravě je jedna třetina.

b) Víme, že 1/7 ze všech odběratelů jsou velcí odběratele a zároveň žijí v čechách a je jich 20 000, odsud snadno dopočítáme četnost středních odběratelů zároveň žijících v čechách (těch jsou 2/7), tedy je jich 40 000 a malých odběratelů a zároveň čechů je 80 000. Celkem tedy v čechách žije 20 000 + 40 000 + 80 000 = 140 000 odběratelů.

n_{jk}	čechy	morava	
malý	?	?	
střední	?	?	
velcí	20 000	?	
			200 000

Nyní již snadno dopočítáme, že na moravě žije 200 000 - 140 000 = 60 000 odběratelů, z toho 1/2 (tj. 30 000) jsou malí, dále 1/3 (tj. 20 000) jsou střední a zbylých 10 000 jsou velcí odběratele. Pro úplnost sečteme ještě počty malých, středních a velkých odběratelů (sčítáme vždy počet v čechách a na moravě).

n_{jk}	čechy	morava	$n_{.k}$
malý	80 000	30 000	110 000
střední	40 000	20 000	60 000
velcí	20 000	10 000	30 000
$n_{j.}$	140 000	60 000	200 000

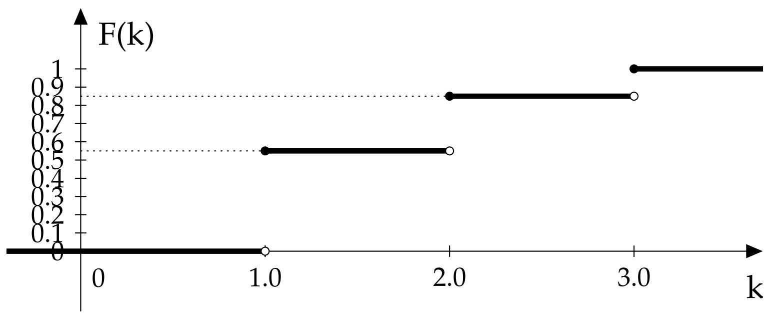
c) Pro tvorbu variační řady využijeme absolutních četností znaku X (tj. marginálních četností $n_{.k}$ vypočtených v bodu (b)). Zapíšeme si, co už známe, tj. varianty znaku X označujeme je $x_{[k]}$, absolutní četnosti znaku X označujeme n_k a celkový počet $n = 200000$.

k	$x_{[k]}$	n_k
1	malý	110 000
2	střední	60 000
3	velcí	30 000
		200 000

Nyní potřebujeme dopočítat relativní četnosti $p_k = \frac{x_{[k]}}{n}$ např. pro $k = 1$ je $p_1 = \frac{110000}{200000} = 0,55$ obdobně dopočítáme zbývající relativní četnosti $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,15$, z toho můžeme například konstatovat, že ze všech odběratelů tvoří střední odběratelé 30%.
Dále dopočítáme absolutní kumulativní četnosti $N_k = \sum_1^k n_k$, tedy sčítáme všechny absolutní četnosti do n_k včetně. $N_1 = 110000$, $N_2 = 11000 + 60000 = 170000$, $N_3 = 11000 + 60000 + 30000 = 200000$, můžeme tedy říci, že středních nebo menších odběratelů je 170 000.
Zbývá dopočítat relativní kumulativní četnosti, zde máme dvě možnosti buď využijeme vztah $F_k = \frac{N_k}{n}$, např. pro $k = 2$ dostaneme $F_2 = \frac{170000}{200000} = 0,85$ nebo vztah $F_k = \sum_{i=1}^k p_k$ tedy $F_2 = 0,55 + 0,3 = 0,85$, tedy můžeme říci, že dodavatelovi odběratele jsou v 85%

střední nebo menší. Takto dostaneme výslednou variační řadu. Na základě relativních kumulativních četností zakreslíme distribuční funkci.

k	$x_{[k]}$	n_k	p_k	N_k	F_k
1	malý	110 000	0,55	110 000	0,55
2	střední	60 000	0,3	170 000	0,85
3	velcí	30 000	0,15	200 000	1
		200 000	1		



d) Pro výpočet kvantilu musíme nejprve spočítat $c_\alpha = n \cdot \alpha$, kde alfa značí kolika procentní kvantil hledáme. V našem případě:

$$c_{0,55} = 200000 \cdot 0,55 = 110000$$

$$c_{0,6} = 200000 \cdot 0,6 = 120000$$

obě čísla vyšla celá, proto budeme počítat oba kvantily jako průměr dvou po sobě jdoucích variant (pokud by vyšlo c_α necelé tak bychom toto číslo pouze zaokrouhlili a hledaným kvantilem by bylo číslo, které bylo v uspořádaném souboru v pořadí tolikáté, jako vyšlo po zaokrouhleni c_α). Nejprve spočítáme $K_{0,55}(X)$, musíme tedy zjistit jaké číslo je v pořadí 110 000 a 110 001 v uspořádaném souboru. V našem souboru je nejprve 110 000 malých odběratelů (značených 1) a potom 60 000 středních odběratelů (značených 2), tedy $x_{(110000)} = 1$ a $x_{(110001)} = 2$.

$$K_{0,55}(X) = \frac{x_{(110000)} + x_{(110001)}}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

$$K_{0,6}(X) = \frac{x_{(120000)} + x_{(120001)}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

2. Výrobce, který vyrábí n typů praček, se rozhodl všechny vyráběné pračky o deset procent zdražit, pak ale zjistil, že cenu zvýšil příliš a tak všechny pračky zlevnil o 500 Kč. Pokud byla původně průměrná cena pračky 10 000 Kč a výběrový rozptyl 1 000 000 Kč, určete jaká je současná průměrná cena pračky a jaký je současný výběrový rozptyl.

   Řešení: Označme: X_i ... původní cena pračky Y_i ... nová cena pračky Nyní můžeme pomocí rovnice zapsat, jak výrobce postupoval, aby došel k nové ceně pračky. Nejprve pračku o deset procent zdražil, tím se dostal na 110 procent původní ceny tedy $1,1X_i$, pak pračku o 500 Kč zlevnil, tedy nová cena $Y_i = 1,1X_i - 500$. Podívejme se, jak se tímto změnila průměrná cena pračky. Původní průměrná cena pračky byla:

$$M_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

   nová průměrná cena pračky je:

$$M_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1,1X_i - 500) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1,1X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 500 =$$

$$= 1,1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\cdot n\cdot 500 = 1,1M_X - 500.$$

   Tedy nová průměrná cena je o deset procent vyšší a o 500 Kč nižší. Tedy nová průměrná cena je $1,1\cdot 10000 - 500 = 10500$ Kč.
   Dále se podíváme, jak se změnil rozptyl. Původní rozptyl byl:

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_X)^2,$$

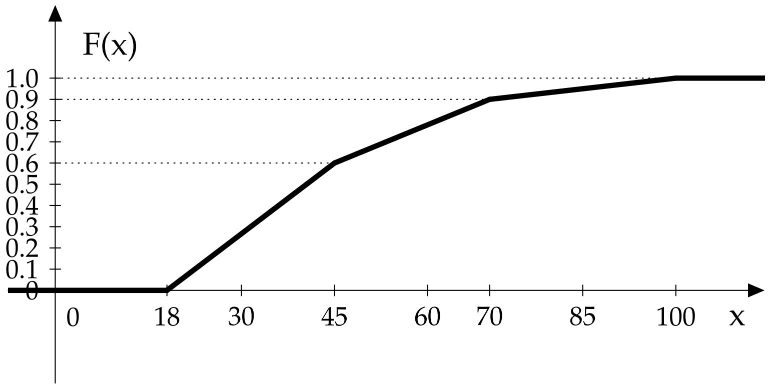
   nový rozptyl:

$$S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - M_Y)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1,1Y_i - 500 - (1,1M_Y - 500))^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1,1Y_i - 1,1M_Y)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1,1(Y_i - M_Y))^2 = 1,21\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_X)^2 = 1,21S_X^2,$$

   tedy nový rozptyl je o 21% vyšší než původní a zdražení o 500 Kč na něj nemělo vliv. Nový rozptyl je $1,21\cdot 1000000 = 1210000$ Kč.

3. Lékař si údaje o věku svých pacientech zanesl do grafu distribuční funkce:



určete $u_j, x_{[j]}, d_j, p_j$ z tabulky rozložení četností a vážený průměr věku.

Řešení:
Z grafu rovnou odečteme meze intervalů u_j, jedná se o x-ové souřadnice bodů ve kterých se „láme" distribuční funkce a hodnoty distribuční funkce, šířky intervalů snadno spočítáme, jako rozdíl mezí intervalů $d_j = u_{j+1} - u_j$ a střed intervalu spočteme jako $x_{[j]} = \frac{u_{j+1}+u_j}{2}$ např. $x_{[1]} = \frac{45+18}{2} = 31,5$. Takto získáme tabulku:

$\langle u_j, u_{j+1}\rangle$	$x_{[j]}$	d_j	F_j
$\langle 18, 45\rangle$	31,5	27	0,6
$\langle 45, 70\rangle$	57,5	25	0,9
$\langle 70, 100\rangle$	85	30	1

Poslední co zbývá dopočítat, jsou relativní četnosti, protože známe vztah $F_j = \sum\limits_{i=1}^{j} p_j$ můžeme snadno dopočítat $F_1 = p_1 = 0,6$, dále $F_2 = p_1 + p_2$ tedy $p_2 = F_2 - p_1 = 0,9 - 0,6 = 0,3$ a na závěr $p_3 = F_3 - p_1 - p_2 = 1 - 0,6 - 0,3 = 0,1$ (nebo můžeme využít vztah $p_j = F_j - F_{j-1}$). Takto dostaneme:

$\langle u_j, u_{j+1}\rangle$	$x_{[j]}$	d_j	F_j	p_j
$\langle 18, 45\rangle$	31,5	27	0,6	0,6
$\langle 45, 70\rangle$	57,5	25	0,9	0,3
$\langle 70, 100\rangle$	85	30	1	0,1

Na závěr vypočítáme vážený průměr věku, protože nemáme přesné hodnoty věků pacientů použijeme místo nich středy intervalů.

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} n_j x_{[j]} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n_j}{n} x_{[j]} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_{[j]} = 31,5 \cdot 0,6 + 57,5 \cdot 0,3 + 85 \cdot 0,1 = 44,65$$

1.5.2 Neřešené příklady

1. V rámci zkvalitnění chodu firmy a propojení jednotlivých oddělení bylo v nadnárodní společnosti vybráno 30 zaměstnanců z odvětví výroby a bylo u nich zjišťováno pohlaví (značeno 0-muž a 1-žena) a „vztah“ k top managementu (značeno 0-s vedení jsme se nikdy nesetkal/a; 1-občas svoji práci konzultuji s někým z vedení; 2-s vedením se vídám velmi často). Dotazovaní odpověděli následujícím způsobem převedeným do datové matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

   (a) Sestavte variační řadu pro oba znaky.
   (b) Sestrojte graf četnostní funkce a graf empirické distribuční funkce pro znak Y.
   (c) Pro vektorový znak (X,Y) sestavte kontingenční tabulky absolutních a absolutních kumulativních četností a sloupcově i řádkově podmíněných četností.

2. V předmětu Statistika bylo náhodně vybráno 30 studentů z různých oborů (znak Y) u kterých byla zjišťována jejich úspěšnost v tomto předmětu (znak X). Výsledky průzkumu jsou zaznamenány v následující matici:

$$\begin{pmatrix} D & E & C & D & B & F & C & E & D & A & D & D & C & E & F & B & D & E & C & E & D & F & E & B & E & C & E & D & E & C \\ E & E & F & E & F & P & E & F & E & E & P & E & F & E & F & P & E & F & E & F & E & F & E & F & P & E & F & E & P & E \end{pmatrix}^T$$

   (a) Pro znak X vhodně roztřiďte a označte údaje uvedené v matici, sestavte z nich tabulku četností (variační řadu) a sestrojte graf četností funkce.
   (b) Pro vektorový znak (X, Y) sestavte kontingenční tabulky absolutních, absolutních kumulativních četností a sloupcově/ řádově podmíněných četností.

3. Soutěže bojových umění se zúčastnilo 10 dětí. Soutěžilo se ve dvou kategoriích: Kata a kumite. Za každou kategorii mohli získat maximálně pět bodů. Body byly udělovány celočíselně. Výsledky jsou zaznamenány v následující tabulce.

kata	2	5	1	5	3	4	2	3	2	4
kumite	4	1	2	3	2	4	5	5	2	2
pohlaví	Ž	M	M	M	Ž	Ž	M	Ž	M	M

(a) Sestavte tabulku rozložení četnosti pro kategorii kata a četnostní funkci pro kategorii kata.

(b) Sestavte tabulku rozložení četnosti pro kategorii kumite.

4. Celkem 31 žáků 9.B odpovídalo na tři otázky:

   - Jaké je vaše pohlaví pohlaví?
   - Jakou známku jste minulý rok dostali z matematiky? (Y)
   - Jakou známku jste dostali z českého jazyka? (Z)

   Z odpovědí byl získán následující datový soubor.

X	Ž	Ž	M	Ž	M	M	Ž	Ž	Ž	M	M	Ž	M	M	M	M
Y	3	2	5	1	4	1	1	3	2	4	1	2	2	1	3	2
Z	2	1	5	3	2	1	4	1	3	3	1	2	2	2	3	3

X	M	Ž	Ž	M	Ž	Ž	M	M	Ž	Ž	Ž	M	Ž	M	M
Y	3	4	4	1	1	1	2	1	3	3	4	3	4	2	2
Z	1	3	2	4	2	3	4	2	5	2	3	4	1	2	3

   (a) Utvořte jednorozměrný datový soubor pro znak Y a vektory variant pro znaky X a Z.

   (b) Určete z_3, $z_{(5)}$ a $z_{[2]}$

   (c) Pro znak Y sestavte tabulku rozložení četností.

   (d) Sestrojte graf četnostní funkce a graf empirické distribuční funkce pro znak Z.

   (e) Pro znak Y a Z sestrojte kontingenční tabulku absolutních četností a kontingenční tabulku absolutních kumulovaných četností.

5. U 30 domácností byl zjišťován počet členů. Výsledky zobrazuje tabulka:

Počet členů	1	2	3	4	5	6
Počet domácností	2	6	4	10	5	3

   (a) Pro znak X sestavte tabulku rozložení četností.

   (b) Nakreslete grafy četnostní funkce a empirické distribuční funkce.

   (c) Nakreslete sloupkový diagram a polygon četností počtu členů domácností.

6. Je dán datový soubor $X = (x_1, ..., x_n)'$. Jeho aritmetický průměr je m_x a rozptyl je s_x^2. Uvažujme datový soubor Y, kde $y_i = 1 - x_i, i = 1, ..., n$. Co víme o jeho průměru m_y a rozptylu s_y^2? Odvoďte jejich vyjádření pomocí m_x a s_x^2. Dále vyjádřete kovarianci s_{xy} mezi X a Y a určete koeficient korelace r_{xy}.

7. Obchodní firma před koncem roku evidovala průměrné měsíční tržby za období leden-listopad ve výši 1 226 000 Kč. Směrodatná odchylka tržeb za toto období činila 35 000 Kč. Prosincové tržby dosáhly 2 056 000 Kč. Vypočtěte hodnotu průměrných tržeb a jejich směrodatnou odchylku za všech 12 měsíců.

8. Při investičním rozhodování se míra rizika držení cenných papírů (CP) může zakódovat následujím způsobem: 1 - riziko minimální, 2 - malé, 3 - střední, 4 - zvýšené, 5 - vysoké, 6 - extrémní. V portfoliu je stejnoměrně zastoupeno 10 CP, z toho tři s mírou rizika 2, jeden s mírou rizika 3, dva s mírou rizika 4, tři s mírou rizika 5 a jeden s mírou rizika 6.

   (a) Stanovte variační řadu.

   (b) Určete modus, medián a mezikvartilovou odchylku hodnocení rizika CP v portfoliu.

   (c) Jak se změní medián, pokud CP s hodnocením 6 nahradíme jiným CP s hodnocením 5?

9. V tabulce je uveden přehled poskytnutých hypotečních úvěrů jednou pobočkou banky:

Výše úvěru (v tis. Kč)	500	750	800	1000	1200	1500	2000	2100	2500	3000
Počet poskytnutých úvěrů	5	14	16	20	25	11	4	2	2	1

   (a) Nakreslete graf četnostní funkce.

   (b) Zjistěte průměr, medián a modus výše úvěru.

   (c) Vypočtěte rozptyl, směrodatnou odchylku a koeficient variace výše úvěru.

10. V tabulce máme k dispozici údaje o počtu dětí 30 domácností:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	1	0	0	2	2	2	4	0	0	2	2	2	3	2	1
j	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	2	0	0	2	2	3	4	2	1	2	2	3	2	1	0

Na základě údajů v tabulce sestavte rozdělení absolutních, relativních a kumulativních četností. Určete modus. Stanovené četnosti interpretujte a znázorněte graficky.

11. Ze 40ti hodnot x_i ($i = 1, ..., 40$) byl vypočítán aritmetický průměr 7,5 a rozptyl 2,25. Při kontrole bylo zjištěno, že chybí 2 jednotky s hodnotami 3,8 a 7. Opravte uvedené číselné charakteristiky.

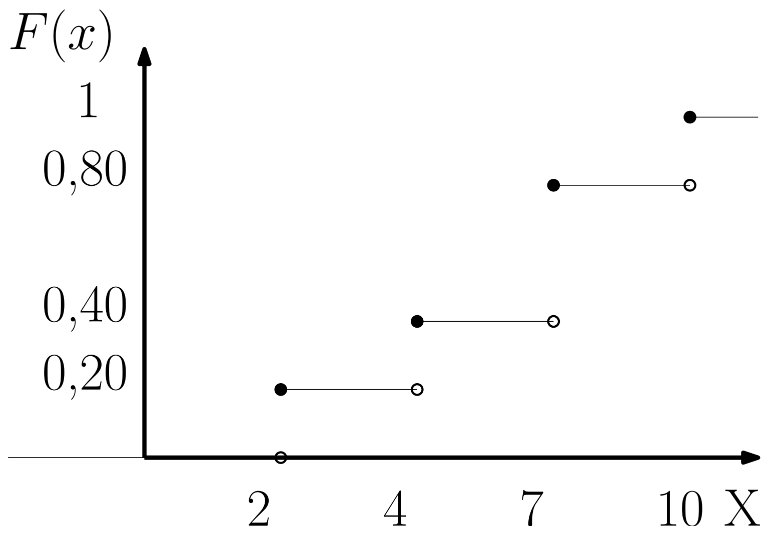
12. Uvažujte soubor důchodců, jejichž průměrný měsíční důchod je 4 800 Kč a směrodatná odchylka měsíčních důchodů je 500 Kč. Při které úpravě důchodu se nezmění směrodatná odchylka?

    (a) každý důchodce dostane přidáno 150 Kč,

    (b) důchod každého důchodce se zvýší o 5 %?

13. Průměrná výše vkladů v jedné bance se v letech 1995-1998 zvýšila o 40 %, variabilita vkladů měřená rozptylem vzrostla o 96 %. Jak se změnil variační koeficient vkladů v uvedeném období?

14. Máme zadán graf empirické distribuční funkce $F(x)$:



    (a) Formálně zapište empirickou distribuční funkci $F(x)$.

    (b) Nakreslete graf empirické četnostní funkce znaku X. Empirickou četnostní funkci znaku X formálně zapište.

    (c) Spočtěte průměr, rozptyl a směrodatnou odchylku znaku X.

    (d) Jestliže všechny hodnoty datového souboru zvětšíme o 100 %, odvoďte, jak se změní průměr a rozptyl.

    (e) Určete medián, modus, dolní kvartil znaku X, horní kvartil znaku X, kvartilovou odchylku a dolní decil.

(f) Pokud jsme tuto četnostní funkci získali ze 180 pozorování, kolikrát se realizovaly jednotlivé hodnoty znaku X?

15. Prodejce motorek si vede záznamy o prodaných motorkách podle ceny (znak X). Doplňte tabulku četností znaku X, zakreslete distribuční funkci a vypočtete průměrnou výši ceny motorky.

rozmezí půjčky	(0-100 000⟩	(100 000-200 000⟩	(200 000-400 000⟩
n_j	500	300	100

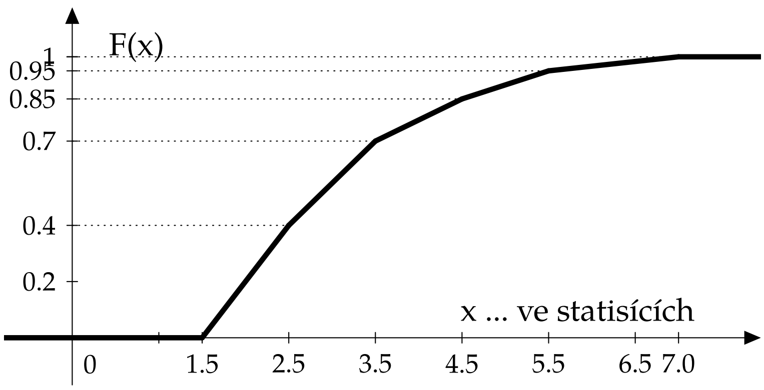
16. V hudebním kroužku je 10 žáků. Každý z nich na konci školního roku dostal hodnocení podle toho, jak se mu za poslední rok v kroužku dařilo. Hodnocení hudební školy má 3 stupně: 1 – skřivánek, 2– pěnkava, 3 – vrána. Děti dostali následující známky: 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1.

    (a) Vytvořte tabulku četností, která bude obsahovat sloupce: četnost, kumulativní četnost, relativní četnost a kumulativní relativní četnost.

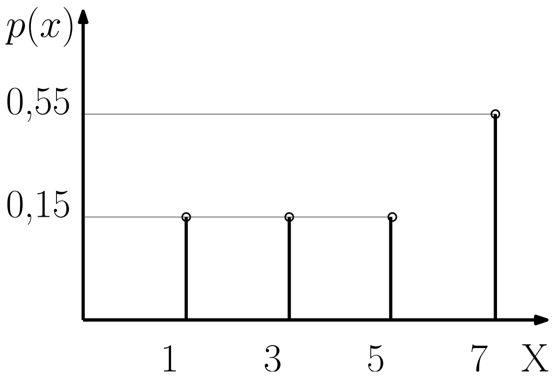
    (b) Nakreslete graf četnostní funkce a graf empirické distribuční funkce.

    (c) Určete průměrnou a mediánovou známku, dále rozptyl a směrodatnou odchylku známek.

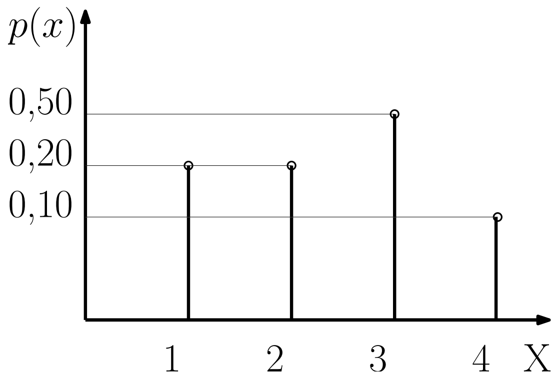
17. Prodejce motorek si vede záznamy o prodaných motorkách podle ceny (znak X), cenu si rozdělil do kategorií. Tyto záznamy si zanesl do grafu empirické distribuční funkce, vytvořte tabulku četností znaku X, vypočtěte modus a kvartilovou odchylku ceny motorky.



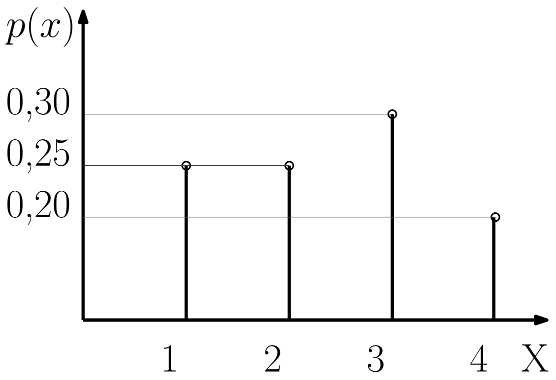
18. Máme zadán graf empirické četnostní funkce $p(x)$ (Zadání 1-4):



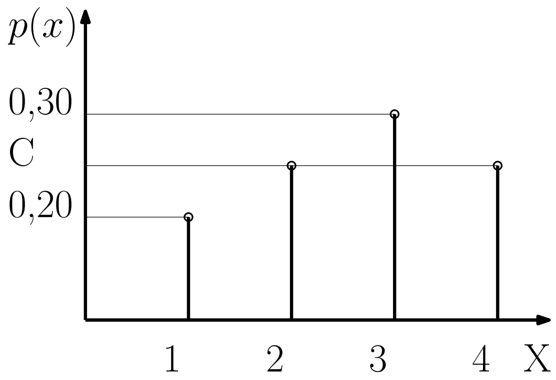
(a) Zadání 1



(b) Zadání 2



(c) Zadání 3



(d) Zadání 4

(a) Formálně zapište empirickou četnostní funkci $p(x)$.

(b) Nakreslete graf empirické distribuční funkce znaku X. Empirickou distribuční funkci znaku X formálně zapište.

(c) Spočtěte průměr, rozptyl a směrodatnou odchylku znaku X.

(d) Jestliže všechny hodnoty datového souboru zvětšíme o 150 %, odvoďte, jak se změní průměr a rozptyl.

(e) Určete medián, modus, dolní kvartil znaku X, horní kvartil znaku X, kvartilovou odchylku a dolní decil.

(f) Pokud jsme tuto četnostní funkci získali ze 100 pozorování, kolikrát se realizovaly jednotlivé hodnoty znaku X?

19. Prodejce motorek si vede záznamy o prodaných motorkách podle ceny (znak X), cenu si

rozdělil do kategorií 100 0000 - 200 0000, 200 000 - 350 000, 350 000 - 500 000, 500 000 - 700 000 (dražší modely neprodává). Procentuální zastoupení v jednotlivých skupinách bylo 20%, 40%, 25%, 15%. Celkem prodejce prodal 50 000 motorek.

(a) Sestavte tabulku rozložení četností pro znak X.

(b) Vypočtěte rozptyl pro znak X.

(c) Načrtněte histogram pro znak X.

20. V kontingenční tabulce jsou uvedeny hodnoty relativní četnostní funkce $p(x, y)$ vektorového znaku $(X, Y)'$.

$(X,Y)'$	-1	1
0	0,3	c
2	0,4	0,1
4	2c	0,1

Určete číselně hodnotu p, sestavte kontingenční tabulku funkce relativních kumulativních četností, spočtěte koeficient korelace znaků X, Y, zmenšíme-li všechny hodnoty znaku X o 1, jaká bude hodnota průměru a rozptylu znaku X?

1.6 Náhodný vektor

1.6.1 Řešené příklady

Příklad 1:

Sdružená hustota pravděpodobnosti dvousložkového náhodného vektoru je definována jako:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Nalezněte obě marginální hustoty pravděpodobností $f_x(x)$ a $f_y(y)$.

b) Rozhodněte o tom zda jsou veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

Řešení:

a) V prvním kroku ze sdružené hustoty pravděpodobnosti získáme jednotlivé marginální hustoty. Jelikož ze zadání vidíme, že jde o spojitý náhodný vektor, lze marginální hustotu pro náhodnou veličinu X vypočítat pomocí:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_{-\infty}^{0} 0\, dy + \int_{0}^{1} x + y\, dy + \int_{1}^{\infty} 0\, dy$$

pro $0 \leq x \leq 1$. Protože integrace nulové funkce je rovna nule stačí zvolit integrační meze v rozmezím $0 \leq y \leq 1$. Integrovat budeme přes sdruženou hustotu $f(x,y) = x + y$. Konkrétně

$$f_x(x) = \int_0^1 x + y \, dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$

Dále musíme určit marginální hustotu pro $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dy = 0.$$

Celkem:

$$f_x(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Obdobný postup aplikujeme i u druhé hledané marginální hustoty $f_y(y)$. Tentokrát budou integrační meze omezeny rozmezím $0 \leq x \leq 1$. Integrovat budeme opět přes sdruženou hustotu $f(x,y) = x + y$.

$$f_y(y) = \int_0^1 x + y dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^1 = y + \frac{1}{2}$$

Formálně lze marginální hustotu zapsat následujícím způsobem

$$f_y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{pro} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) Zbývá ověřit nezávislost náhodných veličin X a Y. Při nezávislosti veličin platí, že sdružená hustota pravděpodobnosti je rovna násobku marginálních hustot, tj. $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$. V našem případě

$$x + y = \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(y + \frac{1}{2} \right)$$
$$x + y \neq xy + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$$

Z výše uvedeného postupu je zřejmé, že náhodné veličiny X a Y nejsou stochasticky nezávislé.

□

Příklad 2:

Nechť X a Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny. Mějme zadány marginální pravděpodobnostní funkce $p_1(x)$ a $p_2(y)$:

$$p_1(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{pro} \quad x = -2 \\ 0,2 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 0,7 & \text{pro} \quad x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \qquad p_2(y) = \begin{cases} 0,5 & \text{pro} \quad x = -2 \\ 0,5 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete tabulkou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

b) Určete $P(X > -0,5)$ a $P(X + Y \geq 0)$.

Řešení:

a) Pro sestavení tabulky pravděpodobnostní funkce musíme využít informaci ze zadání o nezávislosti náhodných veličin. Tato informace nám umožňuje využít vztah $p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$. Jinými slovy, pokud chceme zjistit pravděpodobnost $p(-2, -2)$ stačí roznásobit $p_1(-2)$ s $p_2(-2)$.

$$p(-2, -2) = p_1(-2) \cdot p_2(-2) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05$$

analogicky získáme ostatní pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} p(-2, 0) &= p_1(-2) \cdot p_2(0) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05 \\ p(0, -2) &= p_1(0) \cdot p_2(-2) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \\ p(0, 0) &= p_1(0) \cdot p_2(0) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \\ p(1, -2) &= p_1(1) \cdot p_2(-2) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35 \\ p(1, 0) &= p_1(1) \cdot p_2(0) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme sestavit pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$ pomocí tabulky.

$X \backslash Y$	-2	0
-2	0,05	0,05
0	0,1	0,1
1	0,35	0,35

b) V posledním kroku budeme počítat pravděpodobnosti $P(X > -0,5)$ a $P(X + Y \geq 0)$. Abychom vypočetli pravděpodobnost $P(X > -0,5)$ vyjdeme z marginální pravděpodobností funkce $p_1(x)$ a nalezneme všechny pravděpodobnosti, při kterých je splněna podmínka $X > -0,5$

$$P(X > -0,5) = p_1(0) + p_1(1) = 0,2 + 0,7 = 0,9.$$

Pravděpodobnost $P(X+Y \geq 0)$ získáme ze sdružené pravděpodobnostní funkce, kterou jsme si sestavili pomocí tabulky výše. Opět vybíráme pravděpodobnosti, které splňují podmínku $X+Y \geq 0$. To jsou kombinace $\{0,0\}$ a $\{1,0\}$, zbytek kombinací podmínku nesplňuje. Nyní už můžeme pravděpodobnost vyčíslit

$$P(X+Y \geq 0) = p(0,0) + p(1,0) = 0,1 + 0,35 = 0,45.$$

□

Příklad 3:

Poté, co přijde Luděk domů a napíše si domácí úkoly, má 4 hodiny volného času. Náhodná veličina X udává dobu, kterou Luděk hraje počítačové hry, náhodná veličina Y udává dobu, kterou se dívá na televizi (může však dělat i něco jiného). Luděk každý den sleduje svůj oblíbený seriál, který trvá 60 minut. Předpokládejme, že se stejně rád dívá na televizi i hraje počítačové hry.

a) Určete simultánní hustotu pravděpodobnosti náhodného velktoru (X,Y)′.

b) Vypočítejte pravděpodobnost, že Luděk v náhodně vybraném dni strávil hraním na počítači a díváním na televizi dohromady alespoň 2 hodiny.

c) Vypočítejte pravděpodobnost, že Luděk v náhodně vybraném dni strávil díváním na televizi alespoň 2 hodiny.

d) Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

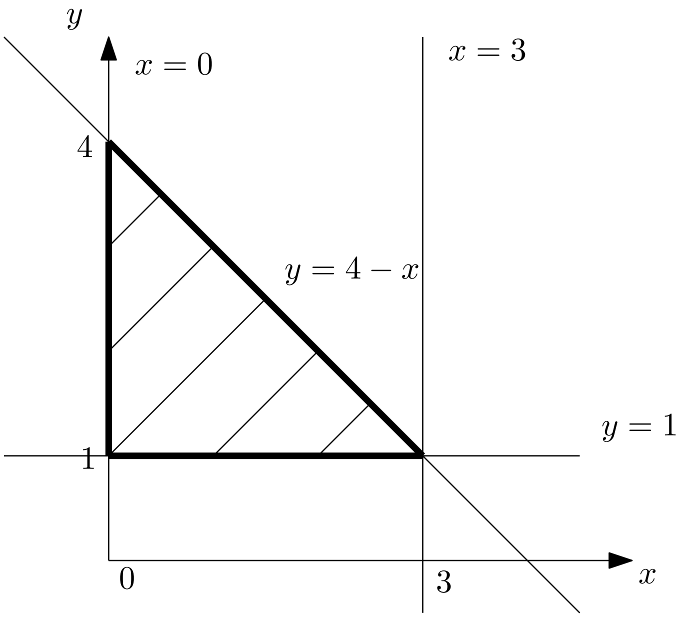
Řešení:

a) Jelikož předpokládáme, že se Luděk stejně rád dívá na televizi i hraje počítačové hry, a víme, že se každý den dívá 1 hodinu na svůj oblíbený seriál, hledáme následující simultánní hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x,y) = \begin{cases} b & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 1 \leq y \leq 4-x \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Oblast, na které je simultánní hustota vymezená je znázorněna na Obrázku 1.10.
Konstantu b zjistíme pomocí vztahu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$$



Obrázek 1.10: Oblast vymezení simultánní hustoty ze zadání a)

$$1 = \int_0^3 \int_1^{4-x} b \quad dydx$$

$$b \int_0^3 3 - x \quad dx = b \left[3x - 0,5x^2 \right]_0^3 = b(9 - 4,5) = 4,5b$$

$$1 = 4,5b$$

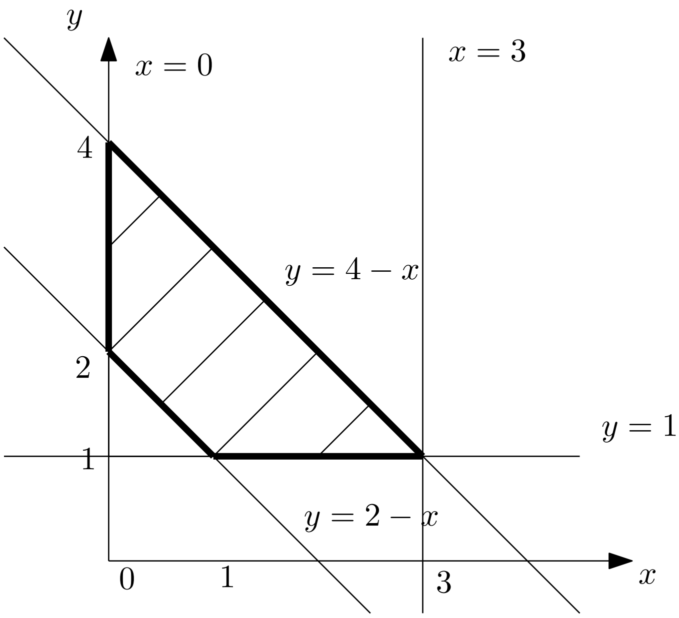
$$b = \frac{2}{9}$$

Simultánní hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru (X,Y)′ tedy je:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 1 \leq y \leq 4 - x \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) V dalším kroku budeme zjišťovat, s jakou pravděpodobností stráví Luděk sledováním televize a hraním počítačových her dohromady alespoň 2 hodiny. Hledáme tedy pravděpodobnost $P(X + Y > 2)$. Tuto pravděpodobnost získáme, když od jedničky odečteme pravděpodobnost, kdy Luděk v součtu stráví zmíněnými aktivitami méně než 2 hodiny. Změnu omezení, přes kterou budeme nyní integrovat reflektuje Obrázek 1.11.

$$P(X+Y>2) = 1 - \int_0^1 \int_1^{2-x} \frac{2}{9} \quad dydx = 1 - \frac{2}{9} \int_0^1 1-x \quad dx = 1 - \frac{2}{9} \left[x - 0,5x^2\right]_0^1 =$$
$$= 1 - \frac{2}{9}(1-0,5) = \frac{8}{9}$$

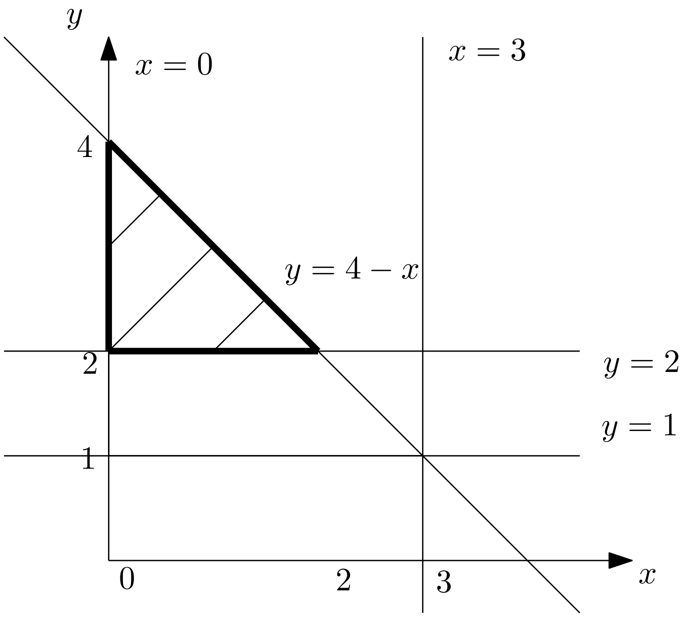


Obrázek 1.11: Oblast vymezení simultánní hustoty ze zadání b)

c) Nyní nás bude zajímat pravděpodobnost, že Luděk pouze sledováním televize stráví alespoň 2 hodiny. Hledáme pravděpodobnost $P(Y > 2)$, tedy že Luděk stráví sledováním televize minimálně 2 hodiny a maximálně 4 hodiny. Z této podmínky vyplývá, že hrát počítačové hry nebude vůbec nebo jim bude věnovat maximálně 2 hodiny. Změnu omezení, přes kterou budeme nyní integrovat reflektuje Obrázek 1.12.

$$P(Y>2) = \int_0^2 \int_2^{4-x} \frac{2}{9} \quad dydx = \frac{2}{9} \int_0^2 2-x \quad dx = \frac{2}{9} \left[2x - 0,5x^2\right]_0^2 = \frac{2}{9}(4-2) = \frac{4}{9}$$

d) V posledním kroku zjistíme, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé. Jak už víme, pro nezávislost náhodných veličin platí $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$. Musíme si tedy vypočítat marginální hustoty pravděpodobnosti.



Obrázek 1.12: Oblast vymezení simultánní hustoty ze zadání c)

$$f_x(x) = \int_1^{4-x} \frac{2}{9} \quad dy = \frac{2}{9}(3-x)$$

$$f_y(y) = \int_0^{4-y} \frac{2}{9} \quad dx = \frac{2}{9}(4-y)$$

Získali jsme marginální hustoty pravděpodobnosti:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-x) & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \qquad f_y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9}(4-y) & \text{pro} \quad 1 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jelikož $\frac{2}{9} \neq \frac{2}{9}(3-x) \cdot \frac{2}{9}(4-y)$, náhodné veličiny X a Y nejsou stochasticky nezávislé.

□

1.6.2 Neřešené příklady

1. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s marginálními pravděpodobnostmi

$$p_1(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{pro} \quad x = -2 \\ 0,2 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 0,5 & \text{pro} \quad x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \qquad p_2(y) = \begin{cases} 0,9 & \text{pro} \quad x = -2 \\ 0,1 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete:

(a) tabulkou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

(b) $P(X = 2)$

(c) $P(X \leq 2) - P(Y < -1)$

(d) $P(X + Y < 0)$

(e) $F(X, Y)$

2. Nechť $(X_1, X_2)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení soustředěné na množině $G = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Určete sdružené marginální hustoty.

3. Nechť $(X, Y)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení soustředěné na množině $G = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Určete sdružené marginální hustoty.

4. Náhodný vektor $(X_1, X_2)'$ má konstantní hustotu na $[1, 2] \times [2, 4]$ a nulovou jinde. Najděte sdruženou a marginální hustoty a příslušné distribuční funkce.

5. Sdružená (simultánní) pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $(X_1, X_2)'$ je funkce dána tabulkou:

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4
1	0,10	c	0,09	0,20
2	0,15	0,14	c	0,30

(a) Určete konstantu c.

(b) Určete marginální pravděpodobnostní funkce.

(c) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou náhodné veličiny X_1, X_2 stochasticky nezávislé.

6. Sdružená (simultánní) pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $(X_1, X_2)'$ je funkce dána tabulkou:

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3
1	0,02	0,03	0,05
2	0,18	0,27	0,45

Určete:

(a) marginální pravděpodobnostní funkce.

(b) pravděpodobnosti $P(X_1 < 2,5)$ a $P(X_2 < 2,5 \vee X_1 > 1,5)$.

7. Nechť náhodný vektor $(X, Y)'$ má diskrétní rozdělení, dané tabulkou

$x \backslash y$	-1	0	1
0	0,20	0,10	0,10
1	0,10	0,25	0,25

Určete

(a) hodnotu distribuční funkce $F(1;0)$.

(b) marginální pravděpodobnostní funkce.

(c) zda jsou náhodné veličiny nezávislé.

8. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rozdělení pravděpodobnosti, dané hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{18} & \text{pro} \quad 0 < x < 2,\ 0 < y < 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Vypočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti $f_1(x)$ a $f_2(y)$

(b) Rozhodněte o nezávislosti náhodných veličin X a Y.

9. Sdružená (simultánní) hustota náhodného vektoru $(X_1, X_2, X_3)'$ je funkce dána vztahem:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Kx_1x_2^2x_3 & x_1 \in (0,1), x_2 \in (0,3), x_3 \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stanovte:

(a) Konstantu K.

(b) Marginální hustoty $f_{1,2}(x_1, x_2)$ a $f_1(x_1)$.

10. Házíme dvěma hracími kostkami. Nechť náhodná veličina X udává počet šestek, které padly na první kostce a náhodná veličina Y udává počet šestek, které padly na druhé kostce.

(a) Popište prostor elementárních jevů Ω.

(b) Určete sdružené rozdělení X a Y.

11. Hodíme dvěma hracími kostkami. Nechť náhodná veličina X udává počet šestek, které padly na první kostce a náhodná veličina Y udává počet ok, které padly na druhé kostce.

    (a) Popište prostor elementárních jevů Ω.

    (b) Určete sdružené rozdělení X a Y.

12. Mějme zadanou marginální hustoty

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cdot x & x \in \langle 0, 1/2) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} b \cdot y & y \in \langle 0, 2) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

.

    (a) Určete konstanty a a b.

    (b) Simultánní hustotu $f(x, y)$ pokud víte, že zadané marginální hustoty jsou stochasticky nezávislé.

13. Náhodný vektor $(X_1, X_2)'$ má hustotu zadanou jako:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2 & \text{pro} \quad 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq a \text{ a } a > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Stanovte:

    (a) Konstantu a, tak aby $f(x_1, x_2)$ byla hustotou pravděpodobnosti.

    (b) Obě marginální hustoty.

    (c) Zda jsou náhodné veličiny X_1, X_2 stochasticky nezávislé.

14. Firma Korálky s.r.o. vyrábí laciné náramky pro nenáročné ženy. Jeden hnědorůžový náramek obsahuje 30 korálků: 10 hnědých a 20 růžových. Každý korálek může být nezávisle na ostatních nedokonale zabarvený. Hnědý může být nedokonale zabarvený s pravděpodobností 0,14, růžový s pravděpodobností 0,1. Náhodná veličina X udává počet nedokonale zabarvených hnědých korálků. Náhodná veličina Y udává počet nedokonale zabarvených růžových korálků.

    (a) Určete rozdělení náhodných veličin.

(b) Jaká je pravděpodobnost nedokonale zabarveného náramku?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že na náramku budou právě 4 nedokonalé hnědé korálky a právě 9 nedokonalých růžových korálků?

15. Mám 2 motory (1 obyčejný, 1 úsporný) do kterých jsem nalil stejné množství paliva. Jejich výdrže jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametry $\lambda_1 = 0,2$, $\lambda_2 = 0,4$ jaká je pravděpodobnost, že okamžik $t = 0,3$ přežijí oba motory?

16. V nadnárodní korporaci vybíráme 3 lidi, které přijmeme na 3 místa účetních (tato místa jsou prakticky nerozlišitelná) z 7mi kandidátů. Z těchto je 2 muži a 5 ženy, kdy 3 ženy mají dítě a zbylé 2 jsou bezdětné. Náhodná veličina X udává počet vybraných žen a náhodná veličina Y udává počet bezdětných vybraných žen. Určete simultánní pravděpodobnostní funkci a obě marginální pravděpodobnostní funkce.

17. Vzájemně nezávislé náhodné veličiny X_1, X_2, X_3 mají stejnou hustotu $f_i(x_i) = 3x_i^2$ pro $0 < x_i < 1$ pro $i = 1,2,3$, jinak jsou nulové. Jaká je pravděpodobnost, že právě dvě z těchto veličin nabudou hodnoty větší než 0,5?

18. Předpokládejme, že životnost určitého výrobku je náhodná veličina s hustotou $f(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$, jinak je nulová. Označme X_1, X_2, X_3 životnost tří různých výrobků. Vypočítejte pravděpodobnost $P(X_1 < 2 \wedge 1 < X_2 < 3 \wedge X_3 > 2)$.

19. Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $(X_1, X_2)'$ je zadána vztahem:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{12}x_1 + k \cdot x_2 & \text{pro} \quad x_1 \in \{1,2\}; x_2 \in \{0,1\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Stanovte:

(a) Konstantu k, tak aby $p(x_1, x_2)$ byla pravděpodobnostní funkcí.

(b) Obě marginální pravděpodobnostní funkce.

(c) Zda jsou náhodné veličiny X_1, X_2 stochasticky nezávislé.

20. Nechť X_1 a X_2 jsou spojité náhodné veličiny. O těchto veličinách víme, že jsou nezávislé a obě mají stejné rozdělení pravděpodobnosti dané jako

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-x_i \cdot c} & \text{pro} \quad x_i > 0 \text{ a } c > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Stanovte:

(a) Konstantu c, tak aby $f_i(x_i)$ byly hustotou pravděpodobnosti.

(b) Hustotu náhodného vektoru $(X_1, X_2)'$

21. Rozhodněte o nezávislost náhodných veličin X_1 a X_2, má-li náhodný vektor (X_1, X_2) distribuční funkci

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x_1 < 0 \vee x_2 < 0 \\ \frac{x_1^2 x_2^2}{4} & \text{pro} \quad 0 < x_1 < 1 \wedge 0 < x_2 < 2 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

22. Náhodný vektor má rozdělení pravděpodobnosti, dané tabukou:

$x\backslash y$	-1	0
-2	0,2	0,1
-1	0,05	0,25
1	0,2	0,2

Stanovte:

a) hodnotu distribuční funkce $F(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$;

b) marginální pravděpodobnostní funkce;

c) $P(X \leq 0)$, $P(Y \leq -0,5)$, $F_X(1)$;

d) zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

23. Nechť mají náhodné veličiny X a Y rozdělení pravděpodobnosti, dané následujícími tabulkami:

x_i	-0,5	0	1	2
$p_1(x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

y_j	-1	1	2
$p_2(y_j)$	0,5	0,2	0,3

Předpokládejme, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličny. Pak stanovte:

a) pravděpodobnostní funkci vektoru (X,Y)′;

b) hodnotu distribuční funkce $F(1,5; 0)$;

c) $P(X \leq 0,7)$, $P(Y \geq 1)$.

24. Náhodný vektor (X,Y)′ má rozdělení pravděpodobnosti, dané hustotou:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}) & \text{pro} \quad (x,y) \in (0;2) \times (0;3) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Vypočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti $f_1(x)$ a $f_2(y)$.

b) Jsou X a Y nezávislé?

25. Tři nezávislé náhodné veličny X_1, X_2, X_3 mají každá stejnou marginální hustotu pravděpodobnosti:

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 3x_i^2 & \text{pro} \quad x_i \in (0;1), i = 1,2,3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jaká je pravděpodobnost, že:

a) alespoň jedna bude mít hodnotu větší než 0,5?

b) právě dvě budou mít hodnoty menší než 0,3?

1.7 Číselné charakteristiky

1.7.1 Řešené příklady

Příklad 1:

Určete číselné charakteristiky E(X), D(X), D(1-3X) náhodné veličiny X s následující hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení:

První z číselných charakteristik, kterou můžeme určit je střední hodnota $E(X)$. Jelikož je naše rozdělení pravděpodobnosti spojité (rozeznáme, dle zadané hustoty), budeme střední hodnotu počítat pomocí vzorce

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Abychom správně určili integrační meze, musíme si všimnout, že funkce je definovaná po částech. Na intervalu $(-\infty, 0)$ je $f(X) = 0$, na intervalu (0,1) je $f(x) = 2x$ a na intervalu $(1, \infty)$ je $f(x) = 0$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \, dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2x \, dx + \int_{1}^{\infty} 0 \, dx$$

Víme, že integrál přes nulovou funkci je roven nule, stačí tedy integrovat v mezích od $(0, 1)$ a budeme integrovat přes hustotu $f(x) = 2x$.

$$E(X) = \int_{0}^{1} x \cdot 2x \, dx = \int_{0}^{1} 2x^2 \, dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Druhou z číselných charakteristik, kterou si vyčíslíme je rozptyl $D(X)$. Rozptyl lze vypočítat pomocí vzorce

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Vyčíslení $E(X)^2$ nám nečiní žádný problém, neboť se jedná pouze o umocněnou hodnotu střední hodnoty vypočítané o pár řádků výše, tedy

$$E(X)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Vyčíslení $E(X^2)$ provedeme pomocí následujícího vzorce

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx.$$

konkrétně tedy

$$E(X^2) = \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2x dx = \int_{0}^{1} 2x^3 dx = \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Finálním krokem je dosazení do rovnice rozptylu

$$D(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Posledním úkolem je určit rozptyl transformované veličiny $D(1 - 3X)$. Při tomto výpočtu využijeme následující vybraná pravidla:

$$\begin{aligned} D(aX - bY) &= D(aX) + D(bY) - 2C(aX, bY), \\ D(aX) &= a^2 D(X), \\ D(a) &= 0, \\ C(a, bY) &= 0, \end{aligned}$$

kde X a Y jsou náhodné veličiny a a a b jsou konstanty. Rozptyl s využitím výše zmíněných pravidel vypočteme jako

$$D(1-3X) = D(1) + D(-3X) - 2C(1,3X) = 0 + 3^2 D(X) - 0 = 9 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{2}$$

□

Příklad 2:

Mějme zadány následující číselné charakteristiky $E(X) = E(Y) = 2$, $E(Y^2) = 8$, $D(X) = 1$ a $E(XY) = 3$. Určete korelační koeficienty $R(X,Y)$ a R(2X,-Y).

Řešení:

Jak již bylo řečeno, pro výpočet korelačního koeficientu potřebujeme znát vzorec

$$R(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}.$$

Zatím ze zadání známe pouze rozptyl náhodné veličiny $D(X)$, zbývá nám tedy dopočítat kovarianci $C(X,Y)$ a rozptyl náhodné veličiny $D(Y)$. Abychom dopočítali rozptyl náhodné veličiny Y vyjdeme ze vzorce pro rozptyl a dosadíme příslušné momenty, které známe ze zadání

$$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 8 - 2^2 = 4.$$

Podobným způsobem získáme i kovarianční koeficient

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -1.$$

V posledním kroku vypočteme koeficient korelace dosazením do výše zmíněného vzorce

$$R(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 4}} = -\frac{1}{2}.$$

Jako přídavek si ještě ukážeme jak vypočítat koeficient korelace pro transformovanou veličinu, konkrétně $R(2X,-Y)$. Zde si pomůžeme pravidlem

$$R(a_1 + b_1 X, a_2 + b_2 Y) = sgn(b_1 b_2) R(X,Y),$$

kde $sgn(b_1b_2)$ je funkce vracející pouze znaménko součinu konstant b_1 a b_2. V našem případě tedy půjde o znaménko ze součinu $b_1 = 2$ a $b_2 = -1$. Půjde tedy o znaménko $-$. Výsledný koeficient korelace je roven

$$R(2X, -Y) = sgn(2 \cdot (-1)) \cdot R(X,Y) = -R(X,Y) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$\square$

Příklad 3:

Diskrétní náhodný vektor (X,Y)′ má pravděpodobnostní funkci

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{21}(2x - y + 2) & \text{pro} \quad x = \{0,1,2\} \quad y = \{0,1\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte koeficient korelace R(X,Y).

Řešení:

Ze zadání si vytvoříme tabulku se simultánní pravděpodobnostní funkcí a marginálními pravděpodobnostními funkcemi:

$X \backslash Y$	0	1	$p_1(x)$
0	2/21	1/21	3/21
1	4/21	3/21	7/21
2	6/21	5/21	11/21
$p_2(y)$	12/21	9/21	1

Při výpočtu marginálních pravděpodobnostních funkcí $p_1(x)$ a $p_2(y)$ jsme využili vztahy

$$p_1(x) = \sum_{y \in A_2} p(x,y) \quad a \quad p_2(y) = \sum_{x \in A_1} p(x,y)$$

Koeficient korelace dostaneme po dosazení do vzorce

$$R(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$

Ještě předtím je tedy potřeba si vypočítat kovarianci, rozptyly, střední hodnoty, druhé počáteční momenty a $E(X \cdot Y)$. Střední hodnoty:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{21} + 1 \cdot \frac{7}{21} + 2 \cdot \frac{11}{21} = \frac{29}{21}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{12}{21} + 1 \cdot \frac{9}{21} = \frac{9}{21}$$

Druhé počáteční momenty:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{21} + 1^2 \cdot \frac{7}{21} + 2^2 \cdot \frac{11}{21} = \frac{51}{21}$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{12}{21} + 1^2 \cdot \frac{9}{21} = \frac{9}{21}$$

Rozptyly:

$$D(X) = \frac{51}{21} - (\frac{29}{21})^2 = \frac{230}{441}$$

$$D(Y) = \frac{9}{21} - (\frac{9}{21})^2 = \frac{12}{49}$$

$E(X \cdot Y)$:

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{2}{21} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{21} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{4}{21} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{21} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{6}{21} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{21} = \frac{3}{21} + \frac{10}{21} = \frac{13}{21}$$

Kovariance:

$$C(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{13}{21} - \frac{29}{21} \cdot \frac{9}{21} = \frac{4}{147}$$

Pak koeficient korelace je:

$$R(X,Y) = \frac{\frac{4}{147}}{\sqrt{\frac{230}{441}} \cdot \sqrt{\frac{12}{49}}} = 0,07614$$

□

Příklad 4:

Spojitý náhodný vektor (X,Y)′ má hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{pro} \quad 0 < x \leq 1 \quad 0 < y \leq x \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete $E(X)$, $K_{0,1}(X)$ a $C(X,Y)$.

Řešení:

Pro výpočet E(X) musíme znát marginánlní hustotu $f_1(x)$. Tu získáme pomocí vztahu

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

(Pro určení mezí integrálu je vhodné si zakreslit oblast $0 < x \leq 1 \quad 0 < y \leq$.)

$$f_1(x) = \int_0^x 8xy\, dy = \left[8x\frac{y^2}{2}\right]_0^x = 4x^3$$

Marginální hustota pravděpodobnosti $f_1(x)$ má tvar:

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{pro} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro výpočet střední hodnoty použijeme vzorec

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 4x^3\, dx = \left[4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

Dále vypočteme $K_{0,1}(X)$, využijeme vztah:

$$0,1 = \int_{-\infty}^{K_{0,1}(X)} f(x)\, dx$$

$$0,1 = \int_0^{K_{0,1}(X)} 4x^3\, dx = \left[x^4\right]_0^{K_{0,1}(X)} = K_{0,1}(X)^4$$

$$K_{0,1}(X) = \sqrt[4]{0,1} \doteq 0,5623.$$

Pro výpočet C(X,Y) si nejdřív musíme dopočítat E(Y) a $E(X \cdot Y)$. Začneme opět určením marginální hustoty pravděpodobnosti $f_2(y)$.

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$$f_2(y) = \int_y^1 8xy\,dx = \left[8\frac{x^2}{2}y\right]_y^1 = 4y - 4y^3$$

Marginální hustota pravděpodobnosti $f_2(y)$ má tvar:

$$f_2(y) = \begin{cases} 4y - 4y^3 & \text{pro} \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro výpočet E(Y) použijeme vzorec

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(y)\,dy$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot (4y - 4y^3)\,dy = \left[4\frac{y^3}{3} - 4\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

V dalším kroku vypočítáme $E(X \cdot Y)$ pomocí vzorce

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y)\,dy\,dx$$

$$E(X \cdot Y) = \int_0^1 \int_0^x xy \cdot 8xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[8x^2 \cdot \frac{y^3}{3}\right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{8}{3}x^5\,dx = \frac{8}{3}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

V posledním kroku nám zbývá vypočítat kovarianci C(X,Y).

$$C(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{4}{9} - \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{15} = 0,01778$$

□

1.7.2 Neřešené příklady

1. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X popsané následující funkcí:

(a)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pro} \quad x \in \{0, 1, \ldots, 6\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{pro} \quad x \in (1, 2) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(c)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} & \text{pro} \quad x \in \{1, 3, 5, 7\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro} \quad x \in (0, 1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. Je dána pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X tabulkou:

x	1	2	3	4	jinak
$p(x)$	0,3	0,1	c	0,2	0

Určete konstantu c a následně číselné charakteristiky E(X) a D(X) náhodné veličiny X.

3. Nechť je X náhodná veličina, její pravděpodobnostní funkce je definovaná následujícím tabulkou:

x	4	5	2	jinak
$p(x)$	1/10	6/10	3/10	0

Určete:

(a) $E(3X + 4)$
(b) $E(X^3)$
(c) $D(1 - 2X)$

4. Nechť X je spojitá náhodná veličina definovaná hustotou pravděpodobnosti $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x)(1 + x) & \text{pro} \quad -1 < x < 1; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

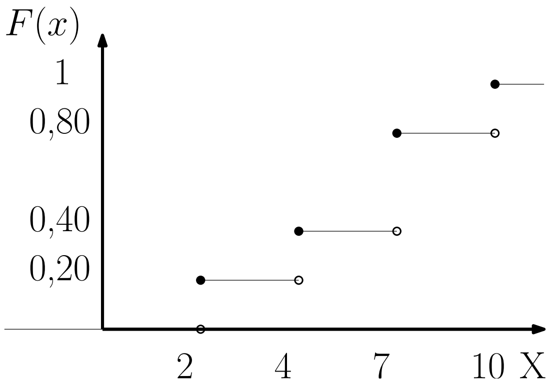
Určete její základní číselné charakteristiky.

5. Mějme distribuční funkci náhodné veličiny X definovanou jako

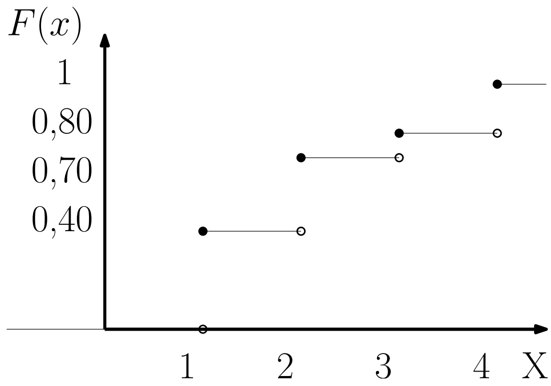
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < -4 \\ 0,1x + 0,4 & \text{pro} \quad -4 \leq x < 2 \\ 0,4x - 0,2 & \text{pro} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

6. Máme zadán graf distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X (Zadání 1 a Zadání 2):



(a) Zadání 1



(b) Zadání 2

   (a) Formálně zapište distribuční funkci $F(x)$.
   (b) Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce znaku X. Pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X formálně zapište.
   (c) Spočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X.

7. Prodavač zmrzliny utrží 1200 Kč, když je pěkné počasí, a 400 Kč, když je počasí špatné. Jaká je očekávaná hodnota prodavačovy tržby, pokud víme, že špatné počasí nastane s pravděpodobností 35%?

8. Zmrzlinář z předchozího příkladu využívá v krámu dva stroje na zmrzlinu. Stroje pracují nezávisle. Pravděpodobnost poruchy 1. stroje je 0,5 a pravděpodobnost poruchy 2. stroje je 0,1. Nechť X značí náhodnou veličinu vyjadřující počet porouchaných zmrzlinových strojů. Určete $E(X)$, $D(X)$ a $D(69 - 3X)$.

9. Abychom ocenili kvalitu práce tří pracovníků P1, P2 a P3 provedeme šetření. Při šetření zjistíme kvalitu výrobku a následně výrobek obodujeme. Za výrobek nejvyšší kvality dostane pracovník 3 body, za výrobek střední kvality 2 body, za výrobek nízké kvality 1 bod a za zmetek bude penalizován -1 bodem. Pravděpodobnosti výroby jednotlivých výrobků jsou zahrnuty v tabulce.

	x	3	2	1	-1
P1	$p_1(x)$	0,5	0,1	0,3	0,1
P2	$p_2(x)$	0,3	0,5	0,1	0,1
P3	$p_3(x)$	0,4	0,3	0,3	0,0

Určete, u kterého pracovníka lze očekávat výrobky z nejvyšší kvalitou a který pracovník pracuje nejstabilněji.

10. Nechť X, Y a Z jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Spočítejte střední hodnotu transformované náhodné veličiny $U = X^2 + XY + Y^2$, pokud $E(Y) = 4$, $E(X) = -6$, $D(Y) = 1$, $D(X) = 4$ a $R(X,Y) = 0,3$.

11. Náhodné veličiny X a Y jsou stochasticky nezávislé, dále víme, že $E(X) = 2$, $E(Y) = -2$, $D(X) = 1$ a $D(Y) = 4$. Určete: $E(X-3Y)$, $E(X^2 - Y)$,$D(X-3Y)$, $D(X-Y)$.

12. U náhodných veličin X a Y známe následující charakteristiky: $E(X) = 2$, $E(Y) = -1$, $E(XY) = -4$, $D(X) = 3$ a $D(Y) = 5$. Určete korelační koeficient R(X,Y).

13. U náhodných veličin X a Y známe následující charakteristiky: $E(X) = 2, E(Y) = 1, C(X,Y) = 0$, $D(X) = 1$ a $D(Y) = 4$. Vypočtěte střední hodnoty a rozptyly náhodných veličin Z, U a V:
    (a) $Z = 3Y - 2X + 4$
    (b) $U = 2X - Y$
    (c) $V = -3X - 5$

14. Počet různých druhů piv, které návštěvník ochutná při návštěvě festivalu je náhodná veličina X. Statisticky bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot 0, 1, 2, 3, 4 s pravděpodobnostmi 0,25; 0,55; 0,11; 0,07; 0,02. Určete střední hodnotu rozptyl náhodné veličiny X.

15. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s marginálními pravděpodobnostmi

$$p_1(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{pro} \quad x = -2 \\ 0,2 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 0,5 & \text{pro} \quad x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \qquad p_2(y) = \begin{cases} 0,9 & \text{pro} \quad x = -2 \\ 0,1 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

    Určete:
    (a) $E(X), E(Y)$
    (b) $R(X,Y)$

16. Hustota náhodné veličiny X je zadána funkcí $f(x) = 2x - b$ pro $x \in (2;3)$ jinde je nulová. Dopočítejte konstantu b, určete střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X.

17. Máme danou variační matici sloupcového náhodného vektoru $(X_1, X_2, X_3)'$ jako:

$$var(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 4 & 0,5 & -5 \\ 0,5 & 1 & 2,5 \\ -5 & 2,5 & 25 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Určete korelační matici $cor(\mathbb{X})$.

18. Určete číselné charakteristiky $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$ a $R(X,Y)$ náhodného vektoru $(X,Y)'$, jehož pravděpodobnostní funkce je zadána tabulkou:

Y/X	2	3	6
1	0,15	0,20	0,10
3	0,20	0,05	0,30

19. Pro náhodný vektor $(X,Y)'$, jehož pravděpodobnostní funkce je zadaná tabulkou vypočtěte koeficient korelace

Y/X	0	1
0	0,965	0,02
1	0,01	0,005

20. Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $(X,Y)'$ je dána vztahem:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{12} & \text{pro} \quad x \in \{0,1\}, y \in \{1,2\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

21. Náhodný vektor $X = (X,Y)'$ má následující simultánní hustotu:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{pro} \quad x,y \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočítejte kovarianční a korelační koeficienty mezi náhodnými veličinami X a Y.

22. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrně spojité rozdělení na oblasti $G = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2; 2 \leq y \leq 4\}$. Určete střední hodnoty a rozptyly $E(X), E(Y), D(X)$ a $D(Y)$. Sestavte variační matici.

23. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny a platí: $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$ pro $i = 1, \ldots, n$. Určete střední hodnotu a rozptyl aritmetického průměru těchto náhodných veličin.

24. Mějme spojitou náhodnou veličinu X definovanou hustotou pravděpodobnosti $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{pro} \quad -5 \leq x < 1; \\ \frac{x}{10} & \text{pro} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

b) Určete 30%-ní a 80%-ní kvantil náhodné veličiny X.

25. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{pro} \quad 0 \leq x < 1; \\ x - \frac{3}{4} & \text{pro} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

b) Určete 18%-ní kvantil, medián a 90%-ní kvantil.

26. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{pro} \quad 0 < x \leq 1; \quad 0 < y \leq x \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete E(X), E(Y), E(XY), C(X,Y) a D(X-Y).

1.8 Příklady diskrétních a spojitých rozdělení pravděpodobností

1.8.1 Řešený příklad

Příklad 1:

U každého bodu poznejte rozdělení pravděpodobnosti, určete parametry a pravděpodobnostní funkci. Napište vzorec pro výpočet střední hodnoty a rozptylu.

a) Aleš píše zápočtový test. Pravděpodobnost úspěchu Aleše je 60 %. Náhodná veličina X říká, že Aleš test nezvládl napsat.

b) Zásilka obsahuje 85 % kvalitních a 15 % nekvalitních výrobků. Náhodně s vracením vybereme 4 výrobky. Náhodná veličina X udává počet kvalitních výrobků.

c) Ve třídě je 25 žáků. Učitel zkouší tak dlouho, dokud nedostane správnou odpověď (pokud nikdo nezná odpověď na otázku, učitel se zeptá na jinou otázku a pokračuje ve zkoušení). Pravděpodobnost, že náhodný žák správně odpoví, je 0,3.

d) Poruchy vodovodu nastávají naprosto náhodně a bylo zjištěno, že jich je v „průměru“ (při nekonečném počtu pozorování tj. ve střední hodnotě) 7 za týden. Náhodná veličina X určuje počet poruch vodovodu za týden.

e) Eliška se dívá na seriál. Epizoda trvá 20 minut. Náhodná veličina X určuje náhodný příchod Eliščiny maminky do pokoje v době trvání epizody (v každém čase je stejně pravděpodobný).

f) Uvažujme hod kostkou. Každý výsledek je v tomto případě stejně pravděpodobný. Náhodná veličina X udává hozené číslo.

g) Mixér se „průměrně“ (při nekonečném počtu opakování) porouchá po 350 hodinách používání. Náhodná veličina udává dobu životnosti zařízení.

h) Časopis 21. století se rozhodl podrobit své čtenáře IQ testu. Střední hodnota IQ byla 120, směrodatná odchylka 10. Náhodná veličina X určuje hodnotu IQ.

Řešení:

a) Toto rozdělení je jedno z nejjednodušších - alternativní. Poznáme ho tak, že máme na výběr jen dvě možnosti - házení mincí, možnosti ANO/NE... Zde Aleš test buď napíše, nebo nenapíše. Žádná jiná možnost není. Každá z možností přitom musí mít danou pravděpodobnost, s jakou nastane. V našem případě Aleš test napíše s pravděpodobností 60 % a nenapíše s pravděpodobností 40 % (v součtu musíme získat 100 % a máme jen dvě možnosti. Pravděpodobnostní funkce alternativního rozdělení vypadá následovně:

$$p(x) = \begin{cases} 0,6 & \text{pro} \quad x = 1; \\ 0,4 & \text{pro} \quad x = 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Píšeme: $X \sim A(\nu) = A(0,6)$. Ještě pro úplnost dodáme, že alternativní rozdělení je rozdělením diskrétním. Možnosti, které mohou nastat jsou buď 0 (nenapíše) nebo 1 (napíše). Střední hodnota:

$E(X) = \nu$. Rozptyl: $D(X) = \nu(1-\nu)$.

b) Toto rozdělení, binomické, je velmi podobné alternativnímu, ale daná událost se zde objevuje vícekrát (suma náhodných veličin s alternativním rozdělením má binomické rozdělení). Opět máme jen dvě možnosti: výrobek je buď kvalitní, nebo nekvalitní s danou pravděpodobností. Jenže nemáme výrobek jen jeden, ale vybereme je čtyři. Jak kdyby Aleš psal čtyři testy místo jednoho. Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení obsahuje navíc údaj o počtu úspěchů (v tomto případě kvalitních výrobků):

$$p(x) = \begin{cases} \binom{4}{x} 0,85^x (1-0,85)^{1-x} & \text{pro} \quad x = 0, \ldots, 4; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Píšeme: $X \sim Bi(n, \nu) = Bi(4; 0,85)$. Binomické rozdělení je opět diskrétní. Střední hodnota: $E(X) = n \cdot \nu$. Rozptyl: $D(X) = n \cdot \nu(1-\nu)$.

c) V tomto bodě si představíme geometrické rozdělení. Poznáme ho podle toho, že náhodná veličina představuje počet neúspěchů (v posloupnosti nezávislých opakovaných pokusů) před prvním úspěchem. Pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu stejná (zde 0,3). V našem případě je neúspěchem to, že žák nezná správnou odpověď. Učitel tedy zkouší tak dlouho, dokud mu nějaký žák neodpoví správně. Údaj o počtu žáků je pro geometrické rozdělení irelevantní. Pravděpodobnostní funkce geometrického rozdělení vypadá následovně:

$$p(x) = \begin{cases} (1-0,3)^x 0,3 & \text{pro} \quad x = 0, 1, \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Píšeme: $X \sim Ge(\nu) = Ge(0,3)$. Také geometrické rozdělení je diskrétní. Střední hodnota: $E(X) = \frac{1-\nu}{\nu}$. Rozptyl: $D(X) = \frac{1-\nu}{\nu^2}$.

d) Dalším diskrétním rozdělením v tomto příkladu je rozdělení Poissonovo. Toto rozdělení poznáme tak, že náhodná veličina udává počet událostí v čase, přičemž události nastanou nezávisle na sobě, náhodně a jednotlivě. Parametrem tohoto rozdělení je střední hodnota počtu událostí za danou časovou jednotku (v našem případě týden), což je zde 7 poruch. To, že se porouchá vodovod na severu Brna, neznamená, že to nějak ovlivní vodovod na jihu Brna. Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení vypadá takto:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{pro} \quad x = 0, 1, \ldots; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Píšeme: $X \sim Po(\lambda) = Po(7)$. Střední hodnota: $E(X) = \lambda$. Rozptyl: $D(X) = \lambda$.

e) Toto rozdělení je prvním spojitým, se kterým se v tomto příkladu seznamujeme. Spojitost poznáme tak, že víme, že maminka může přijít do pokoje v libovolný čas, jehož nejmenší dílek je nekonečně malý. Jedná se o rovnoměrné spojité rozdělení. Rovnoměrné je proto, že pravděpodobnost příchodu maminky do pokoje je v každém okamžiku stejná. Zde nás zajímá pouze délka intervalu, což je 20 minut (doba trvání epizody).
Funkci hustoty rovnoměrného diskrétního rozdělení vidíme zde:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro} \quad x \in (a,b); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Píšeme: $X \sim Rs(a,b) = Rs(0,20)$. Střední hodnota: $E(X) = \frac{a+b}{2}$. Rozptyl: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

f) Podobným rozdělením jako v bodě e) (ale pro diskrétní případ) je rozdělení rovnoměrné diskrétní. Nyní nám nemůže na kostce padnout nekonečně mnoho čísel, pouze čísla 1 až 6. Každé číslo padne se stejnou pravděpodobnostní, proto je toto rozdělení nazýváno rovnoměrným. Pravděpodobnostní funkce rovnoměrného diskrétního rozdělení si ukážeme zde:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pro} \quad x \in \{1,2,3,4,5,6\}; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Píšeme: $X \sim Rd(1,2,3,4,5,6)$. Toto rozdělení nemá parametr, na který jsme zvyklí z předchozích rozdělení, ale jejími parametry jsou všechny přípustné hodnoty (zde hody kostky). Střední hodnota: $E(X) = \frac{6+1}{2}$. Rozptyl: $D(X) = \frac{(6^2-1)^2}{12}$. Zde 6 nereprezentuje nejvyšší číslo na kostce, ale určuje počet přípustných prvků (tedy možností hodů).

g) Dalším rozdělením je rozdělení exponenciální. Toto rozdělení je spojité a jeho náhodná veličina udává dobu čekání na nastání události (zde porouchání mixéru). Tato událost se však může dostavit se stejnou pravděpodobností v jakémkoliv okamžiku (bez ohledu na to, jak dlouho zatím mixér fungoval). Parametrem je zde převrácená hodnota střední hodnoty doby čekání na nastání události (zde 350 hodin). Funkce hustoty exponenciálního rozdělení vypadá takto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{350} \cdot e^{-\frac{1}{350}x} & \text{pro} \quad x > 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Píšeme: $X \sim Ex(\lambda) = Ex(\frac{1}{350})$. Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Rozptyl: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

h) Posledním rozdělením, které si popíšeme, je normální rozdělení. Toto rozdělení poznáme tak, že ke konstantě (střední hodnotě) je přičítáno velké množství malých nezávislých náhodných vlivů, které kolísají kolem 0. Například IQ v populaci se řídí normálním rozdělením. Velká většina lidí má IQ okolo střední hodnoty, velmi malé procento lidí je podprůměrných či nadprůměrných. Čím více se vzdalujeme od střední hodnoty, tím méně lidí s daným IQ nalezneme. Toto rozdělení je také symetrické, tedy procento lidí s IQ o 20 nad průměrem a 20 pod průměrem by teoreticky mělo být stejné (při dostatečně velkém počtu lidí). Parametry tohoto rozdělení máme řečené v zadání. Funkce hustoty normálního rozdělení má následující tvar:

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-120)^2}{2\cdot 10^2}}$$

Píšeme: $X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(120, 10^2)$. Mocnině směrodatné odchylky se říká rozptyl. Střední hodnota: $E(X) = \mu$. Rozptyl: $D(X) = \sigma^2$. □

Příklad 2:

V nádobě 50 výrobků je 5 zmetků. Z nádoby jsou náhodně vybrány 3 výrobky. Předpokládáme, že každý vybraný výrobek se vrátí nazpět do nádoby, takže jde o náhodný výběr s vracením. Počet zmetků mezi vybranými výrobky je náhodná veličina X. Určete:

a) typ jejího rozdělení pravděpodobnosti,

b) pravděpodobnostní funkci $p(x)$,

c) střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku σ,

d) $P(1 < X \leq 3)$.

Řešení:

a) Náhodná veličina X udává počet zmetků, může tedy nabývat pouze hodnot $x = 0, 1, 2, 3$ (tedy pouze konečného počtu hodnot přičemž začínáme od nuly s krokem jedna), navíc známe pravděpodobnost, že vybereme zmetek $\vartheta = \frac{5}{50} = 0,1$, z toho poznáme, že se jedná o binomické rozdělení, kde $n = 3$ a zapíšeme $X \sim Bi(n, \vartheta)$ tedy $X \sim Bi(3; 0,1)$.

b) Pravděpodobnostní funkci určíme ze vzorce známého pro toto rozdělení pravděpodobnosti:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x} = \binom{3}{x}\cdot 0,1^x \cdot 0,9^{3-x} & \text{pro} \quad x = 0,1,2,3; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

c) Charakteristiky náhodné veličiny X určíme ze vzorců:

$$E(X) = n\vartheta = 3 \cdot 0,1 = 0,3$$
$$D(X) = n\vartheta(1-\vartheta) = 3 \cdot 0,1(1-0,1) = 0,27$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,27} \doteq 0,52$$

d) Pravděpodobnost vypočítáme přímo z pravděpodobnostní funkce:

$$P(1 < X \leq 3) = p(2) + p(3) = 0,027 + 0,001 = 0,028$$

□

Příklad 3:

Společnost si nechala testovat dobu (v minutách) vyřešení požadavku zákazníka přes svou infolinku. Náhodně byly vybrány tři hovory (X, Y, Z). X, Y, Z jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením, které má parametry postupně $\lambda_X = 0,1$, $\lambda_Y = 0,2$ a $\lambda_Z = 0,3$.

a) Odvoďte distribuční funkci náhodné veličiny X.

b) Pomocí odvozené distribuční funkce náhodné veličiny X určete, s jakou pravděpodobností trvala délka hovoru více než 3 minuty.

c) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

d) S jakou pravděpodobností bude pro všechny tři hovory zároveň platit, že první hovor bude trvat více než 3 minuty, druhý hovor nebude dlouhý ani minutu a třetí bude trvat v intervalu od minuty a půl do dvou minut?

Řešení:

a) Ze zadání víme, že jde o exponenciální rozdělení ($X \sim Ex(\lambda)$), známe parametr $\lambda = 0,1$, takže můžeme do funkce hustoty pro toto rozdělení parametr dosadit:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = 0,1e^{-0,1x} & \text{pro} \quad x > 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní z funkce hustoty odvodíme distribuční funkci. To uděláme tak, že funkci hustoty integrujeme:

$$F_X(x) = \int_0^x 0,1e^{-0,1t}\mathrm{d}t = 0,1\left[\frac{e^{-0,1t}}{-0,1}\right]_0^x = -e^{-0,1x} + 1$$

Předpis distribuční funkce pro náhodnou veličinu X tedy vypadá následovně:

$$F_X(x) = \begin{cases} -e^{-0,1x} + 1 & \text{pro} \quad x > 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) Pomocí jedné z vlastností distribuční funkce počítáme:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (-e^{-0,1\cdot 3} + 1) = e^{-0,3} \doteq 74\,\%$$

c) Obojí určíme pomocí známého vzorce:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,1} = 10$$
$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0,1^2} = 100$$

d) Zde použijeme stejnou logiku jako v bodě b) (plus další vlastnosti distribuční funkce), jen budeme požadovat, aby podmínky pro všechny tři hovory platily zároveň (připomeňme,že náhodné veličiny X, Y, Z jsou stochasticky nezávislé):

$$\begin{aligned} P[X > 3 \wedge Y \leq 1 \wedge (1,5 < Z < 2)] &= [1 - F_X(3)] \cdot F_Y(1) \cdot [F_Z(2) - F_Z(1,5)] \\ &= [1 - (-e^{-0,1\cdot 3} + 1)] \cdot (-e^{-0,2\cdot 1} + 1)\cdot \\ &\quad \cdot [-e^{-0,3\cdot 2} + 1 - (-e^{-0,3\cdot 1,5} + 1)] \\ &= e^{-0,3} \cdot (1 - e^{-0,2}) \cdot (-e^{-0,6} + e^{-0,45}) \doteq 1\,\% \end{aligned}$$

□

1.8.2 Neřešené příklady

1. Házíme jedenkrát kostkou. Najděte pravděpodobnostní funkci a rozdělení náhodné veličiny X, která udává, jestli v daném hodu padlo číslo menší než 3.

2. V pytlíku máme tři kuličky černé barvy a jednu bílé barvy. Taháme jednu kuličku. Určete pravděpodobnostní funkci a rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která značí vytažení bílé kuličky.

3. Do supermarketu byla přivezena paleta s jogurty, na které bylo 50 plat jogurtů (každé plato obsahovalo 20 jogurtů). Skladník měl za úkol zkontrolovat, zda jsou plata a jogurty v pořádku. Každému platu dal známku od 1 do 3 podle stavu plata (1 – v pořádku, 2 – natržený papír, ale jogurty v pořádku, 3 – prasklý nějaký jogurt), každá z těchto tří událostí nastane se stejnou pravděpodobností. Náhodná veličina X_i ($i = 1, \ldots, 50$) udává, zda bylo i–té plato v pořádku (tedy se známkou 1).
   (a) Určete rozdělení náhodné veličiny X_i a dosaďte parametry.
   (b) Určete rozptyl a střední hodnotu náhodné veličiny X_i.
   (c) Náhodná veličina X udává celkový počet plat, která byla v pořádku. Uveďte vztah mezi náhodnými veličinami X a X_i. Určete rozdělení náhodné veličiny X a dosaďte parametry.
4. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 8 dětmi jsou:
   (a) právě 3 dívky
   (b) více než 2 dívky
   (c) méně než 3 dívky
5. Student angličtiny se připravuje na test. Procvičuje si slovíčka na internetové stránce, která mu jich vždy vygeneruje 40 z dané oblasti a z toho musí mít alespoň 24 dobře, aby následným testem prošel. Celkem si student (postupně) spustí 20 testů. Náhodná veličina X udává počet úspěšně napsaných testů.
   (a) Jaké rozdělení pravděpodobnosti má náhodná veličina X?
   (b) Dosaďte parametr(y), pokud víte, že rozptyl náhodné veličiny X je 3,2 (pro upřesnění: střední hodnota je větší než 5).
   (c) Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.
6. Odběratel si objednal 20 pytlů štěrku. Pravděpodobnost poškození jednoho pytle je 0,23. Určete, s jakou pravděpodobností bude právě 8 pytlů poškozených.
7. Z každé stokusové zásilky kontroluje odběratel kvalitu 5 náhodně vybraných kusů. Každá zásilka obsahuje 10 zmetků.
   (a) Jakým typem rozdělení pravděpodobnosti se řídí počet zjištěných zmetků?
   (b) Vypočtěte pravděpodobnost zjištění právě 4 zmetků.

(c) Jaká je pravděpodobnost zjištění nejvýše 2 zmetků?

(d) Jaká je pravděpodobnost zjištění alespoň 2 zmetků?

(e) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl množství zjištěných zmetků.

8. V produkčním oddělení firmy bylo v sérii 3 000 výrobků zjištěno 2 700 nepoškozených výrobků. Kontrolní oddělení odběratele náhodně vybralo 20 vzorků a ty otestovalo. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodném výběru budou:

   (a) právě dva poškozené výrobky,

   (b) alespoň dva poškozené výrobky,

   (c) nejvýše dva poškozené výrobky,

   (d) více než dva poškozené výrobky a zároveň méně než 6 poškozených výrobků,

   (e) žádný poškozený výrobek?

9. Karel střílí na terč. Jeho umění je takové, že se do terče trefí s pravděpodobností 10 %.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že se při 5 pokusech trefí nejvýše jednou?

   (b) Jaká je pravděpodobnost, že se do terče trefí při 5. výstřelu?

10. Cukrářka vyrábí dort. Ovšem dort musí být bez jediné chyby, nesmí se srazit ani trochu spálit těsto, poleva musí být tak akorát tuhá. Cukrářka dělá tolik dortů, dokud se jí nepovede jeden na 100 %, tím danou zakázku dodělá. Náhodná veličina X udává počet dortů, které cukrářka pokazila předtím, než se jí jeden povedl bez chyby.

    (a) Určete rozdělení náhodné veličiny X a dosaďte parametr(y), pokud známe rozptyl, který je roven 0,3125.

    (b) Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

11. Ve firmě je známé, že na výběrové řízení na určitou pozici se dostaví uchazeč s vysokoškolským vzděláním s pravděpodobností 0,65, a uchazeč bez vysokoškolského vzdělání s pravděpodobností 0,35. Určete pravděpodobnost, že až čtvrtý uchazeč o danou pozici bude mít vysokoškolské vzdělání.

12. Tři mafiáni hrají ruskou ruletu. Bubínkový revolver má 7 komor, šest z nich je prázdných, v jedné je náboj. První mafián zatočí bubínkem a stiskne spoušť. Když revolver nevystřelí, pokračuje druhý, po něm třetí a znovu od prvního.

    (a) Jaká je pravděpodobnost, že prvním zastřeleným bude druhý mafián a to ve třetím kole ruské rulety?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že hra bude trvat déle než pět kol?

13. Dispečink taxislužby registruje požadavky klientů, které přicházejí v náhodných časových okamžicích. Dlouhodobým pozorováním se zjistilo, že průměrná četnost požadavků v průběhu intervalu 20 minut je 2.

    (a) Jakým typem rozdělení pravděpodobnosti se řídí počet požadavků?
    (b) Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl počtu požadavků za časový interval jedné hodiny.
    (c) Vypočtěte pravděpodobnost, že během časového intervalu jedné hodiny taxislužba zaregistruje alespoň 3 požadavky na své služby.

14. Do restaurace přijde „průměrně“ 20 lidí za hodinu. Určete pravděpodobnost toho, že

    (a) v průběhu 5 minut přijdou alespoň 2 lidé,
    (b) v průběhu 15 minut nepřijde nikdo,
    (c) v průběhu 5 minut nepřijde nikdo,
    (d) v průběhu hodiny přijde právě 20 lidí,
    (e) v průběhu hodiny přijde právě 15 lidí.

15. Ve sbírce příkladů se vyskytuje „průměrně“ 1 chyba na 5 stránek. Určete pravděpodobnost, že

    (a) na stránce, kterou si zrovna prohlížíme, je právě jedna chyba,
    (b) na stránce, kterou si zrovna prohlížíme, je aspoň jedna chyba,
    (c) na stránce, kterou si zrovna prohlížíme, je více než jedna chyba,
    (d) jaký je očekávaný (střední) počet chyb na deseti stránkách a jaká je pravděpodobnost, že na deseti stránkách se vyskytne právě tento počet chyb.

16. V dílně vyrobili 5000 výrobků. Pravděpodobnost, že výrobek nesplňuje podmínky normy, je 0,006. Vypočítejte pravděpodobnost, že podmínky normy nesplňuje:

    (a) právě 20 výrobků,
    (b) nejvýše 20 výrobků.
    (c) Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

17. Na křižovatce zastaví během hodiny průměrně 15 aut. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut zastaví na křižovatce

(a) právě 1 auto,

(b) alespoň 2 auta,

(c) alespoň 2 a nejvýše 5 aut.

Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X a jeho parametr(y).

18. Tramvajová linka č. 1 odjíždí ve všedních dnech ze zastávky každých 5 minut. Adam nezná jízdní řád a přijde na zastávku, kde čeká, než tramvaj pojede. Náhodná veličina X udává dobu čekání na tramvaj v minutách. Určete:

    (a) rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X a jeho parametr(y),

    (b) funkci hustoty $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X,

    (c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X,

    (d) S jakou pravděpodobností bude Adam na zastávce čekat více než 4 minuty?

19. Na prohlídce výstavy je promítán doprovodný film o životě autora vystavovaných děl. Jeho projekce začíná každých 20 minut. Určete pravděpodobnost, že pokud náhodně přijdete do promítacího sálu

    (a) nebudete čekat víc než 5 minut,

    (b) budete čekat mezi 5 a 10 minutami,

    (c) střední hodnotu a směrodatnou odchylku.

20. Při telefonování uplyne mezi vytočením poslední číslice volaného čísla a spojením hovoru určitá doba, kterou můžeme považovat za náhodnou veličinu s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 3, 53 \rangle$ vteřin. Vypočítejte pravděpodobnost, že

    (a) na spojení se bude čekat aspoň 20 vteřin,

    (b) na spojení se bude čekat v intervale $\langle 10, 30 \rangle$.

    (c) Vypočítejte střední dobu čekání.

21. K přerušení optického kabelu v délce 500 m může dojít v libovolně vzdálenosti od jeho počátku, přičemž pravděpodobnost náhodného jevu, že dojde k přerušení v nějakém úseku je přímo úměrná délce úseku a nezávisí na jeho poloze. Určete:

    (a) rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X vyjadřující vzdálenost místa přerušení od počátku,

(b) hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny,

(c) střední hodnotu a rozptyl,

(d) pravděpodobnost, že k přerušení kabelu dojde v úseku od 300 m do 400 m.

22. V cestovní kanceláři se denní počet požadavků na zrušení letenky (náhodná veličina X) pohybuje v rozmezí 1 až 12 se stejnou pravděpodobností.

    (a) Napište definiční vztah pro rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

    (b) Nalezněte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

    (c) Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu jednoho dne zaznamená cestovní kancelář právě 6 požadavků na zrušení letenky?

    (d) S jakou pravděpodobností bude během jednoho dne zaznamenáno více než 10 požadavků?

23. V ruletě může padnout 0 až 36 (náhodná veličina X). Hráč vsadil na lichá čísla, na první tucet čísel a na čísla končící číslicí 2.

    (a) Jaké rozdělení má náhodná veličina X? Určete její střední hodnotu a rozptyl.

    (b) S jakou pravděpodobností vyhraje všechny 3 sázky?

    (c) S jakou pravděpodobností vyhraje aspoň jednu z těchto 3 sázek?

24. Délka cesty [km], kterou auto ujede až do první poruchy, je náhodnou veličinou X s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti a střední hodnotou 5000 km. Určete:

    (a) distribuční funkci náhodné veličiny X,

    (b) pravděpodobnost toho, že se auto pokazí dříve, než ujede 5 000 km,

    (c) pravděpodobnost toho, že auto ujede bez poruchy více než $x = 6000, 7000, 8000, 9000, 10000$ km.

25. Průměrná doba čekání v řadě na oběd je ve školní jídelně 5 minut. Určete:

    (a) pravděpodobnost, že na oběd budete čekat více než 10 minut,

    (b) funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X,

    (c) distribuční funkci náhodné veličiny X,

    (d) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

26. Střední doba bezporuchové práce dvou zařízení pracujících nezávisle s exponenciálním rozdělením je 750 a 800 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že obě vydrží pracovat déle než 1000 hodin?

27. Náhodná proměnná X představuje délku dráhy v km, kterou ujede auto do okamžiku první poruchy. Střední hodnota délky dojezdu je 1500 km.

    (a) Vypočítejte pravděpodobnost, že auto do první poruchy ujede aspoň 3000 km.

    (b) Určete rozptyl náhodné veličiny X.

    (c) Určete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti a distribuční funkci náhodné veličiny X.

28. Výrobní zařízení má poruchu v průměru jednou za 450 hodin. Doba bezporuchového chodu má exponenciální rozdělení. Vypočítejte:

    (a) pravděpodobnost toho, že doba bezporuchového chodu bude kratší než 600 hodin,

    (b) takovou hodnotu t, že pravděpodobnost toho, že doba bezporuchového chodu bude delší než t hodin, je 0,95.

29. Doba obsluhy zákazníka má exponenciální rozdělení se směrodatnou odchylkou 5 minut.

    (a) Vypočítejte pravděpodobnost toho, že zákazník bude obsloužený do $t = 4, 8, 12$ minut.

30. Nápojový automat je seřízen tak, že plní kelímky po 200 ml požadovaného nápoje s odchylkou 15 ml. Náhodná veličina X udává množství nápoje v kelímku.

    (a) Jaké rozdělení má náhodná veličina X? Určete její střední hodnotu a rozptyl.

    (b) Kolik procent kelímků bude obsahovat více než 224 ml nápoje?

    (c) Kolik procent kelímků bude obsahovat 191-209 ml nápoje?

    (d) Kolik z tisíce kelímků přeteče, budou-li používány kelímky o objemu 230 ml?

    (e) Jaké maximální množství nápoje bude kelímek obsahovat s 10 procentní pravděpodobností?

31. Pravděpodobnost vyrobení zmetku na automatické lince je 0,1. Vyrobením zmetku se linka zastaví. Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu výrobků do zastavení linky?

32. Nechť je X náhodná veličina označující životnost žárovky typu W60. Ze zkušenosti víme, že se životnost žárovky typu W60 řídí exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 0,01$. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

33. Uchazeč o pracovní pozici se připravuje na test pomocí dostupných testů. Postupně si celkem pustí dvacet testů. Náhodná veličina X udává počet úspěšně složených testů. O náhodné veličině X víme, že se řídí binomických rozdělením s rozptylem 3,2. Určete střední hodnotu náhodné veličiny X. Předpokládejte, že $E(X) > 8$.

34. Jiný uchazeč o pracovní pozici z předchozího příkladu zvolil strategii odlišnou. Není spokojen dokud nezíská plný počet bodů, do té doby testy stále opakuje. Náhodná veličina Y udává počet testů, které uchazeč napsal předtím než dosáhl kýženého výsledku. Určete rozptyl náhodné veličiny Y, pokud víte, že střední hodnota E(Y) je rovna 0,25.

1.9 Aplikace centrální limitní věty při zvolení vybraných rozdělení.

1.9.1 Řešené příklady

Připomeňme si nejprve**centrální limitní větu**, která bude klíčová při úvahách v nadcházejících příkladech. Uvažujme nekonečnou posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$, které jsou stochasticky nezávislé, pochází ze stejného rozdělení a mají stejnou konečnou střední hodnotu μ a stejný konečný rozptyl σ^2. Dále $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ je součet n náhodných veličin z uvažované posloupnosti. Potom distribuční funkce nové náhodné veličiny

$$U_n = \frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

se s rostoucím n blíží k distribuční funkci normálního standardizovaného rozdělení. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$ a říkáme, že náhodná veličina U_n má **asymptoticky** normální standardizované rozdělení.

Příklad 1:

Pravděpodobnost, že při výrobním procesu bude na balícím stroji vadně zabalen výrobek, je rovna 0,02. Jaká je pravděpodobnost, že z 500 zabalených výrobků bude počet vadně zabalených (náhodná veličina V) mezi 10 až 20?

Řešení:

Ze zadání víme, že $V \sim Bi(500; 0,02)$. Označme V_i náhodonou veličinu udávající, zda je výrobek vadný či nikoliv (náhodná veličina $V_i \sim A(0,02)$). Pak si náhodnou veličinu V můžeme přepsat do tvaru $V = \sum_{i=1}^{500} V_i$, tedy náhodná veličina V splňuje požadavky pro použití centrální limitní věty.

Formálně lze naši úlohu zapsat následujícím způsobem

$$P(10 \leq V \leq 20),$$

což lze pomocí binomického rozdělení přesně vypočítat jako

$$P(10 \leq V \leq 20) = \sum_{i=10}^{20} \binom{500}{i} 0,02^i 0,98^{500-i} = 0,541928.$$

Mezi 500 zabalenými výrobky bude počet vadně zabalených výrobků mezi 10 a 20 s pravděpodobností **přesně** 54,1928%. Jelikož je tento výpočet na růční konstrukci poměrně zdlouhavý pokusíme se aproximovat binomické rozdělení normálním rozdělením a odhadnout hledanou pravděpodobnost výpočetně rychlejším způsobem. Abychom mohli aproximovat binomické rozdělení normálním rozdělením musíme ověřit podmínky dobré aproximace $np(1-p) > 9$ a $1/(n+1) < p < n/(n+1)$ („chceme ověřit, že ve zvoleném případě se binomické rozdělení dostečně blíží normálnímu rozdělení a aproximovavá pravděpodobnost se nebude od přesné pravděpodobnosti příliš lišit“). V našem případě $500 \cdot 0,02 \cdot 0,98 = 9,8 > 9$ a $0,0019 < 0,02 < 0,998$. Je zřejmé, že jsou podmínky dobré aproximace splněny a my můžeme s aproximací pokračovat. Dále budeme aproximovanou pravděpodobnost počítat, tak „jako by měla náhodná veličina V normální rozdělení, tedy $V \sim N(E(V), D(V))$“. Chceme vypočítat $P(10 \leq V \leq 20)$, proto nejprve náhodnou veličinu V standardizujeme s využitím vzorce $U = \frac{V-E(V)}{\sqrt{D(V)}}$, kde $E(V) = np = 500 \cdot 0,02 = 10$ a $D(V) = n(p-1)p = 500 \cdot 0,02 \cdot 0,98$. Pro náš případ aplikujeme následovně

$$P(10 \leq V \leq 20) = P(\frac{10-10}{\sqrt{9,8}} \leq \frac{V-E(V)}{\sqrt{D(V)}} \leq \frac{20-10}{\sqrt{9,8}}) = P(0 \leq U \leq 3,19).$$

Jelikož se transformovaná náhodná veličina U řídí rozdělením N(0,1) lze výše zmíněný výraz vyjádřit pomocí hodnot distribuční funkce normálního rozdělení, které jsou tabelovány v tabulkách

$$P(0 \leq U \leq 3,19) = \Phi(3,19) - \Phi(0) = 0,9993 - 0,5 = 0,4993.$$

Mezi 500 zabalenými výrobky bude počet vadně zabalených výrobků mezi 10 a 20 s pravděpodobností **přibližně** 49,93%.

□

Příklad 2:

Počet chyb na straně textu je náhodná vel. X_i se střední hodnotou 6 a směrodatnou odchylkou 2.

a) Jaká je pravděpodobnost, že na 100 stranách textu bude méně než 550 chyb?

b) Jakou hodnotu x nepřekročí náhodná veličina X udávající počet chyb na 100 stranách textu s pravděpodobností 0,9?

Řešení:

a) Jaká je pravděpodobnost, že na 100 stranách textu bude méně než 550 chyb?
Máme zadány náhodné veličiny X_i se středními hodnotami $E(X_i) = 6$ a rozptyly $D(X_i) = 4$. Onačme X náhodnou veličinu udávající počet chyb na 100 stranách textu. Náhodnou veličinu

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

můžeme díky dostatečně velkému n aproximovat normálním rozdělením se střední hodnotou $E(X) = n\mu = 600$ a rozptylem $D(X) = n\sigma^2 = 400$. Hledanou pravděpodobnost vypočítáme následovně:

$$P(X < 550) = P(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} < \frac{550 - 600}{\sqrt{400}}) = P(U < -2,5) =$$
$$= \phi(-2,5) = 1 - \phi(2,5) = 0,0062$$

Na 100 stranách textu bude méně než 550 chyb s pravděpodobností přibližně 0,0062.

b) Jakou hodnotu x nepřekročí náhodná veličina X udávající počet chyb na 100 stranách textu s pravděpodobností 0,9?

V tomto případě známe pravděpodobnost a hledáme realizaci x:

$$P(X \leq x) = 0,9$$
$$P(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \leq \frac{x - 600}{\sqrt{400}}) = 0,9$$
$$P(U \leq \frac{x - 600}{20}) = \phi(u) = 0,9$$

Nyní si v tabulkách pro standardizované normální rozdělení vyhledáme, pro jaké u je hodnota distribuční funkce rovna 0,9. Odpovídá tomu hodnota 1,28.

$$\phi(\frac{x - 600}{20}) = \phi(1,28) = 0,9$$

$$\frac{x-600}{20} = 1,28$$
$$x = 625,6$$

S pravděpodobností přibližně 0,9 bude tedy počet chyb na 100 stranách menší než 626.

□

Příklad 3:

Náhodná veličina X udává dobu životnosti výrobku a má rozdělení $Ex(\lambda)$. Rozdělení průměrné doby životnosti

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

budeme aproximovat rozdělením $N(E(M), D(M)) = N(E(X), \frac{D(X)}{n}) = N(\lambda, \frac{\lambda^2}{n})$. Jaká je pravděpodobnost, že průměrná doba životnosti šestnácti výrobků bude delší než 100 hodin, když $\lambda = 70$ (tj. střední hodnota životnosti jednoho výrobku je 70)?

Řešení:

$$P(M > 100) = 1 - P(M < 100) = 1 - P\left(\frac{M - E(M)}{\sqrt{D(M)}}\right) = 1 - P\left(U < \frac{100-70}{\sqrt{\frac{70^2}{16}}}\right) =$$

$$= 1 - P(U < 1{,}714) = 1 - \phi(1{,}714) = 0,043$$

Zjistili jsme, že průměrná doba životnosti bude delší než 100 hodin s pravděpodobností přibližně 0,043.

□

1.9.2 Neřešené příklady

1. Dlouhodobým průzkumem bylo zjištěno, že doba potřebná k objevení a odstranění poruchy stroje má střední hodnotu 36 minut a směrodatnou odchylku 30 minut. Jaká je přibližná pravděpodobnost, že doba potřebná k objevení a opravení 100 poruch nepřekročí 60 hodin?
2. Pravděpodobnost, že počítač typu T500 bude reklamován, je 0,05. Jaká je přibližná pravděpodobnost, že z 300 nakoupených počítačů jich bude reklamováno nejvýše 20?

3. V osudí je 16 bílých a 14 černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že při 150 tazích jedné koule (s vracením) vytáhneme:

   (a) bílou právě 77x?

   (b) bílou více než 77x (pravděpodobnost pouze odhadněte)?

4. Vedení firmy zaměstnávající hodinové manžely dlouhodobým pozorováním zjistilo, že střední hodnota doby, kterou stráví jejich zaměstnanci v domácnosti zákazníka, je 40 minut a směrodatná odchylka je 30 minut. Jakou maximální dobu stráví hodinoví manželé u 100 zákazníků s pravděpodobností 0,95?

5. Před volbami je v populaci státu 52 % příznivců koaličních stran. Jaká je přibližná pravděpodobnost, že průzkum veřejnosti rozsahu $n = 1500$ ukáže nesprávně převahu opozice?

6. Pravděpodobnost zásahu cíle při jednom výstřelu je 0,8. Odhadněte jaká je pravděpodobnost, že se počet zásahů při 200 výstřelech nebude lišit od střední hodnoty počtu zásahů o více než 10 zásahů?

7. Na telefonní ústřednu je napojeno 3000 účastníků. Každý z nich bude volat telefonní ústřednu během hodiny s pravděpodobností 10 %. Jak je přibližná pravděpodobnost, že během následující hodiny zavolá ústřednu:

   (a) právě 300 účastníků?

   (b) více než 310 účastníků?

   (c) mezi 200 a 450 účastníky(včetně)?

8. Pravděpodobnost, že určitý typ výrobku má výrobní vadu, je 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že ze série 1000 výrobků bude mít výrobní vadu nejvýše 70 výrobků?

9. Víme, že v New Yorku je 80 % domácností vybaveno internetem. Náhodně vybereme 900 domácností. Jaký bude maximalní počet vybraných domácností, které mají internet a to s pravděpodobností přibližně 0,95?

10. Majitelka brněnské kavárny Day cafe odhadla, že 15 % zakazníků si kupuje kapučíno. Ve středu navštívilo kavárnu 375 zákazníků.

    (a) Určete rozdělení náhodné veličiny X, která udává počet prodaných kapučín.

    (b) Odhadněte, jaká je pravděpodobnost, že bylo prodáno více než 65 kapučín?

11. Dodávka převáží 5000 plat s vejci. Náhodná veličina X_i udává počet rozbitých vajec na paletě. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že střední hodnota počtu rozbitých vajec v platu je 5 a rozptyl 2.

    (a) Pomocí náhodných veličin X_i vyjádřete náhodnou veličinu X udávající celkový počet rozbitých vajec v dodávce a formálně zapište.

    (b) Identifikujte rozdělení náhodné veličiny X a určete její střední hodnotu a rozptyl.

    (c) Odhadněte pravděpodobnost, že počet rozbitých vajec v dodávce je nejvýše 24900.

    (d) Odhadněte pravděpodobnost, že počet rozbitých vajec v dodávce je nejméně 24900 a nejvýše 25100.

12. Reprodukční stanice sleduje úspěšnost umělého oplodnění u 450 jedinců. Náhodná veličina X_i udává, zda bylo oplodnění neuspěšné. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že úspěšné oplodnění je dvakrát pravděpodobnější než neúspěné.

    (a) Určete rozdělení náhodné veličiny X_i.

    (b) Proveďte transformaci, tak že vytvoříte náhodnou veličinu X udávající celkový počet neúspěšných oplodnění.

    (c) Identifikujte rozdělení náhodné veličiny X a určete její střední hodnotu a rozptyl.

    (d) Odhadněte pomocí CLV pravděpodobnost, že počet neúspěšných oplodnění v pozorování je nejméně 165. Ověřte podmínky konvergence.

13. Pšenice se na trhu prodává v pytlích. Váha každého pytle má logaritmicko-normální rozdělení se střední hodnotou 100 Kg a rozptylem 2,5 Kg. Jaká je přibližná pravděpodobnost, že celková váha 40 pytlů s pšenicí, bude menší než 4100 kg?

14. Zkoušející se rozhoduje o nastavení náročnosti testu. Test se skládá ze 100 otázek, přičemž každá z otázek má 3 možné odpovědi, z nichž pouze jedna je správná. Náhodná veličina X_i udává, zda student správně odpověděl na i-tou otázku, pokud tipoval.

    (a) Určete rozdělení náhodné veličiny X_i a stanovte její střední hodnotu a rozptyl.

    (b) Náhodná veličina X udává celkový počet správně zodpovězených otázek. Určete jakým rozdělením se náhodná veličina X řídí a stanovte její střední hodnotu a rozptyl.

    (c) Rozhodněte o možnosti aproximovat rozdělení náhodné veličiny X normálním rozdělením.

    (d) Student zkoušku složí v případě, že správně odpoví minimálně na 10 otázek. Jaká je přibližně pravděpodobnost, že náhodně vybraný nepřipravený student zkoušku složí?

(e) Vyučující dostane z vedení příkaz, aby prošlo pouze pět procent nepřipravených studentů. Kolik správných odpovědí bude nyní vyžadovat, tak aby nepřipravený student zkoušku složil?

15. Databáze banky obsahuje 500 účtů. Jejich střední hodnota je 7500 Kč a směrodatná odchylka 2800 Kč.

    (a) Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka výběrového průměru, jestliže rozsah výběrového souboru je 50 účtů?

    (b) S jakou pravděpodobností bude hodnota výběrového průměru větší než 8000 Kč?

16. Střední hodnota denního platu zaměstnanců jedné velké nadnárodní společnosti je 1200 Kč, směrodatná odchylka je 200 Kč. Odhadněte jaká je pravděpodobnost, že když vybereme náhodně 64 zaměstnanců a z jejich platů vypočítáme aritmetický průměr, dostaneme průměrnou hodnotu, která je větší, než 1250 Kč denně?

17. Pravděpodobnost zásahu letícího cíle střelcem je 0,95. Jaká je přibližná pravděpodobnost, že počet zásahů ve 100 pokusech bude alespoň 97?

18. Počet tiskových chyb na straně textu je náhodná veličina se střední hodnotou 8 a směrodatnou odchylkou 2. Jaká je pravděpodobnost, že na 100 stránkách bude méně než 750 chyb?

19. Stokrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet dosažených ok bude mezi 320 a 380?.

20. Adam cestuje do práce a z práce tramvají, která jezdí v intervalu 5min., příchod Adama na zastávku je vzhledem k odjezdu tramvaje zcela náhodný. Odhadněte, s jakou pravdepodobností pročeká Adam během 20 pracovních dní méně než 120 min.?

21. Dvěstěkrát hodíme mincí. Odhadněte, jaká je pravděpodobnost, že podíl lícu bude vetší než 0,55?

22. Počet vyrobených hraček jedním zaměstnancem za směnu je náhodná veličina X_i se střední hodnotou 50 a směrodatnou odchylkou 6. Jaký je maximální počet hraček, které za svou směnu dokáže vyrobit 20 zaměstnanců firmy s pravděpodobností 0,9?

23. Maruška po 50 dní každý den ráno sbírá z obřího kurníku slepičí vajíčka do košíku a nosí je do komory. Často se jí cestou nebo při sběru nějaké rozbije. Náhodná veličina X_i (i = 1, …, 50) udává počet rozbitých vajíček v košíku za den. Z minulých let vypozorovala, že střední hodnota počtu rozbitých vajíček za den je $E(X_i) = 5$ a rozptyl $D(X_i) = 2$.

(a) Náhodná veličina X určuje celkový počet rozbitých vajíček za 50 dní. Uveďte vztah mezi X a X_i.

(b) Jaké rozdělení má náhodná veličina X? Určete její střední hodnotu a rozptyl.

(c) S jakou pravděpodobností se Marušce za daných 50 dní rozbilo nejvýše 240 vajíček?

(d) S jakou pravděpodobností se Marušce za daných 50 dní rozbilo více než 260 vajíček?

24. Při vkládání EET účtenek do losovací soutěže dojde s pravděpodobností 5 % k výhře.

(a) Kolem jaké střední hodnoty bude kolísat počet výher při vložení 500 účtenek?

(b) Odhadněte interval, v němž se bude pohybovat počet výher, při vložení 500 účtenek s pravděpodobností 99,9 %.

Řešení:

Literatura

[1] Blatná D. *Statistika a pravděpodobnost.* Praha: Bankovní institut vysoká škola, 2003. ISBN 80-7265-088-2.

[2] Budíková M. *Statistika a Pravděpodobnost.* Webová stránka. https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps15/statistika/web/pages/resene-priklady-prvni-kapitoly.html

[3] Budíková M., Lerch T. a Mikoláš Š. *Základní statistické metody.* Brno: Masarykova univerzita, 2005. ISBN 80-210-3886-1.

[4] Budíková M., Králová M. a Maroš B. *Průvodce základními statistickými metodami.* Praha: Grada, 2010. Expert. ISBN 978-80-247-3243-5.

[5] Budíková M., Mikoláš Š. a Osecký P. *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika: sbírka příkladů.* 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. ISBN 80-210-3313-4.

[6] Budíková M., Mikoláš Š. a Osecký P. *Popisná statistika.* . vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4246-9.

[7] Doudová L., Hampel D., Hrdličková Z., Michálek J., Pytelová H. a Sedláčik M., *Sbírka úloh z pravděpodobnosti a statistiky.* Masarykova univerzita, Brno. 2006. Dostupné z http://econ.muny.cz/data/BPM_STA1/BPM_STA1_Sbirka_prikladu_ze_STATISTIKY_I.pdf

[8] Friesl M., *Posbírané příklady z pravděpodobnosti a statistiky.* Západočeská univerzita v Plzni. 2004. Dostupné z http://home.zcu.cz/~friesl/Archiv/PosbPsa.pdf

[9] Hindls R., Hronová S. a Seger J. *Statistika pro ekonomy.* 8. vyd. Praha: Professional publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-43-6.

[10] Jána M., *Sbírka řešených úloh ze statistiky.* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Bakalářská práce. 2007.

[11] Jarošová M., *Limitní věty.* Webová stránka. Dostupné z http://homel.vsb.cz/~dom033/predmety/statistika/ucebni_text/9Lim_vety.pdf

[12] Koutková H. a Dlouhý O., *Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky.* 6. vydání., v nakladatelství CERM 3. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2017. ISBN 978-80-7204-961-5.

[13] Otipka P., *Náhodná veličina.* Webová stránka. https://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/KAP03/PRAV3.HTM

[14] Pavlík J., *Sbírka příkladů z aplikované statistiky.* Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, 2012. ISBN 978-80-7080-843-6.

[15] Petáková J., *Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, c1998. Učebnice pro střední školy.

[16] Ramik J. a WEISSGÄRBER A. *Statistika A.* Karviná: Slezská univerzita, 1994.

[17] Topalovic M., *Sbírka řešených příkladů z pravděpodobnosti a statistiky* Masarykova univerzita. Bakalářská práce. 2015.