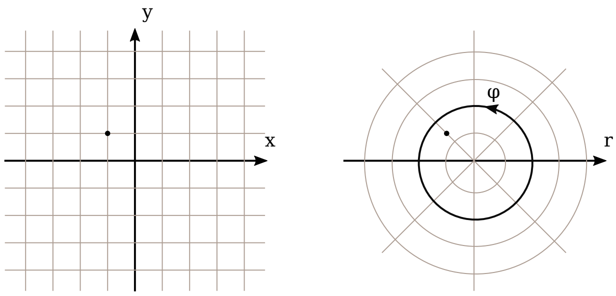
SPOJITÉ MODELY A STATISTIKA 2018

Doplnění k 1. cvičení

Poznámka. Šedý text je takový navíc, pro lepší pochopení.

Polární souřadnice. Každý bod v $\mathbb{R}^2$ (mimo $[0,0]$) můžeme jednoznačně vyjádřit pomocí vzdálenosti od bodu $[0,0]$ a úhlu svírajícího s kladnou poloosou x. To nám zadává transformaci souřadnic $[x,y] \mapsto [r,\varphi]$, která je bijektivní a spojitá pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$. Zpátky souřadnice transformujeme předpisem: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$.



Vyznačený bod na obrázku má kartézské souřadnice $[x,y] = [-1,1]$ a polární $[\sqrt{2}, 3\pi/4]$.

Limitu v bodě $[0,0]$ převedeme na limitu jedné proměnné r, přičemž $\varphi = \varphi(r)$ považujeme za libovolnou funkci proměnné r.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Pro limitu v jiném bodě $[x,y]$ bychom použili polární souřadnice se středem v bodě $[x,y]$. Aby (původní) limita existovala, tak samozřejmě potřebujeme, aby se hodnoty funkce ustalovaly pouze v závislosti na vzdálenosti od bodu. Pokud by nám limita vycházela různě při blížení se k bodu po různých křivkách $\varphi = \varphi(r)$, pak původní limita neexistuje.

Jestliže limita napravo vychází stejně pro libovolnou funkci $\varphi = \varphi(r)$, pak limita nalevo se jí rovná, jinak neexistuje. Především jestliže

- úpravami vypadne φ, pak limita existuje (vlastní nebo nevl.) a obě limity se rovnají;
- úpravami vypadne r a φ zůstane, pak limita neexistuje.

Spojitost funkce. Funkce je v daném bodě spojitá, jestliže se limita funkce v tom bodě rovná její funkční hodnotě, neboli

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Především tedy funkce není spojitá v bodech, kde není definována. Zde je dobré si uvědomit, že při počítání limity funkce se díváme na funkční hodnoty bodů v ryzím okolí, tedy funkční hodnota bodu, ve kterém hledáme limitu, nás nezajímá. Když počítáme limitu tím, že „zkusíme dosadit“, tak využíváme toho, že běžné funkce (sčítání, násobení, goniometrické fce atd.) jsou spojité všude, kde jsou definované. Jestliže máme funkci na nějakém bodě zvlášť dodefinovanou, pak je nutné ukázat rovnost limity a funkční hodnoty.