Př. Podvodník háže mincí, kde je pravděpodobnost padnutí orla 0,49. Pomocí tabulky normálního rozdělení odhadněte pravděpodobnost, že při 5100 hodech padne více orlů než pannen.

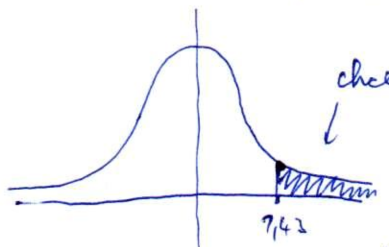
Řešení. $X \sim Bi(\overset{n}{5100}\,;\ \overset{p}{0{,}49}) \approx N(\overset{\mu}{51\cdot 49},\ \overset{\sigma^2}{51^2\cdot 49\cdot 0{,}01})$

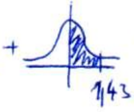
$$\mu = EX = n\cdot p = 5100\cdot 0{,}49 = 51\cdot 49$$
$$\sigma^2 = DX = n\cdot p\cdot(1-p) = 5100\cdot 0{,}49\cdot 0{,}51 = 51^2\cdot 49\cdot 0{,}01$$

X... udává kolikrát padne orel $\qquad Z = \dfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}$

Pravděpodobnost, že padne více orlů: $P\left(X > \frac{5100}{2}\right) = P\left(Z > \dfrac{\frac{5100}{2} - 51\cdot 49}{\sqrt{51^2\cdot 49\cdot 0{,}01}}\right) =$

$$= P\left(Z > \frac{\cancel{51}\cdot 50 - \cancel{51}\cdot 49}{\cancel{51}\cdot 7\cdot 0{,}1}\right) = P\left(Z > \frac{10}{7}\right) \doteq P(Z > 1{,}43) = \underline{\underline{0{,}0764}}$$



$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \right.$  $\left.\right)$

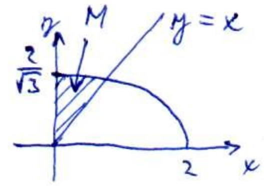
$10 : 7 = 1{,}428\ldots \doteq 1{,}43$

30
20
60
4

$\overset{\text{dle tabulky}}{=} 1 - \left(\frac{1}{2} + 0{,}4236\right) = 1 - 0{,}9236 = 0{,}0764$

Př. Určete těžiště části roviny ležící v 1. kvadrantu uvnitř elipsy $x^2 + 3y^2 = 4$ a nad přímkou $y = x$.

Řešení. $x^2 + 3y^2 = 4 \longrightarrow \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \longrightarrow$



nejprve elipsu roztáhneme na kruh (poloměru 2): $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \sqrt{3}\,y \rightarrow x = \bar{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y}$

jakobián je $\frac{1}{\sqrt{3}}$

pak převedeme do polárních souřadnic: $(x =)\ \bar{x} = r\cos\varphi$
$(\sqrt{3}y =)\ \bar{y} = r\sin\varphi$ $\qquad$ jakobián r

Tedy dohromady: $x = r\cos\varphi$
$y = \frac{1}{\sqrt{3}} r\sin\varphi$ $\qquad$ jakobián $\frac{1}{\sqrt{3}} r$

přímka $y = x$ má po transformaci tvar $\frac{1}{\sqrt{3}} r\sin\varphi = r\cos\varphi$, tedy $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, tedy $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Tedy $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
$r \in [0, 2]$.

obsah M: $S = \iint_M dx\,dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{3}} r \, dr\, d\varphi = \ldots \overset{(\text{snad})}{=} \frac{\pi}{3\cdot\sqrt{3}}$

jakobián

těžiště: $T_x = \frac{1}{S} \iint_M x \, dx\,dy = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^2 r\cos\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} r \, dr\,d\varphi = \ldots = \frac{8-4\sqrt{3}}{\pi}$

$T_y = \frac{1}{S} \iint_M y \, dx\,dy = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} r \, dr\,d\varphi = \ldots = \frac{4}{\sqrt{3}\pi}$

Doporučené příklady (řešené) na náhodný výběr z učebnice Matematika drsně a svižně:

9.74, 9.75, 9,78 na straně 569 a 570 (levý sloupec)

9,65 na straně 563

Př. Ze základního souboru s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 0{,}06$ jsme pořídili náhodný výběr s realizacemi 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu.

Řešení. Spočítáme výběrový průměr $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{7}(1{,}3+1{,}8+1{,}4+1{,}2+0{,}9+1{,}5+1{,}7)$

$= \frac{9{,}8}{7} = 1{,}4$

95% interval spolehlivosti pro μ dle vzorečku: $\left(M - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ M + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$95\,\% \Rightarrow 0{,}95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}05$

Máme tedy $\mu \in \left(1{,}4 - \sqrt{\frac{0{,}06}{7}} \cdot \overset{1{,}96}{u_{0{,}975}}\ ;\ 1{,}4 + \sqrt{\frac{0{,}06}{7}} \cdot \overset{1{,}96}{u_{0{,}975}}\right) \doteq \underline{(1{,}22\ ;\ 1{,}58)}$

Kvantil $u_{0{,}975}$ je takové číslo, pro které platí $P(Z \leq u_{0{,}975}) = 0{,}975$

tedy dle tabulky: $u_{0{,}975} = 1{,}96$.