Spojité modely a statistika 2018

Řešené příklady na diferenciální rovnice

Poznámka. Úpravy jsou psány zleva doprava, aby se ušetřilo místo (ze začátku budu psát šipky).

Poznámka. Když chceme vymyslet diferenciální rovnici tak, aby nějaká konkrétní křivka (zadaná implicitně) byla jejím řešením, můžeme využít implicitní derivaci. Např. vezmeme-li rovnici hyperboly

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{1}$$

a implicitně zderivujeme, dostaneme diferenciální rovnici

$$2x - 2yy' = 0.$$

To by ale bylo moc lehké, tak rovnici (vydělíme dvěma) roznásobíme proměnnou x (z obou stran) a využijeme rovnosti (1):

$$x^2 - xyy' = 0 \quad \to \quad 1 + y^2 - xyy' = 0$$

Příklad 1 (separace proměnných)**.** *Najděte obecné řešení rovnice*

$$1 + y^2 - xyy' = 0. \tag{2}$$

Řešení.

$$xyy' = 1 + y^2 \quad \to \quad xy' = \frac{1+y^2}{y} \quad \to \quad x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+y^2}{y} \quad \to \quad \int \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Na začátku jsme dělili y-nem, avšak dosazením do původní rovnice snadno zjistíme, že $y = 0$ není jejím řešením. Dále levou a pravou stranu spočítáme zvlášť.

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \left|\text{typ} \int \frac{f'}{f}\right| = \frac{1}{2}\ln|\underbrace{1+y^2}_{>0}| = \ln\sqrt{1+y^2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

Dohromady

$$\ln\sqrt{1+y^2} = \ln|x| + c \quad \to \quad \sqrt{1+y^2} = C|x|,\ (C > 0) \quad \to \quad 1 + y^2 = C^2x^2.$$

Tedy řešením je libovolná hyperbola tvaru[1]:

$$C^2x^2 - y^2 = 1.$$

Vidíme tedy, že (1) je opravdu řešením (2). △

[1] $C^2 \geq 0$, tedy stačí uvažovat $C > 0$

Příklad 2 (substituce)**.** *Najděte obecné řešení a řešení splňující $y(e) = 0$ rovnice*

$$xyy' = x^2 + y^2. \tag{3}$$

Řešení. Nejprve vydělíme x-em a y-nem, tedy další počty děláme za předpokladu $y \neq 0$. Dosazením do (3) dostaneme $x \cdot 0 \cdot 0 = x^2 + 0$ tedy $y = 0$ není řešením. Vydělením tedy dostaneme

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \to \quad y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \tag{4}$$

Můžeme tedy použít substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Úpravou a derivací obou stran (podle x) dostaneme vyjádření y' pomocí z:

$$z = \frac{y}{x} \quad \to \quad x \cdot z = y \quad \to \quad z + x \cdot z' = y'.$$

Provedeme substituci a separací proměnných dopočítáme:

$$z + xz' = \frac{1}{z} + z \quad \to \quad xz' = \frac{1}{z} \quad \to \quad \int z \,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

Zintegrujeme a po dosazení zpátky za z dostaneme obecné řešení.

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + c \quad \to \quad \frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x| + C \quad \to \quad y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R})$$

Řešení splňující $y(e) = 0$ určíme z obecného řešení:

$$0 = e^2 \ln e^2 + Ce^2 \quad \to \quad 0 = 2e^2 + Ce^2 \quad \to \quad C = -2,$$

tedy takovým řešením je $y^2 = 2x^2 \ln x^2 - 2x^2$. △

Příklad 3 (Zadaná substituce a lineární rovnice 1. řádu)**.** *Za pomoci substituce $z = \ln y$ vyřešte diferenciální rovnici*

$$y \ln y + yx = y'. \tag{5}$$

Řešení. Z důvodu výskytu ln v (5) zřejmě $y > 0$. Substituci

$$z(x) = \ln y(x) \quad \xrightarrow{\text{derivace dle } x} \quad z' = \frac{y'}{y}$$

použijeme na (5).

$$y \ln y + yx = y' \quad \to \quad \ln y + x = \frac{y'}{y} \quad \xrightarrow{\text{subst.}} \quad z + x = z'$$

Dostali jsme **lineární rovnici 1. řádu**:

$$z' - z = x. \tag{6}$$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici.

$$\text{H:}\quad z' - z = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z \qquad \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x \qquad \ln|z| = x + c$$

$$z_H = Ce^x \tag{7}$$

Řešení (6) hledáme ve tvaru (7) s variací konstanty.

$$z = C(x)e^x \quad \xrightarrow{der.} \quad z' = C'(x)e^x + C(x)e^x$$

Dosadíme do (6).

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = x \quad \rightarrow \quad C'(x) = x \cdot e^{-x}$$

$C(x)$ nalezneme jednoduše integrací podle x.

$$C(x) = \int x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + D$$

Dosazením za C do (7) získáme obecné řešení (6) a zpětnou substitucí $z = e^z$ dostaneme výsledné obecné řešení.

$$z = (-xe^{-x} - e^{-x} + D)e^x = -x - 1 + De^x \qquad y = e^z = e^{De^x - x - 1},\ D \in \mathbb{R} \qquad \triangle$$

Lineární rovnice s konstantními koeficienty jsou rovnice tvaru (pro konkrétnost vezměme rovnice 3. řádu)

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), \quad \text{kde } a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Řešíme je nalezením obecného řešení homogenní rovnice, nalezením partikulárního řešení a následným sečtením těchto řešení. Homogenní rovnici získáme položením $f(x) = 0$.

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{H}$$

Tuto rovnici řešíme nahrazením λ^i za $y^{(i)}$ a nalezením kořenů vzniklého polynomu

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{9}$$

Jestliže dostaneme tři různé kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a všechny jsou reálné, pak řešení (H) je tvaru

$$y_H = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + c_3e^{\lambda_3 x},$$

jsou-li však (např.) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ komplexně sdružené (a $\lambda_3 \in \mathbb{R}$), pak je řešení tvaru

$$y_H = c_1e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_3e^{\lambda_3 x}.$$

Při násobnosti kořenů přidáváme řešení odpovídající onomu kořenu vynásobené postupně vyššími mocninami x, např. pro trojnásobný kořen $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, máme

$$y_H = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_1 x} + c_3x^2e^{\lambda_1 x}.$$

Partikulární řešení hledáme podle tvaru $f(x)$.

1. Je-li $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}$, kde $P_k(x)$ je nějaký polynom k-tého řádu (pro $k = 0$ je to konstanta) v proměnné x a $\alpha \in R$ (nulu nevyjímaje), pak part. řešení rovnice (8) hledáme ve tvaru

$$y_P = R_k(x)e^{\alpha x},$$

kde $R_k(x)$ je opět polynom k-tého řádu, ale s neznámými koeficienty.

2. Je-li $f(x) = P_{k_1}(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) + Q_{k_2}(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, pak vezmeme $k = \max\{k_1, k_2\}$ a hledáme řešení ve tvaru

$$y_P = e^{\alpha x}\left(R_k(x)\sin(\beta x) + S_k(x)\cos(\beta x)\right),$$

kde $R_k(x), S_k(x)$ jsou polynomy k-tého řádu s neznámými koeficienty.

3. Je-li $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, kde $f_{1,2}(x)$ jsou nějakého z tvarů výše, pak partikulární řešení nalezneme jako součet zvlášť vyřešených partikulárních řešení pro $f(x) = f_1(x)$ a pro $f(x) = f_2(x)$.

Navíc je potřeba se podívat na kořeny (9): pokud je α, příp. $\alpha \pm \beta i$, m-násobným kořenem (9), pak je třeba hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y_P = x^{m+1}R_k(x)e^{\alpha x}, \quad \text{příp.} \quad y_P = x^{m+1}e^{\alpha x}\left(R_k(x)\sin(\beta x) + S_k(x)\cos(\beta x)\right).$$

Koeficienty polynomů v y_P poté určíme dosazením (obecného tvaru) y_P a jeho derivací do (8) a porovnáním koeficientů na levé a pravé straně (podobně jako u parciálních zlomků).

Příklad. *Pokud je $f(x) = x^2 + 1$ a (9) má dvojnásobný kořen $\lambda_1 = 0$, pak si uvědomme $f(x) = x^2 + 1 = (x^2 + 1)e^{0\cdot x}$, tedy partikulární řešení hledáme ve tvaru*

$$y_p = x^3(ax^2 + bx + c).$$

Příklad 4. *Viz příklad na Wikipedii (odkaz ve studijních materiálech).*