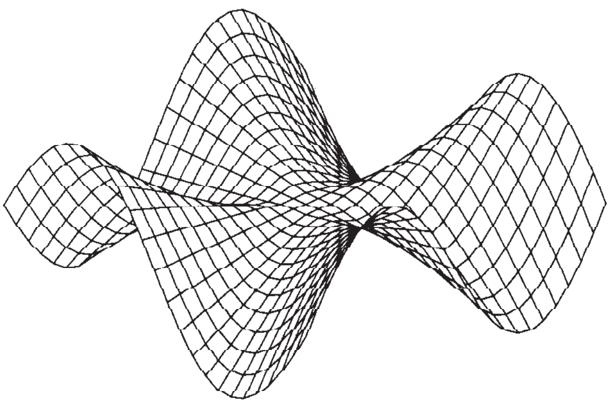
MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

ZUZANA DOŠLÁ
ONDŘEJ DOŠLÝ

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH



BRNO 2006 3. VYDÁNÍ

Kapitola 1

Pojem funkce více proměnných

Reálná funkce jedné reálné proměnné, stručně funkce jedné proměnné, je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Zobecněním tohoto pojmu je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 2$) do $\mathbb{R}$, které se nazývá funkce více proměnných.

Cílem této kapitoly je naučit se určovat pro funkci dvou a více proměnných její definiční obor a graf. Přestože tato kapitola jako jediná neobsahuje žádnou matematickou větu, je svým zaměřením na geometrii v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ fundamentální.

Definice 1.1. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqq 1$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných* a množina M se nazývá *definiční obor* této funkce a značí se $\mathscr{D}(f)$.

Z předchozí definice vyplývá, že po formální stránce funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je množina uspořádaných dvojic $[x, y] \in M \times \mathbb{R}$, $x = [x_1, \dots, x_n]$ (tj. relace na $M \times \mathbb{R}$), která má následující vlastnosti:

1. $x \in M$, $y \in \mathbb{R}$.
2. Ke každému bodu $x = [x_1, \dots, x_n] \in M$ existuje právě jedno číslo y (bod prostoru $\mathbb{R}$) tak, že $[x, y] \in f$.

Obraz bodu $x = [x_1, \dots, x_n] \in M$ v zobrazení f, tj. reálné číslo y takové, že $[x, y] \in f$, označujeme $f(x)$ nebo $f(x_1, \dots, x_n)$ a nazývá se *hodnota funkce f* nebo také *funkční hodnota* v bodě $x = [x_1, \dots, x_n]$.

Z definice funkce více proměnných vyplývá, že tato funkce je jednoznačně určena udáním jejího definičního oboru $\mathscr{D}(f)$ a předpisem, kterým je každému bodu $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathscr{D}(f)$ přiřazena funkční hodnota $f(x)$. Pokud je předpis dán vzorcem a není udán definiční obor funkce, pak definičním oborem rozumíme množinu *všech* bodů $x \in \mathbb{R}^n$, pro něž má tento vzorec smysl.

Pro $n = 2$ budeme místo $f(x_1, x_2)$ psát $f(x, y)$ a pro $n = 3$ místo $f(x_1, x_2, x_3)$ píšeme $f(x, y, z)$.

Příklad 1.2.

i) Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 6x\right)}.$$

Řešení. Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tj. musí být splněna podmínka

$$\left(\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 6x\right) \geqq 0.$$

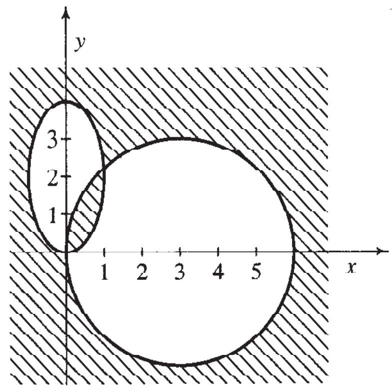
To nastane, právě když

$$\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 - 1 \geqq 0 \quad \text{a} \quad (x^2 + y^2 - 6x) \geqq 0$$

nebo

$$\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 - 1 \leqq 0 \quad \text{a} \quad (x^2 + y^2 - 6x) \leqq 0.$$

Rovnice $\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 = 1$ je rovnicí elipsy se středem v bodě $[0, 2]$ a poloosami délek $a = 1$ a $b = 2$, rovnice $x^2+y^2-6x = 0$ je rovnicí kružnice se středem v bodě $[3, 0]$ a poloměrem $r = 3$, neboť tuto rovnici lze převést na tvar $(x-3)^2 + y^2 = 9$. Množina všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňující výše uvedené nerovnosti, tj. definiční obor funkce f, je znázorněna na vedlejším obrázku. Je to uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$. ▲



ii) Zobrazte v rovině definiční obor funkce

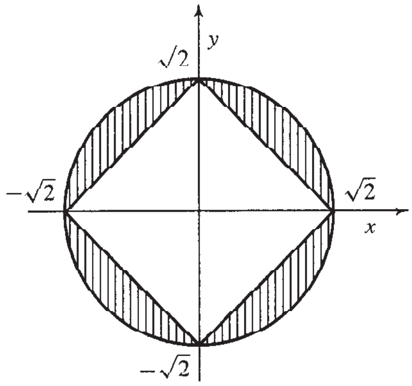
$$f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení. Definičním oborem funkce arccos je interval $[-1, 1]$, první sčítanec je tedy definován pro $[x, y]$ splňující nerovnosti

$$-1 \leqq x^2 + y^2 - 1 \leqq 1,$$

tj.

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2,$$



což je vnitřek a hranice kruhu se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt{2}$. Definičním oborem druhého sčítance je množina bodů $[x, y]$ splňující nerovnost $|x| + |y| - \sqrt{2} \geqq 0$. Načrtněme v rovině křivku danou rovnicí $|x| + |y| = \sqrt{2}$. V prvním kvadrantu je tato rovnice ekvivalentní rovnici $x + y = \sqrt{2}$, což je rovnice přímky. Ve zbývajících kvadrantech postupujeme obdobně a obdržíme kosočtverec načrtnutý na vedlejším obrázku. Definičním oborem funkce f je množina vyšrafovaná na tomto obrázku. Tato množina je uzavřená v $\mathbb{R}^2$. ▲

iii) Zobrazte v rovině definiční obor funkce $f(x, y) = \ln(y \ln(y - x))$.

Řešení. Logaritmovaný výraz musí být kladný, musí být tedy splněna nerovnost $y \ln(y - x) > 0$, která je ekvivalentní dvojici nerovností

$$\ln(y - x) > 0, \ y > 0; \qquad \ln(y - x) < 0, \ y < 0,$$

jež jsou dále ekvivalentní systémům nerovností

$$y > 0, \ y - x > 1 \quad \text{a} \quad y < 0, \ y - x < 1, \ y - x > 0$$

(poslední nerovnost plyne z definičního oboru funkce $\ln(y - x)$). Řešením těchto dvou systémů nerovností je množina načrtnutá na obr. 1. Je to otevřená množina v $\mathbb{R}^2$. ▲

iv) Zobrazte definiční obor funkce $f(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.

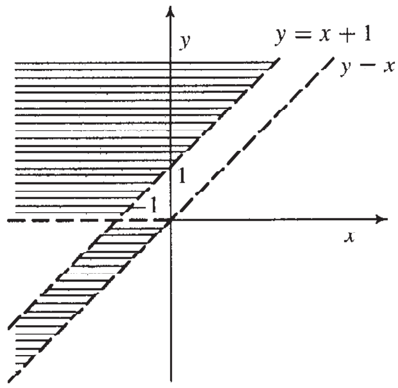
Řešení. Definičním oborem funkce arcsin je interval $[-1, 1]$. Proto musí být splněny podmínky:

$$-1 \leqq \frac{x}{y^2} \leqq 1, \quad \text{tj.} \quad y^2 \geqq -x, \ y^2 \geqq x, \ y \neq 0$$

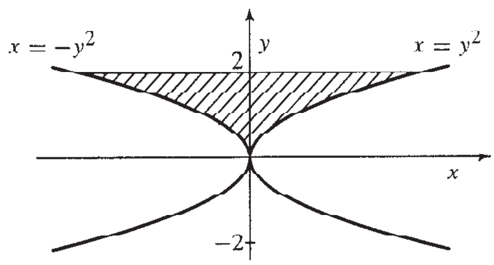
a zároveň $-1 \leqq 1 - y \leqq 1$, tj. $y \in [0, 2]$. Celkem tedy

$$\mathscr{D}(f) = \{[x, y] : y^2 \geqq -x, \ y^2 \geqq x, \ y \in (0, 2]\},$$

tato množina je načrtnuta na obr. 2. Je to množina, která není ani otevřená, ani uzavřená v $\mathbb{R}^2$ (neboť $[0, 0] \notin \mathscr{D}(f)$). ▲



obr. 1: $z = \ln(y \ln(y - x))$

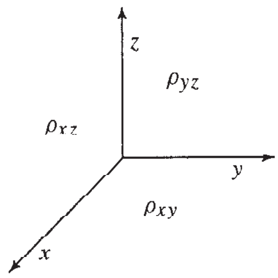


obr. 2: $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$

Definice 1.3. Nechť f je funkce n proměnných definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqq 2$. *Grafem funkce* f nazýváme množinu bodů

$$G(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^{n+1} : x = [x_1, \dots, x_n] \in M,\ y = f(x)\}.$$

Pro funkci dvou proměnných, tj. $n = 2$, je grafem funkce množina bodů v trojrozměrném prostoru. V příkladech, se kterými se zde setkáme, to bude vždy nějaká trojrozměrná plocha. K získání názorné představy, jaký je tvar a průběh této plochy, nám pomohou řezy rovinami $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ (což jsou rovnice souřadných stěn ρ_{xy}, ρ_{xz}, ρ_{yz}, viz obrázek) a rovinami s nimi rovnoběžnými.



Definice 1.4. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných definovaná na M, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{[x, y] \in M : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce* f *na úrovni* c.

Pojem vrstevnice funkce lze samozřejmě analogicky definovat i pro funkce n proměnných, $n \geqq 3$, zde však ztrácíme názorný „geografický" význam. Chápeme-li graf funkce dvou proměnných jako reliéf krajiny, pak vrstevnice funkce na úrovni c je množina všech bodů s nadmořskou výškou rovnou c, tj. náš pojem vrstevnice je totožný s geografickým významem tohoto slova.

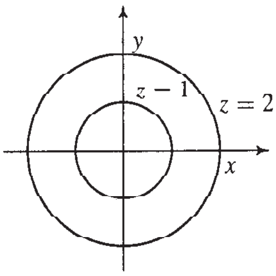
Příklad 1.5.

i) Pomocí vrstevnic a řezů rovinami ρ_{xz}, ρ_{yz} zobrazte graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

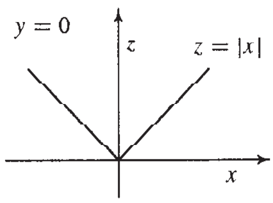
Řešení. Vrstevnice funkce na úrovni $k > 0$ jsou dány rovnicemi

$$k = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tj.} \quad k^2 = x^2 + y^2,$$

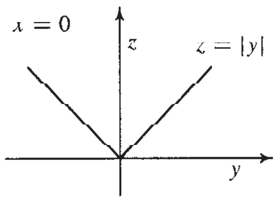
což jsou kružnice se středem na ose z a poloměrem k, viz obr. 3a).
Řez rovinou ρ_{yz}, tj. $x = 0$, dává $z = \sqrt{y^2} = |y|$. Řezem je lomená čára s vrcholem v počátku daná rovnicí $z = |y|$. Podobně řez rovinou $y = 0$ dává $z = |x|$. V obou případech je řezem lomená čára s vrcholem v počátku o rovnici $z = |y|$, resp. $z = |x|$, viz obr. 3b, 3c. (V terminologii technického kreslení a zobrazovacích metod se vlastně jedná o průmět do svislých souřadných nárysen, tj. nárys a bokorys.)



obr. 3a: Půdorys



obr. 3b: Bokorys



obr. 3c: Nárys

Na základě získaných výsledků již můžeme říci, že grafem funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je *rotační kužel* s vrcholem v počátku a hlavní osou z, nacházející se v poloprostoru $z \geqq 0$, viz obr. 5a. Na tomto obrázku je znázorněn i dolní kužel, který je grafem funkce $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. ▲

ii) Zobrazte v $\mathbb{R}^3$ graf funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $a, b > 0$.

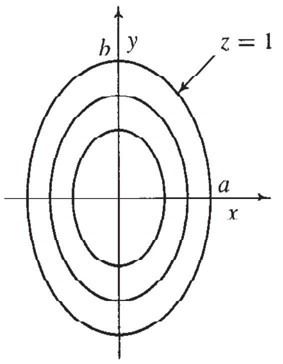
Řešení. Podobně jako v předchozím příkladu jsou vrstevnice dány rovnicemi

$$k = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x^2}{ka^2} + \frac{y^2}{kb^2} = 1,$$

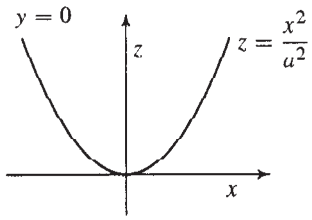
což jsou rovnice elipsy se středem v počátku a poloosami $a\sqrt{k}$, $b\sqrt{k}$, viz obr. 4a). Řezy rovinami $y = 0$, $x = 0$ dávají

$$z = \frac{x^2}{a^2}, \qquad z = \frac{y^2}{b^2},$$

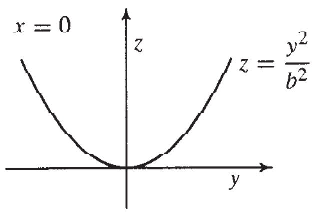
což jsou rovnice parabol s vrcholem v počátku souřadných stěn ρ_{xz} a ρ_{yz}, viz obr. 4b), 4c). Celkem vidíme, že grafem je plocha, která se nazývá *eliptický paraboloid*. Tato plocha je prostorově v okolí počátku znázorněna na obrázku 5b. ▲



obr. 4a: Půdorys



obr. 4b: Bokorys



obr. 4c: Nárys

iii) Zobrazte v $\mathbb{R}^3$ definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln(-z^2 - x^2 - y^2 + 1)$.

Řešení. Logaritmická funkce je definována jen pro kladná čísla. Proto musí být $-z^2 - x^2 - y^2 + 1 > 0$, tj. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, a tedy

$$\mathscr{D}(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

V řezech rovinami $z = 0, y = 0, x = 0$ postupně dostáváme $x^2 + y^2 < 1$, $x^2 + z^2 < 1$, $y^2 + z^2 < 1$, což jsou body uvnitř kružnice se středem v počátku a poloměru $r = 1$, celkem je tedy definičním oborem vnitřek koule se středem v bodě $[0, 0, 0]$ a poloměrem $r = 1$, je to otevřená množina v $\mathbb{R}^3$. ▲

Příklad 1.6.

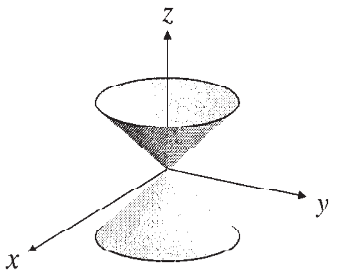
i) Načrtněte v rovině vrstevnice funkce $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

Řešení. Vrstevnice funkce mají rovnici $c = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$ a odtud $\ln c = \frac{2x}{x^2+y^2}$. Označíme-li nyní $\ln c = k$, postupnými úpravami dostáváme

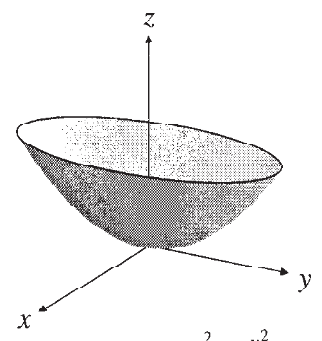
$$k = \frac{2x}{x^2 + y^2} \iff k(x^2 + y^2) = 2x \iff x^2 - \frac{2}{k}x + y^2 = 0,$$

a tedy pro $k \neq 0$ (tj. $c \neq 1$),

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{k^2}.$$

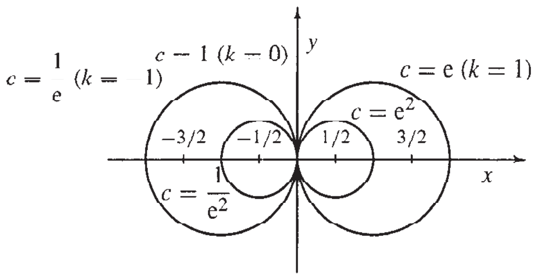


obr. 5a: $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$



obr. 5b: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Z poslední rovnice je již vidět, že vrstevnicemi dané funkce pro $c \neq 1$ jsou kružnice se středem $S = \left[\frac{1}{k}, 0\right] = \left[\frac{1}{\ln c}, 0\right]$ a poloměrem $r = \frac{1}{|k|} = \frac{1}{|\ln c|}$ procházející počátkem, avšak bez počátku (neboť pro bod $[0, 0]$ není funkce definována). Pro $c = 1$ dostáváme $0 = \frac{2x}{x^2+y^2}$, tj. $x = 0$, vrstevnicí dané funkce pro $c = 1$ je tedy osa y (bez počátku). ▲



ii) Načrtněte vrstevnice funkce $z = |x| - |y| + |x - y|$.

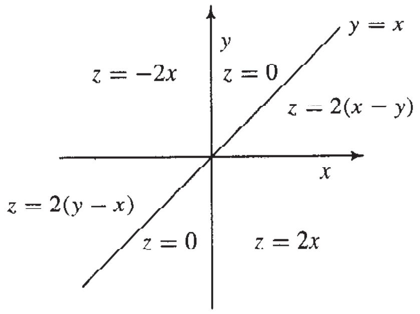
Řešení. Nejprve se zbavíme ve vyjádření funkční závislosti absolutních hodnot. Provedeme diskusi v jednotlivých kvadrantech.

Ia) $x \geqq 0, y \geqq 0, x \geqq y \implies z = x - y + x - y = 2(x - y)$.

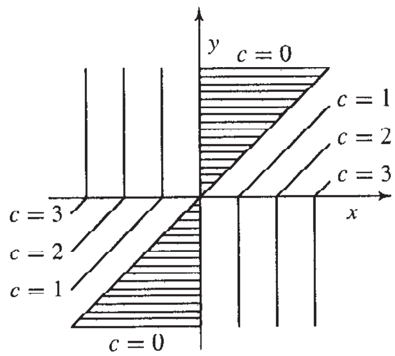
Ib) $x \geqq 0, y \geqq 0, x < y \implies z = x - y - x + y = 0$.

II) $x < 0,\ y \geqq 0$, (zde vždy $x \leqq y$) $\implies z = -x - y - x + y = -2x$.

Obdobným způsobem získáme vyjádření funkční závislosti bez absolutních hodnot ve zbývajících dvou kvadrantech a jako výsledek obdržíme situaci znázorněnou na obr. 6a). Protože pro libovolná $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ platí nerovnost $|x - y| \geqq |y| - |x|$ (zdůvodněte proč), je vždy $f(x, y) \geqq 0$, tj. pro $c < 0$ je $f_c = \emptyset$. Pro $c \geqq 0$ načrtneme v jednotlivých sektorech křivku $|x| - |y| + |x - y| = c$ a pro $c = 0, 1, 2, 3$ je výsledek znázorněn na obrázku 6b). ▲



obr. 6a: $z = |x - y| + |x| - |y|$



obr. 6b: Vrstevnice

Cvičení

1.1. Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$,

b) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)}$,

c) $z = \ln(x + y)$,

d) $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$,

e) $z = \arcsin\frac{x}{y} - \frac{1}{|y| - |x|}$,

f) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$,

g) $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$,

h) $z = \arccos\frac{x}{x + y}$,

i) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$,

j) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$,

k) $z = \ln[x\ln(y - x)]$,

l) $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y\right)}$.

1.2. Načrtněte vrstevnice funkcí:

a) $z = x^2 + y^2$,

b) $z = x^2 - y^2$,

c) $z = x^y$, kde $x > 0$,

d) $z = \sqrt{x \cdot y}$.

1.3. Pomocí vrstevnic a řezů rovinami ρ_{xz}, ρ_{yz} načrtněte v prostoru grafy funkcí:

a) $z = 2 - x - y$,

b) $z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$,

c) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

d) $z = x^2 + y^2$,

e) $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$,

f) $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.4. Určete definiční obory funkcí:

a) $u = \sqrt{1 + x^2 - y^2 - z^2}$,

b) $u = \sqrt{1 - x} + \sqrt{y + 3} + \sqrt{z}$,

c) $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 - z^2}$,

f) $u = \ln(xyz)$,

g) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$,

h) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$,

d) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

e) $u = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$,

i) $u = \arcsin \frac{x}{y} + \arcsin y + \arccos \frac{z}{3}$,

j) $u = \ln(-x^2 - y^2 + 2z)$.

*

Většina učitelů ztrácí čas tím, že klade otázky, jejichž cílem je zjistit, co žák neumí, zatímco pravé umění tázat se spočívá v tom, že má odhalit, co žák umí nebo je schopen umět. (A. Einstein)

*

Kapitola 2

Limita a spojitost funkce

Pojem limity funkce patří k základním pojmům diferenciálního počtu. Je to lokální vlastnost funkce, popisující chování funkce v ryzím okolí bodu, v němž limitu určujeme. (Ryzím okolím bodu rozumíme okolí kromě tohoto bodu.) Skutečnost, že jde o ryzí okolí, znamená, že limita nezávisí na funkční hodnotě funkce v tomto bodě — funkční hodnota se může lišit od limity v tomto bodě nebo funkce nemusí být v daném bodě vůbec definována.

Rovněž pojem spojitosti funkce více proměnných lze podobně jako pro funkce jedné proměnné definovat pomocí limity funkce, proto zde najdeme řadu tvrzení podobných těm, se kterými jsme se již setkali v diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné.

K definici limity, spojitosti a všech dalších pojmů diferenciálního počtu je třeba na $\mathbb{R}^n$ zavést metriku. Proto připomeňme několik základních pojmů z teorie metrických prostorů.

2.1. Metrické vlastnosti $\mathbb{R}^n$

Připomeňme, že ε-okolí vlastního bodu $a \in \mathbb{R}$ lze zapsat jako interval $|x - a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Okolí $\mathscr{O}(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^n$ je definováno pomocí metriky ρ v $\mathbb{R}^n$ jako množina

$$\mathscr{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Není-li poloměr okolí podstatný, budeme index ε vynechávat.

Podle výběru metriky dostáváme různé typy okolí. Např. v $\mathbb{R}^2$ dostaneme kruhové okolí, zvolíme-li euklidovskou metriku

$$\rho_2([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

čtvercové okolí dostaneme volbou maximové metriky

$$\rho_\infty([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

či kosočtvercové okolí, zvolíme-li součtovou metriku

$$\rho_1([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Podstatná je *ekvivalentnost těchto metrik*, která znamená, že existence (neexistence) limity nezáleží na tom, kterou z těchto ekvivalentních metrik zvolíme (viz [D-D]).

Z důvodu formální jednoduchosti zvolme v této kapitole maximální metriku, ve které je okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ kartézským součinem okolí jednotlivých souřadnic $a_1, \dots, a_n$, tj.

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \le i \le n} |x_i - a_i| < \varepsilon\}.$$

Ryzím okolím bodu a rozumíme množinu $\mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$.

Okolí nevlastních bodů v $\mathbb{R}^2$ jsou definována v souladu s maximální metrikou : Okolím nevlastního bodu $[\infty, \infty]$ rozumíme libovolnou množinu typu $(a, \infty) \times (b, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Analogicky definujeme okolí nevlastního bodu $[-\infty, \infty]$, $[\infty, -\infty]$, $[-\infty, -\infty]$ i okolí bodů typu $[a, \pm\infty]$, $[\pm\infty, a]$. Okolí nevlastních bodů v prostorech vyšších dimenzí jsou definována analogicky. Množinu $\mathbb{R}^n$ spolu s nevlastními body budeme označovat $(\mathbb{R}^*)^n$.

V definici limity vystupují funkční hodnoty funkce v ryzím (libovolně malém) okolí bodu, v němž limitu definujeme. Z tohoto důvodu *lze limitu funkce vyšetřovat jen v hromadných bodech definičního oboru*. Proto, aniž bychom tento fakt stále zdůrazňovali, budeme ve všech kapitolách, kde se vyskytuje limita funkce v daném bodě, předpokládat, že tento bod je hromadným bodem množiny $\mathscr{D}(f)$ (připomeňme, že bod $x \in \mathscr{D}(f)$ je hromadným bodem množiny $\mathscr{D}(f)$, jestliže každé jeho ryzí okolí obsahuje alespoň jeden bod této množiny).

2.2. Limita funkce

Definice 2.1. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 1)$ má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* L, $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(a) \cap \mathscr{D}(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Limita se nazývá *vlastní*, jestliže $L \in \mathbb{R}$, v opačném případě ($L = \pm\infty$) se nazývá *nevlastní limita*. Bod $a \in (\mathbb{R}^n)^*$ se nazývá *limitní bod*.

Uvedená definice limity je univerzální definicí pro funkci jedné či více proměnných, pro vlastní či nevlastní limitu a pro vlastní i nevlastní limitní body. Specifikací okolí pro vlastní limitní bod i limitu $a \in \mathbb{R}^n$, $L \in \mathbb{R}$ dostáváme tzv. *ε–δ definici* vlastní limity ve vlastním bodě. Tuto definici zde zformulujeme pro funkci dvou proměnných.

Definice 2.2. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $[x, y] \in \mathscr{D}(f)$ splňující $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Zásadní rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou a více proměnných spočívá v „dimenzi“ okolí limitního bodu — u funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po přímce, tj. ze dvou stran (což znamená, že funkce má limitu v bodě, má-li obě jednostranné limity a tyto se sobě rovnají), zatímco u funkce více proměnných je těchto možností nekonečně mnoho; můžeme se blížit k danému bodu po přímkách, po parabolách či obecných množinách. Existence limity v daném bodě znamená, že *nezáleží* na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Naopak dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, znamená to, že limita v daném bodě nemůže existovat.

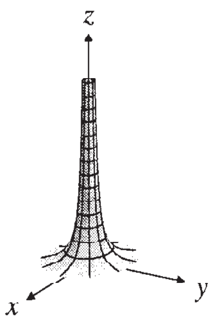
Příklad 2.3.

i) Pomocí konkrétní specifikace okolí limitního bodu a limity definujte

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = \infty.$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že okolí bodu ∞ je tvaru (A, ∞) a ryzí δ-okolí bodu $[1, 0]$ je $\{(1-\delta, 1+\delta) \times (-\delta, \delta)\} \setminus \{[1, 0]\}$, dostáváme tuto specifikaci obecné definice 2.1: Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = \infty$, jestliže ke každému $A \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $[x, y] \in \mathscr{D}(f)$ splňující $|x - 1| < \delta$, $|y| < \delta$, $[x, y] \neq [1, 0]$ platí $f(x, y) > A$. ▲

ii) Dokažte, že funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ má v bodě $[0, 0]$ nevlastní limitu ∞.



Řešení. Nechť $A \in \mathbb{R}$ je libovolné. Položme $\delta = \frac{1}{\sqrt{2|A|}}$. Pro $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ platí $x^2 + y^2 < 2\delta^2 = \frac{1}{|A|}$. Odtud pro $[x, y] \neq [0, 0]$ platí $\frac{1}{x^2+y^2} > |A| \geqq A$. Tedy k $A \in \mathbb{R}$ libovolnému jsme našli $\delta > 0$ takové, že pro $[x, y] \neq [0, 0]$ splňující $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ platí $\frac{1}{x^2+y^2} > A$, tj. podle definice limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$. Graf funkce $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ je znázorněn na vedlejším obrázku. ▲

Podobně jako u funkce jedné proměnné platí následující věty o limitách funkcí. Protože definice limity funkce více proměnných pomocí okolí bodu je stejná jako pro funkci jedné proměnné, jsou i důkazy těchto tvrzení stejné jako pro funkce jedné proměnné. Čtenáři doporučujeme provést si je jako cvičení.

Věta 2.4. *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ nejvýše jednu limitu.*

Věta 2.5. *Nechť $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$ (tj. existuje konstanta $K \geqq 0$ taková, že $|g(x, y)| \leqq K$ v tomto ryzím okolí). Pak*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0.$$

Věta 2.6. *Nechť $h(x, y) \leqq f(x, y) \leqq g(x, y)$ v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$ a platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L.$$

Pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Věta 2.7. *Nechť*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L_2$$

a L_1, $L_2 \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x, y) = cL,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] = c_1 L_1 + c_2 L_2,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y)g(x, y)] = L_1 L_2.$$

Je-li $L_2 \neq 0$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Věta 2.8. *Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0] \in (\mathbb{R}^*)^2$ vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je funkce f ohraničená.*

Poznámka 2.9. Počítání limit funkcí dvou a více proměnných je často obtížnější než v případě funkcí jedné proměnné, neboť k počítání tzv. neurčitých výrazů (limity typu „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“) nemáme k dispozici žádnou analogii l'Hospitalova[1] pravidla. Proto při výpočtu limit tohoto typu používáme různé úpravy funkce, jejíž limitu počítáme. Nejčastěji používané úpravy jsou ukázány v následujících příkladech.

Příklad 2.10. Vypočtěte limity následujících funkcí:

i) $f(x,y) = \dfrac{x+y+1}{x+y+3}$ v bodě $[1,0]$.

Řešení. Pokud můžeme souřadnice limitního bodu do příslušného výrazu dosadit (tj. po dosazení neobdržíme neurčitý výraz), je hodnota limity dané funkce rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y+1}{x+y+3} = \frac{1}{2}.$$ ▲

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. Protože bychom dosazením souřadnic limitního bodu získali neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, najdeme hodnotu limity obratem typickým i pro funkce jedné proměnné. Čitatele i jmenovatele zlomku vynásobíme výrazem $\sqrt{x^2+y^2+1}+1$. Po této úpravě dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2+y^2+1}+1) = 2.$$ ▲

iii) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ v bodě $[0,0]$.

[1] Guillaume de l'Hospital (1661–1704), francouzský matematik.

Řešení. Protože $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$ a $|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|\leqq 1$ pro každé $[0,0]\neq$ $\neq[x,y]\in\mathbb{R}^2$, je podle věty 2.5 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$. ▲

iv) $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{x+y}$ v bodě $(1,\infty)$.

Řešení. Nejprve ukážeme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)}\frac{1}{x+y}=0$. Nechť $\varepsilon>0$ je libovolné. Musíme najít $\delta>0$ a $A\in\mathbb{R}$ taková, že pro $x\in(1-\delta,1+\delta)$ a $y>A$ platí $\frac{1}{x+y}<\varepsilon$. Nechť $\delta>0$ je libovolné a položme $A=\frac{1}{\varepsilon}+\delta-1$. Pak pro $x\in(1-\delta,1+\delta)$, $y>A$ platí $x+y>1-\delta+\delta-1+\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}$, odtud $\frac{1}{x+y}<\varepsilon$. Protože funkce $\cos y$ je ohraničená, platí $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)}\frac{\cos y}{x+y}=0$. ▲

v) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. Z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné víme, že

$$\lim_{t\to0+}t\ln t=0$$

(to lze snadno spočíst pomocí l'Hospitalova pravidla). Protože platí nerovnost $|xy|\leqq\frac{x^2+y^2}{2}$ (která je ekvivalentní nerovnosti $(x\pm y)^2\geqq0$), platí

$$0\leqq|xy\ln(x^2+y^2)|\leqq\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2). \tag{2.1}$$

Položme $t=x^2+y^2$. Je-li $(x,y)\to(0,0)$, je $t\to0+$, a tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{t\to0}t\ln t=0.$$

Nyní z nerovnosti (2.1) a věty 2.6 plyne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln(x^2+y^2)=0.$$ ▲

vi) $f(x,y,z)=\dfrac{\sin(x-y+z-1)}{x-y+z-1}$ v bodě $[1,1,1]$.

Řešení. Příklad vyřešíme metodou substituce. Položme $t=x-y+z-1$. Pro $(x,y,z)\to(1,1,1)$ je $t\to0$. Protože $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$, k libovolnému $\varepsilon>0$ existuje $\delta_1>0$ takové, že pro $0<|t|<\delta_1$ je $\left|\frac{\sin t}{t}-1\right|<\varepsilon$. Položme $\delta=\frac{\delta_1}{3}$. Pak pro $[x,y,z]\in\mathbb{R}^3$ splňující $|x-1|<\delta$, $|y-1|<\delta$, $|z-1|<\delta$, $x-y+z-1\neq0$ je $0<|x-y+z-1|<\delta_1$, a tedy

$$\left|\frac{\sin(x-y+z-1)}{x-y+z-1}-1\right|<\varepsilon\implies\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)}\frac{\sin(x-y+z-1)}{x-y+z-1}=1.$$

▲

Řekli jsme, že existence limity v daném bodě znamená, že nezáleží na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Naopak dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, znamená to, že limita v daném bodě nemůže existovat. Tohoto faktu využíváme při důkazu neexistence limity funkce dvou proměnných ve vlastním bodě $[x_0, y_0]$ zavedením *polárních souřadnic* r, φ definovaných vztahy

$$x - x_0 = r\cos\varphi, \qquad y - y_0 = r\sin\varphi,$$

kde $r \geq 0$ udává vzdálenost bodů $[x_0, y_0]$ a $[x, y]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy x.

Jestliže hodnota limity funkce závisí na úhlu φ, znamená to, že závisí na cestě, po které se blížíme k danému bodu, a proto funkce nemá v tomto bodě limitu.

Příklad 2.11. Rozhodněte, zda existuje limita $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Řešení. Zavedením polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0+} \frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi.$$

Protože výsledek závisí na φ, tj. na cestě, po které se blížíme k bodu $[0, 0]$, uvedená limita neexistuje. Graf této funkce je znázorněn v příloze, viz příklad P.3. ▲

Poznámka 2.12. Zavedením polárních souřadnic při výpočtu limity vyšetřujeme chování funkce f v okolí limitního bodu $[x_0, y_0]$ na přímkách se směrovým vektorem $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Pokud limita vyjde nezávisle na úhlu φ, je to pouze nutná podmínka pro existenci limity v bodě $[x_0, y_0]$, protože pro jiný způsob „blížení", např. po parabolách, můžeme obdržet zcela odlišný výsledek. Jako příklad uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou takto:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Po transformaci do polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2(r^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = 0,$$

přesto však limita funkce v bodě $[0, 0]$ neexistuje. Vskutku, položíme-li $y = kx^2$, tj. k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po parabolách, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2},$$

což je výsledek závisející na konstantě k, viz příloha příklad P.4.

Následující věta udává podmínku, za které je nezávislost limity na φ po přechodu k polárním souřadnicím nejen nutnou ale i postačující podmínku pro existenci limity.

Věta 2.13. *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu rovnu L, jestliže existuje nezáporná funkce $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ splňující $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ taková, že*

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r)$$

pro každé $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $r > 0$ dostatečně malá.

Speciálně, platí-li po transformaci do polárních souřadnic

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0+} h(r) g(\varphi),$$

kde $\lim_{r\to 0+} h(r) = 0$ a funkce $g(\varphi)$ je ohraničená pro $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

Důkaz. Protože $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < r < \delta$ je $g(r) < \varepsilon$, tj.

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r) < \varepsilon.$$

To však znamená, že pro $[x, y]$ z ryzího kruhového δ-okolí bodu $[x_0, y_0]$ je $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, což je právě definice vztahu $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$. □

Příklad 2.14. Rozhodněte, zda existují limity následujících funkcí, a v případě, že ano, vypočítejte je:

i) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ v bodě $[0, 0]$.

Řešení. Využijeme transformace do polárních souřadnic a tvrzení věty 2.13. Položme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Je-li $(x,y) \to (0,0)$, je $r \to 0+$, a tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0+} \frac{r^3(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)}{r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \lim_{r\to 0+} r(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi) = 0,$$

neboť funkce $g(\varphi) = \sin^3\varphi + \cos^3\varphi$ je ohraničená. ▲

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}$ v bodě $[0, 1]$.

Řešení. Postupujeme podobně jako v předcházejícím příkladu. Platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{r\to 0+} (1 + r\sin^3\varphi) = 1,$$

čímž je splněna nutná podmínka pro existenci dané limity. Dále platí

$$|(1 + r\sin^3\varphi) - 1| = |r\sin^3\varphi| \leqq r,$$

takže podle věty 2.13 je splněna také postačující podmínka a hodnota limity je rovna 1. ▲

Poznámka 2.15. Podobně jako transformaci do polárních souřadnic při výpočtu limity funkce dvou proměnných používáme při výpočtu limity funkce tří proměnných transformaci do *sférických souřadnic*

$$x - x_0 = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y - y_0 = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z - z_0 = r\cos\vartheta,$$

kde r udává vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$, ϑ je úhel, který svírá průvodič (= spojnice těchto bodů) s kladným směrem osy z, a φ je úhel, který svírá průmět průvodiče do podstavné roviny ρ_{xy} s kladným směrem osy x. Zejména jestliže po zavedení sférických souřadnic vyjde výraz závisející na φ nebo ϑ, limita neexistuje (toto odpovídá skutečnosti, že při „blížení" se po různých přímkách k limitnímu bodu dostaneme různé hodnoty).

V některých speciálních případech je k vyšetřování existence limity vhodná následující věta, která se někdy v literatuře bere za definici limity (tzv. Heineho[1] definice). Důkaz této věty neuvádíme, neboť je v podstatě stejný jako pro analogické tvrzení týkající se funkce jedné proměnné, viz [D-K], str. 189.

Věta 2.16. *Nechť $[x_0, y_0]$ je hromadný bod definičního oboru $\mathscr{D}(f)$ funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Funkce f má v tomto bodě limitu L, právě když pro každou posloupnost bodů $\{[x_n, y_n]\}$, kde $[x_n, y_n] \in \mathscr{D}(f)$ a $[x_n, y_n] \neq [x_0, y_0]$ pro velká n, konvergující k bodu $[x_0, y_0]$, má posloupnost $\{f(x_n, y_n)\}$ limitu L.*

2.3. Spojitost funkce

Definice 2.17. Nechť bod $[x_0, y_0]$ je hromadný bod definičního oboru $\mathscr{D}(f)$ funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, který patří do $\mathscr{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Pro funkci n proměnných dostáváme zcela stejnou definici spojitosti:

Nechť f je funkce n proměnných, $n \geq 2$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$, který je hromadný bod množiny $\mathscr{D}(f)$ patřící do této množiny, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*).$$

Porovnejme tuto definici s definicí spojitosti zobrazení mezi metrickými prostory. Zobrazení f z prostoru (P, ρ) do prostoru (Q, σ) je spojité v bodě $x^* \in P$, jestliže ke každému okolí $\mathscr{V}$ bodu $f(x^*) \in Q$ existuje okolí $\mathscr{U}$ bodu x^* takové, že pro každé $x^* \in \mathscr{U}$ je $f(x^*) \in \mathscr{V}$. Je-li (P, ρ) prostor $\mathscr{D}(f)$ s některou z výše uvedených ekvivalentních metrik $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ (viz odst. 2.1.) a (Q, σ) je $\mathbb{R}^1$ s metrikou $\sigma(x, y) = |x - y|$, pak je definice spojitého zobrazení stejná s definicí spojité funkce n proměnných v bodě x^*, který je hromadným bodem množiny $\mathscr{D}(f)$. V izolovaných

[1] Heinrich Heine (1821–1881), německý matematik.

bodech množiny $\mathscr{D}(f)$ jsme spojitost nedefinovali; ve smyslu definice spojitého zobrazení je funkce v těchto bodech vždy spojitá.

Vzhledem k tomu, že spojitost funkce dvou a více proměnných se definuje pomocí pojmu limity funkce stejně jako pro funkci jedné proměnné, obdobně platí věta, že součet, součin a podíl spojitých funkcí je spojitá funkce, a dále platí věta o spojitosti složené funkce.

Věta 2.18. *Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f+g$, fg, a je-li $g(x_0, y_0) \neq 0$, je v tomto bodě spojitá také funkce f/g.*

Věta 2.19. *Nechť funkce g, h jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$, $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$ a funkce f je spojitá v bodě $[u_0, v_0]$. Pak je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá složená funkce $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.*

Příkladem funkcí spojitých v celé rovině jsou např. polynomy ve dvou proměnných, funkce $\sin u$, $\cos u$, e^u, kde u je polynom ve dvou proměnných.

Příklad 2.20. Určete body, v nichž následující funkce nejsou spojité:

a) $f(x, y) = \dfrac{2x - 5y}{x^2 + y^2 - 1}$, b) $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2y + xy^2)}{\cos(x - y)}$.

Řešení.

a) Funkce $f_1(x, y) = 2x - 5y$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ jsou polynomy ve dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce f není spojitá v bodech, ve kterých není definována, tj. kde $x^2 + y^2 = 1$. Body, v nichž funkce není spojitá, tvoří kružnici se středem v počátku a s poloměrem 1.

b) Funkce $f_1(x, y) = x^2y + xy^2$, $f_2(x, y) = x - y$ a $\sin u$, $\cos u$ jsou spojité v celé rovině. Podle věty 2.18 o podílu není funkce f spojitá v bodech, kde

$$\cos(x - y) = 0, \quad \text{tj.} \quad y = x + (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

▲

Příklad 2.21. Zjistěte, zda funkce $f(x, y)$ definovaná následujícím způsobem je spojitá v bodě $[0, 0]$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4 + y^4} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Řešení. Nejprve ověřme, zda existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Zvolíme-li $y = kx$, snadno vidíme, že výsledná hodnota záleží na k, neboli že záleží na přímce, po které se k počátku blížíme. Proto uvedená limita neexistuje a daná funkce nemůže být v počátku spojitá. ▲

Poznámka 2.22. Je-li funkce f spojitá v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pak jsou spojité i funkce jedné proměnné $g(x) = f(x, y_0)$ v bodě x_0 a $h(y) = f(x_0, y)$ v bodě y_0. Spojitá funkce dvou proměnných je tedy spojitou funkcí proměnné x při konstantním y a spojitou funkcí y při konstantním x. Opačné tvrzení neplatí! Ze spojitosti vzhledem k jednotlivým proměnným neplyne spojitost jakožto funkce dvou proměnných.

Uvažujme funkci z předchozího příkladu. Není obtížné ověřit, že pro libovolná pevná $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ jsou funkce $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$ spojité v $\mathbb{R}$, avšak funkce dvou proměnných f není spojitá v bodě $[0, 0]$, neboť v tomto bodě limita neexistuje.

2.4. Věty o spojitých funkcích

Stejně jako pro funkci jedné proměnné platí pro funkci n proměnných Weierstrassova[1] a Bolzanova[2] věta. Uvedeme obě věty pro funkci dvou proměnných.

Připomeňme, že Weierstrassova věta pro funkce jedné proměnné se týká funkcí spojitých na uzavřeném a ohraničeném intervalu, přičemž spojitost na uzavřeném intervalu znamená spojitost zleva (zprava) v pravém (levém) krajním bodě a normální spojitost ve vnitřních bodech. Pro funkci dvou proměnných definujeme spojitost na množině takto:

Definice 2.23. Řekneme, že funkce f je *spojitá na množině* $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$, který je jejím hromadným bodem, platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Limitní vztah chápeme takto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $[x, y] \in \mathcal{O}_\delta([x_0, y_0]) \cap M$ platí $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Poznámka 2.24. Všimněme si, že předchozí definice si nevšímá izolovaných bodů množiny M. Spojitost funkce f na množině M nezávisí na hodnotě této funkce v izolovaných bodech množiny M.

Věta 2.25 (Weierstrassova). *Nechť funkce f je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.*

[1] Karl T. W. Weierstrass (1815–1897), německý matematik.

[2] Bernard Bolzano (1781–1848), český matematik a filozof.

Důkaz. Uvedená věta je důsledkem obecné věty z metrických prostorů: Je-li f spojité zobrazení mezi metrickými prostory, pak obrazem kompaktní množiny je kompaktní množina. V eukleidovských prostorech je kompaktní množinou každá ohraničená uzavřená množina. Odtud okamžitě plyne ohraničenost množiny $f(M)$. Protože každá neprázdná shora ohraničená množina má supremum, existuje

$$K = \sup_{(x,y)\in M} f(x, y).$$

Zbývá dokázat, že existuje bod $[x_0, y_0] \in M$ takový, že $f(x_0, y_0) = K$. Podle definice suprema existuje pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ bod $[x_n, y_n] \in M$ tak, že $f(x_n, y_n) > K - \frac{1}{n}$. Posloupnost $\{[x_n, y_n]\}$ je ohraničená, proto existuje vybraná podposloupnost $\{[x_{n_k}, y_{n_k}]\}$ konvergující k bodu $[x_0, y_0]$. Vzhledem k uzavřenosti množiny M je $[x_0, y_0] \in M$ a ze spojitosti funkce f plyne, že $\{f(x_{n_k}, y_{n_k})\} \to f(x_0, y_0)$. Poněvadž $f(x_{n_k}, y_{n_k}) > K - \frac{1}{n_k}$ pro všechna k, je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_0, y_0) \geqq K$. Z definice suprema plyne $f(x_0, y_0) \leqq K$, a proto $f(x_0, y_0) = K$.

Podobně se dokáže tvrzení o nejmenší hodnotě funkce f. □

Poznámka 2.26. Důsledkem této věty je ohraničenost spojité funkce na kompaktní množině, což bývá někdy spolu s větou 2.25 formulováno ve dvou větách jako první a druhá Weierstrassova věta.

V následující větě je třeba předpokládat, že množina M je souvislá. Připomeňme z teorie metrických prostorů, že otevřená množina $M \subset \mathbb{E}^2$ se nazývá *souvislá*, jestliže pro každé dva body $X, Y \in M$ existuje konečná posloupnost bodů $X_1, \dots, X_n \in M$, $X_1 = X, X_n = Y$ taková, že všechny úsečky $\overline{X_i X_{i+1}}$ jsou podmnožinami M.

Věta 2.27 (Bolzanova). *Nechť funkce f je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Nechť pro $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu c ležícímu mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$ existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.*

Důkaz. Položme $g(x, y) = f(x, y) - c$. Ze souvislosti množiny M plyne existence konečné posloupnosti bodů $X_1, \dots, X_n \in M$, $X_1 = X, X_n = Y$ takové, že všechny úsečky $\overline{X_i X_{i+1}}$ jsou podmnožinami M. Uvažujeme-li hodnoty $g(X_i)$, pak buď existuje index i takový, že $g(X_i) = 0$, nebo existuje j takové, že $g(X_j) < 0$ (> 0), $g(X_{j+1}) > 0$ (< 0). Označíme-li $X_j = [x_1, y_1]$, $X_{j+1} = [x_2, y_2]$, jsou parametrické rovnice úsečky $\overline{X_j X_{j+1}}$

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \qquad t \in [0, 1].$$

Položme $G(t) = f(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t)$, $t \in [0, 1]$. Pak $G(0) = g(X_j) < 0$ (> 0), $G(1) = g(X_{j+1}) > 0$ (< 0) a G je spojitá funkce na uzavřeném intervalu. Podle Bolzanovy věty pro funkci jedné proměnné existuje $t_0 \in (0, 1)$ tak, že $G(t_0) = 0$. Zvolíme-li $C = [x_1 + (x_2 - x_1)t_0, y_1 + (y_2 - y_1)t_0]$, dostaneme $g(C) = 0$, tj. $f(C) = c$. □

Poznámka 2.28. Důsledkem této věty je následující tvrzení: Nechť funkce f je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Existují-li $A, B \in M$ takové, že $f(A) < 0$, $f(B) > 0$, pak existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = 0$ (tzv. první Bolzanova věta).

Cvičení

2.1. Pomocí konkrétní specifikace okolí limitního bodu a limity definujte:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} f(x, y) = \infty$, b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} f(x, y) = -\infty$.

2.2. Vypočtěte limity následujících funkcí:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(e^2,1)} \frac{\ln x}{y}$,

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(-4,-1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$,

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy^2}$,

2.3. Vypočtěte limity následujících funkcí:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$,

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$,

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$,

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$,

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$,

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$,

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$.

2.4. Vypočtěte limity následujících funkcí:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$,

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$,

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$,

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$,

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$,

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

2.5. Dokažte, že funkce $f(x, y) = \frac{3y}{x^3+y}$ nemá v bodě [0,0] limitu.

2.6. Určete body nespojitosti funkcí:

a) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

b) $z = \frac{x+y}{x^3+y^3}$,

c) $z = \frac{xy}{x+y}$,

d) $z = \sin\frac{1}{xy}$,

e) $z = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$,

f) $z = \ln|1 - x^2 - y^2|$.

2.7. Určete body nespojitosti funkcí:

a) $z = \frac{x^2+y^5+x+3}{x^4+xy^3}$,

b) $z = \frac{x^2+3y}{x^2-3y}$,

c) $z = \frac{1}{e^{\frac{x}{y}}-1}$,

d) $z = \arccos\frac{x}{y}$,

e) $z = \frac{1}{xyz}$,

f) $z = \ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

2.8. Zjistěte, zda funkce f je spojitá v bodě [0,0]:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0], \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$

*

Učitel by měl působit tak, že to, co nabídne, je přijímáno jako cenný dar, ne jako úmorná povinnost. (A. Einstein)

*

Kapitola 3

Parciální derivace

Derivace funkce je druhým základním pojmem diferenciálního počtu. Cílem této kapitoly je zavést tento pojem pro funkci více proměnných a ukázat souvislost s limitou a spojitostí funkce.

Připomeňme definici a geometrický význam derivace funkce jedné proměnné: derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě x_0 je limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3.1}$$

Derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Má-li funkce derivaci v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá, a tudíž zde existuje také limita funkce.

Jak jsme již ukázali v předcházející kapitole, limita funkce dvou a více proměnných je komplikovanějším pojmem než v případě funkce jedné proměnné, neboť k bodu $[x_0, y_0]$ (v případě dvou proměnných) se můžeme blížit mnoha způsoby. Zcela přirozené je začít zkoumat situaci, blížíme-li se k bodu $[x_0, y_0]$ ve směru souřadných os x a y. Tím se dostáváme k pojmu *parciální derivace* funkce dvou proměnných. Při „parciálním"[1] derivování se vždy na jednu z proměnných x, y díváme jako na konstantu a podle druhé derivujeme. Blížíme-li se k bodu $[x_0, y_0]$ ve směru předem daného vektoru $u = (u_1, u_2)$, jde o směrovou derivaci, která je přirozeným zobecněním pojmu parciální derivace. Pro funkci n proměnných je situace analogická.

[1]Doslovný český překlad slova parciální je „částečný".

3.1. Parciální derivace 1. řádu

Definice 3.1. Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$.
To znamená, že

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_y(x_0, y_0)$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$).

Poznámka 3.2.

i) Má-li funkce $z = f(x, y)$ parciální derivace ve všech bodech množiny $N \subset \mathscr{D}(f)$, jsou tyto derivace funkcemi proměnných x, y. Označujeme je $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, popř. $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, z_x, z_y, z'_x, z'_y.

ii) Zcela analogicky se definují parciální derivace funkce n proměnných. Je-li $z = f(x_1, \dots, x_n)$ funkce n proměnných, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in \mathbb{R}^n$, definujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right].$$

iii) Z definice parciální derivace plyne, že při jejím výpočtu postupujeme tak, že všechny argumenty kromě toho, podle něhož derivujeme, považujeme za konstanty.

Protože parciální derivace f_{x_i} funkce n proměnných je definována jako „obyčejná" derivace podle proměnné x_i, platí pro počítání parciálních derivací obvyklá pravidla pro derivování. Uvedeme je přímo pro funkci n proměnných.

Věta 3.3. *Nechť funkce $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají parciální derivaci podle proměnné x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, na otevřené množině M. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na M parciální derivaci podle x_i a platí*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [f(x) \pm g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \pm \frac{\partial}{\partial x_i} g(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x)g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\, g(x) + g(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\, g(x) - f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)}{g^2(x)},$$

přičemž tvrzení o podílu derivací platí za předpokladu, že $g(x) \neq 0$.

Příklad 3.4.

i) Vypočtěte parciální derivace funkce dvou proměnných:

a) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, b) $z = x^y$, $x > 0$.

Řešení.

a) Při výpočtu parciální derivace podle proměnné x považujeme proměnnou y za konstantu, tj.

$$z_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Analogicky

$$z_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

b) Parciální derivaci podle x určíme jako derivaci mocninné funkce a derivaci podle y jako derivaci exponenciální funkce se základem x, tj.

$$z_x = yx^{y-1}, \quad z_y = x^y \ln x.$$

▲

ii) Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\, e^{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Řešení. Při výpočtu parciální derivace podle proměnné x_i považujeme všechny ostatní proměnné za konstanty:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\, e^{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right] =$$

$$= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} e^{x_1^2 + \dots + x_n^2} + 2x_i \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\, e^{x_1^2 + \dots + x_n^2} =$$

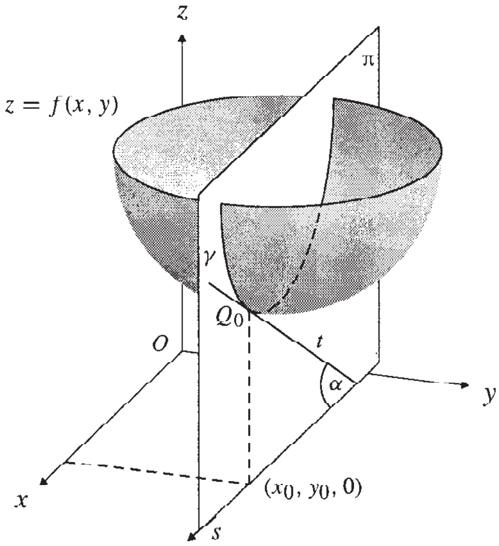
$$= \frac{x_i e^{x_1^2 + \dots + x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \left[1 + 2(x_1^2 + \dots + x_n^2)\right].$$

▲

Geometrický význam parciálních derivací.

Nechť je dána funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a G_f je její graf. Nechť π je rovina daná rovnicí $y = y_0$. Za rozumných předpokladů (např. spojitost funkce f) je průsečíkem $G_f \cap \cap\, \pi$ křivka γ v rovině π a parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $Q_0 = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, viz vedlejší obrázek. (Připomeňme, že směrnice tečny t je $\operatorname{tg} \alpha$.)

Podobně, derivace $f_y(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce v bodě Q_0, která vznikne průsečíkem plochy G_f s rovinou $x = x_0$.



Zatímco u funkcí jedné proměnné plyne z existence derivace v daném bodě její spojitost, u funkcí více proměnných toto tvrzení neplatí.

Má-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$, nemusí být v tomto bodě spojitá, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 3.5. Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ obě parciální derivace (rovny nule) a není zde spojitá, neboť v tomto bodě neexistuje limita (grafem funkce je podstavná rovina, z níž je „vyzdvižen“ osový kříž).

Skutečnost, že z existence parciálních derivací neplyne spojitost, je zcela přirozená. Parciální derivace totiž udávají informaci pouze o chování funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami, v jiných směrech se funkce může chovat „velmi divoce“.

3.2. Derivace vyšších řádů

Definice 3.6. Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.
Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Obdobně definujeme parciální derivace 2. řádu $f_{yx}(x_0, y_0)$ a $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Parciální derivace n-tého řádu ($n \geqq 3$) definujeme jako parciální derivace derivací $(n-1)$-ního řádu.

Příklad 3.7.
i) Vypočtěte derivace 2. řádu obou funkcí z příkladu 3.4 i).

Řešení.
a) V případě funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ jsme vypočetli $z_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{x}{x^2+y^2}$. Odtud

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Podobně

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

b) Pro funkci $z = x^y$ z části b) je $z_x = yx^{y-1}$, $z_y = x^y \ln x$. Odtud

$$z_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \qquad z_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$z_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^y\frac{1}{x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad z_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

▲

ii) Ukažte, že pro funkci $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ platí $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.[1]

[1] Uvedený příklad hraje důležitou roli ve fyzice; podrobněji viz příklad 5.9 ii).

Řešení. Při výpočtu parciálních derivací využijeme skutečnost, že funkce u závisí na proměnných x, y, z symetricky. Platí

$$u_x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$u_{xx} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} =$$
$$= -\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Ze symetrické závislosti na zbývajících proměnných pak dostáváme

$$u_{yy} = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$u_{zz} = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Odtud nyní snadno ověříme platnost rovnice $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$. ▲

Všimněte si, že u obou funkcí v části i) předcházejícího příkladu vyšla rovnost $z_{xy} = z_{yx}$. Následující věta ukazuje, že tyto rovnosti nejsou náhodné.

Věta 3.8 (Schwarzova[1]). *Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{3.2}$$

Důkaz. Provedeme za silnějšího předpokladu, kdy existují obě smíšené parciální derivace f_{xy} a f_{yx} v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a jsou v tomto bodě spojité. Obecný případ viz [F]. Označme δ-okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž jsou tyto parciální derivace definovány, jako $\mathscr{U} = (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta)$. Pro $0 < h < \delta$ položme

$$F(h) = \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)}{h^2} \tag{3.3}$$

a dále označme $\varphi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$, $\psi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$. Funkci F pak můžeme psát ve tvaru

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\left[\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)\right] = \frac{1}{h^2}\left[\psi(x_0+h) - \psi(x_0)\right].$$

[1] Karl Schwarz (1843–1921), německý matematik, žák K. Weierstrasse.

Podle Lagrangeovy[1] věty existuje $\vartheta_1 \in (0, 1)$ takové, že

$$\varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0) = h\varphi'(y_0 + \vartheta_1 h) = \\ = h\left[f_y(x_0 + h, y_0 + \vartheta_1 h) - f_y(x_0, y_0 + \vartheta_1 h)\right].$$

Označme ještě $g(x) = f_y(x, y_0 + \vartheta_1 h)$. Pak $g'(x) = f_{yx}(x, y_0 + \vartheta_1 h)$ a rozdíl v poslední hranaté závorce je (opět podle Lagrangeovy věty) $g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0 + \vartheta_2 h) = f_{yx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_1 h)$, kde $\vartheta_2 \in (0, 1)$. Dosadíme-li odtud do (3.3), dostáváme

$$F(h) = f_{yx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_1 h), \quad \vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1).$$

Aplikujeme-li nyní úplně stejné úvahy na funkci ψ, dostáváme

$$F(h) = f_{xy}(x_0 + \vartheta_3 h, y_0 + \vartheta_4 h), \quad \vartheta_3, \vartheta_4 \in (0, 1).$$

Poslední dva vztahy a spojitost funkcí f_{xy}, f_{yx} v bodě $[x_0, y_0]$ implikují

$$\lim_{h\to 0} F(h) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \text{a současně} \quad \lim_{h\to 0} F(h) = f_{xy}(x_0, y_0),$$

platí tedy (3.2). □

Následující příklad ukazuje, že bez předpokladu spojitosti smíšených parciálních derivací rovnost (3.2) obecně neplatí (viz také příloha, příklad P.6).

Příklad 3.9. Nechť funkce f je dána předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{pro } |x| \geqq |y|, \\ 0 & \text{pro } |x| < |y|. \end{cases}$$

Pak pro $y \neq 0$ je $f_x(0, y) = 0$ a pro $y = 0$ je podle definice parciální derivace

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot h - 0}{h} = 0.$$

Pro $x \neq 0$ a h v absolutní hodnotě dostatečně malá je $f(x, h) = xh$, tedy

$$f_y(x, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{xh - 0}{h} = x$$

a konečně

$$f_y(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

[1] Joseph Louis Lagrange (1736–1813), francouzský matematik.

Využitím těchto výsledků plyne z definice parciálních derivací 2. řádu

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

Matematickou indukcí můžeme tvrzení Schwarzovy věty rozšířit pro derivace vyšších řádů.

Věta 3.10. *Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu n, pak hodnota parciální derivace řádu n v libovolném bodě z tohoto okolí závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné x a kolikrát podle proměnné y, nikoliv na pořadí, v jakém se podle těchto proměnných derivovalo.*

3.3. Směrové derivace

Parciální derivace funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ jsou obyčejné derivace, které získáme zúžením definičního oboru funkce f na přímku jdoucí bodem x a rovnoběžnou s i-tou souřadnicovou osou. Zobecněním parciálních derivací jsou směrové derivace, které získáme zúžením definičního oboru funkce na přímku jdoucí bodem x a mající směr daného vektoru $u \in \mathbb{V}^n$. To znamená, že vyšetřujeme funkci $\varphi(t) = f(x + tu)$, která je již funkcí jedné proměnné, a pro ni je pojem derivace již dobře znám.

Poznamenejme, že $\mathbb{V}^n$ je standardní označení pro zaměření n-rozměrného eukleidovského prostoru.

Definice 3.11. Nechť f je funkce n proměnných, x je vnitřní bod $\mathscr{D}(f)$, $u \in \mathbb{V}^n$. Položme $\varphi(t) = f(x + tu)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě 0, nazýváme ji *směrovou derivací* funkce f v bodě x (derivací f ve směru vektoru u) a označujeme $f_u(x)$. To znamená, že

$$f_u(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}.$$

Poznámka 3.12.

i) Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je standardní báze v $\mathbb{V}^n$ (vektor e_i má na i-tém místě jedničku a na ostatních místech nuly). Pak $f_{e_i}(x) = f_{x_i}(x)$, tj. směrová derivace podle vektoru e_i, je totožná s parciální derivací podle proměnné x_i.

ii) Jelikož je směrová derivace obyčejnou derivací funkce φ, platí pro počítání tato pravidla: Nechť existuje f_u, g_u v bodě $x \in \mathbb{R}^n$. Pak:

a) pro všechna $c \in \mathbb{R}$ existuje $f_{cu}(x)$ a platí $f_{cu}(x) = cf_u(x)$,

b) $(f \pm g)_u(x) = f_u(x) \pm g_u(x)$,

c) $(fg)_u(x) = f_u(x)g(x) + f(x)g_u(x)$,

d) je-li $g(x) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)_u (x) = \frac{f_u(x)g(x) - f(x)g_u(x)}{g^2(x)}.$$

iii) Naopak neplatí aditivita směrových derivací vzhledem ke směrům. Jestliže existují f_u, f_v, nemusí existovat f_{u+v}, a pokud existuje f_{u+v}, může být $f_u + f_v \neq f_{u+v}$, viz následující příklad, část ii).

iv) V příkladu 3.5 jsme ukázali, že z existence parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ neplyne spojitost funkce. V části iii) následujícího příkladu ukážeme, že ani existence směrové derivace v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru libovolného vektoru $u \in \mathbb{V}^2$ není postačující pro spojitost. To je na první pohled překvapující skutečnost. Uvědomíme-li si však, že směrové derivace popisují chování funkce f, blížíme-li se k bodu $[x_0, y_0]$ *po přímkách*, a definice limity (pomocí níž je definována spojitost v bodě $[x_0, y_0]$) zachycuje *všechny* způsoby „přiblížení" (např. po parabolách), je toto zcela přirozené.

Příklad 3.13.

i) Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[1, -1]$ ve směru vektoru $u = (1, 2)$.

Řešení. Přímým dosazením do definice a využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} f_{(1,2)}(1, 1) &= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{arctg}[(1+t)^2 + (-1+2t)^2] - \operatorname{arctg} 2}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2 - 2t + 5t^2) - \operatorname{arctg} 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-2 + 10t}{1 + (2 - 2t + 5t^2)^2} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

▲

ii) Ukažte, že pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } (x, y) = [0, 0] \end{cases}$$

a vektory $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ existují $f_u(0, 0)$, $f_v(0, 0)$, $f_{u+v}(0, 0)$, avšak přitom $f_{u+v}(0, 0) \neq f_u(0, 0) + f_v(0, 0)$.

Řešení. Platí $f_u = f_x$, $f_v = f_y$. Protože $f(t, 0) = 0 = f(0, t)$, je $f_u(0, 0) = = 0 = f_v(0, 0)$. Pro derivaci ve směru vektoru $u + v = (1, 1)$ dostáváme z definice směrové derivace

$$f_{u+v}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(0 + t, 0 + t) - f(0, 0)] = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cdot 2t}{2t^3} = 1.$$

Tedy $1 = f_{u+v}(0, 0) \neq f_u(0, 0) + f_v(0, 0) = 0$. ▲

iii) Ukažte, že funkce f definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}, & \text{pro } (x, y) \neq [0, 0], \\ 0, & \text{pro } (x, y) = [0, 0] \end{cases}$$

má v bodě [0, 0] směrovou derivaci ve směru libovolného vektoru $u \in \mathbb{V}^2$, a přesto není v tomto bodě spojitá.

Řešení. Je-li $0 \neq u = (u_1, u_2) \in \mathbb{V}^2$ libovolný, podle definice směrové derivace platí

$$f_u(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)\big] =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4u_1^4 \cdot t^2u_2^2}{t(t^8u_1^8 + t^4u_2^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{tu_1^4u_2}{t^4u_1^8 + u_2^4} = 0.$$

Blížíme-li se k bodu [0, 0] po parabolách $y = kx^2$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cdot k^2x^4}{x^8 + k^4x^8} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

To však znamená, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ neexistuje, tedy funkce f není v bodě [0, 0] spojitá. ▲

Definujeme-li směrové derivace 2. řádu vztahem

$$f_{uv}(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{f_u(x^* + tv) - f_u(x^*)}{t},$$

platí analogické tvrzení jako věta o záměnnosti smíšených parciálních derivací.

Věta 3.14. *Nechť $u, v \in \mathbb{V}^n$, funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě x^* spojité směrové derivace f_{uv} a f_{vu}. Pak jsou si tyto derivace rovny, tj.*

$$f_{uv}(x^*) = f_{vu}(x^*).$$

Poznámka 3.15. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x^* spojité parciální derivace 2. řádu, a označme $f''(x^*) = (f_{x_ix_j})$, $i, j = 1, \dots, n$ matici parciálních derivací druhého řádu funkce f v bodě x^* (tato matice se někdy nazývá *Hessova matice* funkce f v bodě x^*), pak pro libovolná $u, v \in \mathbb{V}^n$ existuje smíšená směrová derivace $f_{uv}(x^*)$ a platí

$$f_{uv}(x^*) = f_{vu}(x^*) = \langle f''(x^*)u, v\rangle = \langle f''(x^*)v, u\rangle,$$

kde $\langle , \rangle$ je obvyklý skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

3.4. Lagrangeova věta o střední hodnotě

Jedním z důležitých tvrzení diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné je Lagrangeova věta o střední hodnotě. Ta říká, že pro diferencovatelnou funkci $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ lze rozdíl $f(b) - f(a)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \text{kde } \xi \in (a, b).$$

Její analogií pro funkce dvou proměnných jsou následující dvě tvrzení: první pro parciální derivace, kdy „body střední hodnoty" leží na hranici obdélníku určeného danými dvěma body, a druhé pro směrovou derivaci.

Věta 3.16. *Předpokládejme, že funkce f má parciální derivace f_x a f_y ve všech bodech nějakého obdélníku $M \subseteq \mathbb{R}^2$, a nechť $[x_0, y_0], [x_1, y_1] \in M$. Pak existují čísla ξ, η ležící mezi x_0, x_1, resp. y_0, y_1 taková, že*

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_1)(x_1 - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y_1 - y_0).$$

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) &= f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1) + f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0) = \\ &= f_x(\xi, y_1)(x_1 - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y_1 - y_0). \end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme aplikovali Lagrangeovu větu pro funkce jedné proměnné na funkce $\varphi(x) = f(x, y_1)$ a $\psi(y) = f(x_0, y)$. □

Poznámka 3.17. Body $[\xi, y_1]$, $[x_0, \eta]$ leží na sousedních stranách obdélníku určeného body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$ se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami, (načrtněte si obrázek). Upravíme-li si rozdíl $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$ poněkud odlišně, a to

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) + f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0),$$

dostáváme nepatrně odlišné vyjádření

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi_1, y_0)(x_1 - x_0) + f_y(x_1, \eta_1)(y_1 - y_0).$$

V tomto vyjádření body $[\xi_1, y_0]$ a $[x_1, \eta_1]$ leží na zbývajících dvou stranách obdélníku.

Projdeme-li důkaz věty 3.16, snadno zformulujeme analogickou větu pro funkce n proměnných. Jsou-li $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$, $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, existují body $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^n$ ležící na hranách n-rozměrného kvádru určeného body x^* a x takové, že

$$f(x) - f(x^*) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k)(x_k - x_k^*).$$

Aplikujeme-li Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci jedné proměnné na funkci $\varphi(t) = f(x + tu)$, dostáváme větu o přírůstku v následujícím tvaru.

Věta 3.18. *Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má derivaci ve směru vektoru $u \in \mathbb{V}^n$ ve všech bodech úsečky $\{x + tu;\ t \in [0, 1]\}$. Pak existuje takové číslo $\vartheta \in (0, 1)$, že platí*

$$f(x + u) - f(x) = f_u(x + \vartheta u).$$

Cvičení

3.1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$,
b) $z = \frac{x^3\sqrt{y} - 3y}{\sqrt{x}}$,
c) $z = x \sin(x + 2y)$,
d) $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$,
e) $u = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} - z\sqrt{1 - x^2 - y^2}$,
f) $z = \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$,
g) $z = \ln\left(\frac{x+4}{y^2}\right)$,
h) $z = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$,
i) $z = \frac{\cos x^2}{y}$,
j) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$,
k) $u = \mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}$,
l) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$,
m) $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
n) $u = \ln\frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3.2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $z = x^{xy}$,
b) $z = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$,
c) $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{y}}$,
d) $z = xy\ln(x + y)$,
e) $z = (2x + y)^{2x+y}$,
f) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\frac{x+y}{xy}$.
g) $z = xy\,\mathrm{e}^{\sin \pi xy}$,
h) $u = x^{\frac{y}{z}}$,
i) $z = \operatorname{arctg}(x - y)^2$,
j) $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$,
k) $u = x^{y^z}$,

3.3. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu následujících funkcí v daných bodech:

a) $z = y^2 + y\sqrt{1 + x^2}$ v $[2, 5]$,
b) $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ v $[1, 2]$,
c) $z = \frac{x\cdot\cos y - y\cdot\cos x}{1 + \sin x + \sin y}$ v $[0, 0]$.

3.4. a) Vypočtěte u_z v bodě $\left[0, 0, \frac{\pi}{4}\right]$, je-li $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$.
b) Vypočtěte $u_x + u_y + u_z$ v bodě $[1,1,1]$, je-li $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$.

3.5. Ověřte rovnost $z_{xy} = z_{yx}$ u funkcí:

a) $z = x^2 - 2xy - 3y^2$, b) $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

3.6. Najděte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$,

b) $z = \frac{xy+x}{y}$,

c) $z = \frac{x}{y^2}$,

d) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

e) $z = x\sin(x+y)$,

f) $z = \frac{\cos x^2}{y}$,

g) $z = x^{x+y}$,

h) $z = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,

i) $z = \ln(x+y^2)$,

j) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$,

k) $z = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

l) $z = (1+x^2)^y$.

*

Nikdy nepovažujte své studium za povinnost, ale za záviděníhodnou příležitost naučit se poznávat osvobozující účinky krásy ve sféře ducha, abyste z toho vy získali osobní potěšení, a společenství, k němuž budete později patřit, výhody. (A. Einstein)

*

Kapitola 4

Diferenciál funkce

Diferenciálem funkce f jedné proměnné v bodě x_0 rozumíme *přírůstek funkce na tečně* vedené ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$. V tomto případě existence diferenciálu neboli diferencovatelnost funkce je ekvivalentní existenci derivace v bodě x_0. Připomeňme, že $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě x_0, jestliže existuje reálné číslo A takové, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

U funkce n proměnných ($n \geqq 2$) je totální diferenciál definován analogicky: je to přírůstek funkce na tečné nadrovině vedené ke grafu funkce bodem $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Přesnou definici pojmu tečná nadrovina uvedeme později; v podstatě je to nadrovina (tj. afinní podprostor dimenze $n-1$), která má s grafem funkce lokálně (tj. v okolí bodu, kde tečnou nadrovinu sestrojujeme) společný právě jeden bod.

Se zavedením těchto pojmů okamžitě vznikají tyto otázky: *Kdy v daném bodě existuje tečná nadrovina ke grafu funkce neboli kdy je funkce diferencovatelná? Stačí k tomu pouhá existence parciálních derivací jako u funkce jedné proměnné?*

Odpovědi na tyto a další podobné otázky jsou obsahem této kapitoly.

4.1. Diferencovatelná funkce, diferenciál

Nejdříve definujme pojem diferencovatelnosti a diferenciálu pro funkce dvou proměnných.

Definice 4.1. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{4.1}$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h, k se nazývá *diferenciál funkce* v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k)$, příp. $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

Poznámka 4.2.

i) Ekvivalentní zápis definice diferencovatelnosti funkce dvou proměnných je tento: existují $A, B \in \mathbb{R}$ a funkce $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \tau(h, k), \tag{4.2}$$

kde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\tau(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{4.3}$$

ii) Jmenovatel limity ve výrazu (4.1) je velikost vektoru (h, k) v eukleidovské metrice. V odstavci 2.1 jsme zdůraznili ekvivalentnost metrik ρ_1, ρ_2 a ρ_∞. Proto nahradíme-li výraz $\sqrt{h^2+k^2}$ výrazem $|h| + |k|$ (velikost (h, k) v metrice ρ_1) nebo výrazem $\max\{|h|, |k|\}$ (velikost (h, k) v metrice ρ_∞), dostaneme definici ekvivalentní s definicí 4.1.

V předchozí kapitole jsme ukázali, že pro funkce dvou a více proměnných z existence parciálních ani směrových derivací neplyne spojitost. Následující dvě věty ukazují, že diferencovatelnost funkce je tou „správnou" vlastností, která implikuje spojitost a některé další vlastnosti funkce.

Věta 4.3. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Z diferencovatelnosti funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ plyne

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)] = \lim_{(h,k)\to(0,0)} [Ah + Bk + \tau(h, k)] = 0,$$

neboť podle poznámky 4.2 i) je $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \tau(h, k) = 0$. Odtud

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0),$$

funkce f je tedy spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. □

Poznámka 4.4. Opak této věty neplatí. Je-li funkce spojitá, nemusí být diferencovatelná, např. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[0, 0]$.

Věta 4.5. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$, tj.*

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,h + f_y(x_0, y_0)\,k. \tag{4.4}$$

Důkaz. Položme v (4.1) $k = 0$. Pak $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - Ah}{|h|} = 0$, a proto

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - Ah}{h} &= \\ = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A &= f_x(x_0, y_0) - A = 0,\end{aligned}$$

tj. $A = f_x(x_0, y_0)$. Stejným obratem dokážeme rovnost $f_y(x_0, y_0) = B$. □

Poznámka 4.6.

i) Přírůstky h, k nezávisle proměnných x, y v definici diferenciálu se často značí dx, dy (především ve starší literatuře a v literatuře s fyzikálním zaměřením).

ii) Je-li funkce f diferencovatelná v každém bodě množiny M, má v každém bodě této množiny diferenciál, který je funkcí čtyř proměnných: x, y, h, k. Označíme-li $dx = x - x_0 = h$, $dy = y - y_0 = k$, dostáváme, že diferenciál funkce f je

$$df(x, y) = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy.$$

iii) Diferenciál se používá k přibližnému výpočtu funkčních hodnot. Zanedbáme-li funkci τ, z (4.2) plyne

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0). \tag{4.5}$$

Geometrický význam totálního diferenciálu.

Rovina v $\mathbb{R}^3$ o rovnici $z = Ax + By + C$ se nazývá *tečnou rovinou* ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, platí-li

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Má-li tato rovina procházet bodem T, musí tento bod vyhovovat rovnici roviny, tj. $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$, odkud $z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0)$.

Tato rovina je tečnou rovinou, jestliže existuje diferenciál funkce v bodě $[x_0, y_0]$, tj. podle věty 4.5 je $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$. Rovnice tečné roviny má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{4.6}$$

Odtud je vidět, že diferenciál funkce v daném bodě je přírůstek funkce na tečné rovině. Funkce $\tau(h, k)$ z poznámky 4.2 i) určuje rozdíl mezi skutečným přírůstkem a přírůstkem na tečné rovině. Rovnice tečné roviny je nejlepší lineární aproximací funkce $f(x, y)$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Příklad 4.7. Z definice diferenciálu určete $\mathrm{d}f$ a funkci τ pro $f(x, y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x, y]$.

Řešení. Platí

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = (x+h)^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2 = 2xh + 2yk + h^2 + k^2.$$

Je tedy $\mathrm{d}f(x, y)(h, k) = 2xh + 2yk$ a $\tau(h, k) = h^2 + k^2$. ▲

Příklad 4.8.

i) Pomocí totálního diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $1{,}04^{2{,}02}$;   b) $\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}05)^2}$.

Řešení.

a) K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x, y) = x^y$ v bodě $[1, 2]$ s diferencemi $\mathrm{d}x = 0{,}04$, $\mathrm{d}y = 0{,}02$. Platí

$$\mathrm{d}f(x, y) = yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y \ln x \mathrm{d}y, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}f(1, 2) = 2\,\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x,$$

a tedy podle (4.5)

$$1{,}04^{2{,}02} = f(1{,}04; 2{,}02) \doteq f(1, 2) + \mathrm{d}f(1, 2) = 1{,}08.$$

b) K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[3, 4]$ s diferencemi $\mathrm{d}x = -0{,}02$, $\mathrm{d}y = 0{,}05$. Platí

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a dosazením do (4.5) dostáváme

$$\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}05)^2} \doteq 5 + \frac{1}{5}(-3 \cdot 0{,}02 + 4 \cdot 0{,}05) = 5{,}028\,. \quad ▲$$

ii) Napište rovnici tečné roviny grafu funkce $z = x^2 + y^2$ v bodě [1, 1, ?].

Řešení. Dosazením do funkčního předpisu najdeme z-ovou souřadnici dotykového bodu $z = 1^2 + 1^2 = 2$. Nyní přímým dosazením do vzorce pro tečnou rovinu dostáváme její rovnici $z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$, tj. $2x + 2y - z - 2 = 0$. ▲

Jak již víme, ze samotné existence parciálních derivací funkce v bodě $[x_0, y_0]$ neplyne diferencovatelnost (viz příklad 3.5). Jsou-li však tyto derivace v tomto bodě *spojité*, je diferencovatelnost zaručena, jak ukazuje následující věta.

Věta 4.9. *Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak má v tomto bodě také diferenciál.*

Důkaz. Ze spojitosti parciálních derivací f_x, f_y v bodě $[x_0, y_0]$ plyne jejich existence v jistém okolí tohoto bodu. Podle věty 3.16 platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_x(x_0+\vartheta_1 h, y_0+k)h + f_y(x_0, y_0+\vartheta_2 k)k - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f_x(x_0+\vartheta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0, y_0)] \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \\
&\quad + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[f_y(x_0, y_0+\vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0)\right] \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,
\end{aligned}$$

neboť ze spojitosti parciálních derivací plyne, že limity výrazů v hranatých závorkách jsou nulové, a platí

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1, \qquad \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1,$$

tj. podle věty 2.5 je výsledná limita nulová. Dokázali jsme platnost (4.1). □

Příklady funkcí, které jsou, resp. nejsou diferencovatelné v daném bodě jsou uvedeny v příloze, viz příklady P.7, P.8, P.9.

Obecně — funkce n proměnných $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{V}^n$ takové, že pro $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{V}^n$ platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x^*+h) - f(x^*) - \langle a, h\rangle}{\|h\|} = 0,$$

kde $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$ a $\langle a, h\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ je obvyklý skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Diferenciálem funkce f v bodě x^* pak rozumíme lineární funkci definovanou předpisem

$$h \overset{\mathrm{d}f(x^*)}{\longmapsto} \langle a, h\rangle,$$

tj. $\mathrm{d}f(x^*)(h) = \langle a, h\rangle$. Stejně jako ve větách 4.3 a 4.5, z existence diferenciálu v bodě x^* plyne spojitost funkce a existence parciálních derivací v tomto bodě a pro vektor těchto parciálních derivací $f'(x^*)$ platí $f'(x^*) = a$, tj. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Na závěr tohoto odstavce ukážeme, že z diferencovatelnosti funkce plyne — kromě spojitosti a existence parciálních derivací — také existence směrové derivace ve směru libovolného vektoru. Ukážeme rovněž, jak lze pomocí diferenciálu tyto směrové derivace spočítat.

Věta 4.10. *Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$, a nechť $u \in \mathbb{V}^n$. Pak existuje směrová derivace $f_u(x^*)$ a platí*

$$f_u(x^*) = \langle f'(x^*), u\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^*) u_k.$$

Důkaz. Nechť f je diferencovatelná v bodě x^*. Z definice směrové derivace dostáváme

$$f_u(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^* + tu) - f(x^*)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}f(x^*)(tu) + \tau(tu)}{t} =$$

$$= \mathrm{d}f(x^*)(u) + \|u\| \lim_{t\to 0} \frac{\tau(tu)}{\|tu\|} = \mathrm{d}f(x^*)(u) = \langle f'(x^*), u\rangle,$$

neboť $\lim_{t\to 0} \frac{\tau(tu)}{\|tu\|} = 0$. □

Ve fyzikální terminologii se vektor $f'(x^*)$ nazývá *gradient* funkce f v bodě x^* a značí se $\operatorname{grad} f(x^*)$. Z lineární algebry víme, že skalární součin $\langle \operatorname{grad} f(x^*), u\rangle$ nabývá pro vektory u dané konstantní délky největší hodnotu, jestliže jsou vektory $\operatorname{grad} f(x^*)$ a u lineárně závislé. Protože směrová derivace $f_u(x^*)$ udává rychlost změny funkce f ve směru vektoru u, je $\operatorname{grad} f(x^*)$ směr, v němž funkce f v bodě x^* nejrychleji roste. Podobně $-\operatorname{grad} f(x^*)$ je směr, v němž funkce nejrychleji klesá.

Poznámka 4.11. Diferenciál definovaný v definici 4.1 se nazývá také *totální* nebo *Fréchetův* a lze jej definovat i pro zobrazení mezi lineárními normovanými prostory, což jsou většinou nekonečně dimenzionální prostory. Kromě toho existují jiné, obecnější diferenciály, používané často v diferenciálním počtu v normovaných lineárních prostorech, např. *slabý (Gâteauxův)* diferenciál. Podrobnější informace o této problematice lze nalézt ve skriptu [N].

4.2. Diferenciály vyšších řádů

V tomto odstavci zavedeme diferenciály vyšších řádů pro funkce více proměnných. Připomeňme, že diferenciál m-tého řádu funkce jedné proměnné v bodě $x \in \mathbb{R}$ je mocninná funkce m-tého stupně přírůstku h

$$\mathrm{d}^m f(x)(h) = f^{(m)}(x) h^m.$$

Přírůstek h se často označuje také $\mathrm{d}x$, tj. $\mathrm{d}^m f(x) = f^{(m)}(x)(\mathrm{d}x)^m$, přičemž existence diferenciálu m-tého řádu je ekvivalentní existenci derivace $f^{(m)}(x)$.

Pojem diferenciálu m-tého řádu funkce n proměnných bychom mohli definovat pomocí jisté limity jako v definici 4.1 pro diferenciál prvního řádu a pak ukázat, že z existence m-tého diferenciálu plyne existence parciálních derivací m-tého řádu, které jsou rovny jistým konstantám vystupujícím v limitním vztahu definujícím m-tý diferenciál (srovnej s větou 4.3 pro $m = 1$). Podrobně je tento postup uveden ve skriptu [N]. Zde pro jednoduchost uvedeme pouze konečný výsledek, který nejprve zformulujeme pro funkci dvou proměnných.

Definice 4.12. Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu m včetně. *Diferenciálem m-tého řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme homogenní funkci m-tého stupně

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}.$$

Poznámka 4.13. Pro případ $m = 1$ je vzorec pro $\mathrm{d}^m f$ samozřejmě totožný se vztahem (4.4). Pro $m = 2, 3$ dostáváme diferenciály 2. a 3. řádu

$$\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2,$$

$$\mathrm{d}^3 f(x_0, y_0) =$$

$$= f_{xxx}(x_0, y_0)h^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)h^2k + 3f_{xyy}(x_0, y_0)hk^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)k^3.$$

Pro případ n proměnných je diferenciál m-tého řádu homogenní funkce n proměnných $h = (h_1, \dots, h_n)$

$$\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = \sum_{j_1+\dots+j_n=m} \frac{m!}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(x^*) h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n}.$$

Tento vztah se často zapisuje pomocí formálního umocnění takto:

$$\mathrm{d}^m f(x^*) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(x^*),$$

přičemž po „normálním" umocnění nahradíme součiny

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} f(x^*) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n} f(x^*)$$

členy

$$\frac{\partial^{j_1} f}{\partial x_1^{j_1}}(x^*) \cdots \frac{\partial^{j_n} f}{\partial x_n^{j_n}}(x^*).$$

Např. diferenciál 2. řádu funkce dvou proměnných lze pomocí formálního umocnění zapsat takto:

$$\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0).$$

4.3. Kmenová funkce

V tomto odstavci řešíme následující úlohu: Je dána dvojice funkcí dvou proměnných $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Máme rozhodnout, zda existuje funkce $H(x, y)$ taková, že

$$H_x = P, \quad H_y = Q.$$

V kladném případě máme tuto funkci určit.

Funkce H se nazývá *kmenová funkce* funkcí P, Q. Odpověď na otázku existence kmenové funkce dává následující věta.

Věta 4.14. *Nechť P, Q jsou spojité funkce proměnných x, y definované na otevřené jednoduše souvislé*[1] *množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, které mají na této množině spojité parciální derivace P_y, Q_x. Pak výraz $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ je diferenciálem nějaké funkce, právě když platí*

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \quad \textit{pro každé } [x, y] \in \Omega. \tag{4.7}$$

Důkaz.

„$\Leftarrow$":

Provedeme za silnějšího předpokladu, kdy množinou Ω je obdélník se stranami rovnoběžnými s osami x,y. Nechť platí (4.7) a $[x_0, y_0] \in \Omega$ je libovolné. Položme

$$H(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak $H_x(x, y) = P(x, y)$ a

$$\begin{aligned} H_y(x, y) &= Q(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} P_y(t, y)\,\mathrm{d}t = Q(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} Q_x(t, y)\,\mathrm{d}t = \\ &= Q(x_0, y) + Q(t, y)|_{t=x_0}^{t=x} = Q(x, y). \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$":

Je-li výraz $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ diferenciálem nějaké kmenové funkce H, pak $P = H_x$, $Q = H_y$. Ze spojitosti parciálních derivací P_y, Q_x plyne spojitost smíšených derivací H_{xy} a H_{yx}, které jsou si rovny (Schwarzova věta), a rovnost $H_{xy} = H_{yx}$ je ekvivalentní rovnosti (4.7). □

[1] Oblast Ω se nazývá jednoduše souvislá, jestliže libovolnou uzavřenou křivku ležící v Ω lze spojitě deformovat v Ω do bodu.

Příklad 4.15. Rozhodněte, zda výraz $(x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + (5-2xy)\,\mathrm{d}y$ je diferenciálem nějaké funkce; v případě že ano, určete tuto (kmenovou) funkci.

Řešení. Nejprve ověříme, zda je uvedený výraz opravdu diferenciálem. Platí

$$\frac{\partial}{\partial x}(5-2xy) = -2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) = -2y,$$

tj. podle věty 4.14 je zadaný výraz diferenciálem jisté kmenové funkce H. Dále platí

$$H(x,y) = \int (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - y^2x + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ hraje roli integrační konstanty, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním podle y a dosazením do vztahu $H_y = Q$ dostáváme

$$H_y = -2xy + \varphi'(y) = 5 - 2xy,$$

odkud $\varphi'(y) = 5$, tj. $\varphi(y) = 5y + c$. Vypočítali jsme, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$H(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + 5y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

▲

Poznámka 4.16. Pojem kmenové funkce také úzce souvisí s tzv. *exaktní diferenciální rovnicí.* Uvažujme diferenciální rovnici (tj. rovnici, kde neznámou je funkce $y = y(x)$, která v rovnici vystupuje spolu se svými derivacemi)

$$y' = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}. \tag{4.8}$$

Dosadíme-li $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a vynásobíme-li rovnost (4.8) jmenovateli zlomků, dostáváme rovnici

$$a(x,y)\,\mathrm{d}x - b(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Tato rovnice se nazývá *exaktní*, je-li $-a_y(x,y) = b_x(x,y)$, tj. právě když je výraz na levé straně rovnice diferenciálem. Je-li H příslušná kmenová funkce, je řešení $y = f(x)$ rovnice (4.8) zadáno rovností $H(x,y) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (říkáme, že funkce $y = f(x)$ je zadána implicitně, viz kapitola 8).

Zcela analogický problém můžeme řešit pro funkce n proměnných. Podobně jako v důkazu věty 4.14 lze ukázat, že v případě n-tice funkcí $P_1, \dots, P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu je výraz $P_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_n(x)\,\mathrm{d}x_n$ diferenciálem jisté kmenové funkce n proměnných v bodě $x = [x_1, \dots, x_n]$, právě když

$$\frac{\partial}{\partial x_i}P_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}P_i(x), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad i \neq j.$$

Praktický postup při určování kmenové funkce v případě tří proměnných je ilustrován v následujícím příkladu.

Příklad 4.17. Rozhodněte, zda výraz $(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$ je diferenciálem jisté funkce $H(x, y, z)$. Pokud ano, tuto funkci určete.

Řešení. Nejprve ověříme, zda je daný výraz opravdu diferenciálem:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y+z) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x+z), \quad \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1 = \frac{\partial}{\partial z}(y+z), \quad \frac{\partial}{\partial z}(x+z) = 1 = \frac{\partial}{\partial y}(x+y).$$

Kmenovou funkci určíme takto:

$$H(x, y, z) = \int (y+z)\,dx = yx + zx + C(y, z),$$

kde funkce $C(y, z)$ opět hraje roli integrační konstanty. Derivováním podle y a z a porovnáním s funkcemi u dy, dz dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}H(x, y, z) = x + C_y(y, z) = x + z, \quad \text{tj.} \quad C_y(y, z) = z,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}H(x, y, z) = x + C_z(y, z) = x + y, \quad \text{tj.} \quad C_z(y, z) = y.$$

Tím jsme dostali stejný problém jako v příkladu 4.15, kdy je třeba určit funkci $C(z, y)$, jestliže známe obě její parciální derivace. Stejným postupem jako v příkladu 4.15 snadno zjistíme, že $C(y, z) = yz + c$, $c \in \mathbb{R}$. Zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$H(x, y, z) = xy + yz + xz + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

▲

Poznámka 4.18. Skutečnost, zda je výraz

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \tag{4.9}$$

diferenciálem jisté funkce, hraje fundamentální roli v teorii křivkových integrálů a v jejich fyzikálních aplikacích. Funkce P, Q, R můžeme chápat jako souřadnice nějakého silového pole v prostoru — vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ udává směr a velikost síly působící v bodě $[x, y, z]$. Toto pole se nazývá *konzervativní* nebo také *potenciálové*, jestliže se při pohybu v tomto poli po libovolné uzavřené křivce nevykoná žádná práce (tuto vlastnost má například pole gravitační). Lze ukázat, že pole $\mathbf{F}$ je *konzervativní*, právě když je výraz (4.9) diferenciálem jisté funkce H. Tato funkce se ve fyzikální terminologii nazývá *potenciál* silového pole.

Cvičení

4.1. Určete diferenciál funkce v daném bodě, popř. v obecném bodě tam, kde není konkrétní bod specifikován:

a) $z = xy + \frac{x}{y}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$,
b) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[x_0, y_0] = [1, -1]$,
c) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $[x_0, y_0] = [\sqrt{3}, 1]$,
d) $u = x^{\frac{y}{z}}$, $[x_0, y_0, z_0] = [2, 1, 1]$,
e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $[x_0, y_0] = [3, 4]$,
f) $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $[x_0, y_0] = [1, \sqrt{3}]$,
g) $u = \frac{z}{x^2+y^2}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 0, 1]$,
h) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$.

4.2. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně:

a) $\operatorname{arctg} \frac{1{,}02}{0{,}95}$, c) $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$, e) $\frac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \cdot (1{,}05)^4}}$,

b) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$, d) $\ln(0{,}97^2 + 0{,}05^2)$, f) $e^{0{,}05^3 - 0{,}02}$.

g) O kolik cm^3 se přibližně změní objem kužele s poloměrem podstavy $r = 10\,\mathrm{cm}$ a výškou $h = 10\,\mathrm{cm}$, zvětšíme-li poloměr podstavy o 5 mm a výšku o 5 mm zmenšíme.

h) O kolik přibližně musíme změnit výšku komolého jehlanu se čtvercovou základnou s délkami hran $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 1\,\mathrm{m}$ a výškou $v = 1\,\mathrm{m}$, jestliže a zvětšíme o 7 cm a b zmenšíme o 7 cm, chceme-li, aby objem zůstal nezměněn.

4.3. Rozhodněte, zda funkce f je diferencovatelná v bodě $[0, 0]$:

a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 1, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$

4.4. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce v daném bodě:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $[x_0, y_0, z_0] = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$,

b) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4]$,

c) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]$,

d) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 0, ?]$.

4.5. Na grafu funkce f najděte bod, v němž je tečná rovina (nadrovina) rovnoběžná s danou rovinou (nadrovinou):

a) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $\rho \equiv 12x + 3y - z = 0$,

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\rho \equiv ax + by - z = 0$,

c) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\rho \equiv x + y + z = 0$,

d) $f(x, y) = x^y$, $\rho \equiv x - z = 0$,

e) $f(x, y, z) = x\sqrt{z^2 + y^2}$, $\rho \equiv x + y - z - u = 0$,

f) $f(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $\rho \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = 0$.

4.6. Pomocí gradientu vypočtěte směrové derivace funkce f ve směru vektoru u v daném bodě:

a) $f(x, y) = xy$, $u = (1, 2)$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$,

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $u = (1, 0, 1)$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 1, 0]$.

4.7. Vypočtěte diferenciály vyšších řádů zadaných funkcí (v obecném bodě):

a) $z = x \ln(xy)$, $\mathrm{d}^2 z = ?$,

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$, $\mathrm{d}^2 z = ?$,

c) $z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{x+y}$, $\mathrm{d}^n z = ?$,

d) $z = \ln(x + y)$, $\mathrm{d}^n z = ?$,

e) $z = \frac{x+y}{x-y}$, $\mathrm{d}^n z = ?$,

f) $u = xyz\,\mathrm{e}^{x+y+z}$, $\mathrm{d}^n u = ?$.

4.8. Zjistěte, zda dané výrazy jsou totálními diferenciály nějaké funkce, a pokud ano, najděte je:

a) $(x + \ln y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right)\mathrm{d}y$,

b) $x \sin 2y\,\mathrm{d}x + x^2 \cos 2y\,\mathrm{d}y$,

c) $\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

d) $(y^2 - 1)\,\mathrm{d}x + (2xy + 3y)\,\mathrm{d}y$.

4.9. Zjistěte, zda dané výrazy jsou totálními diferenciály nějaké funkce, a pokud ano, najděte je:

a) $(3x^2 - 3yz + 2)\,\mathrm{d}x + (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)\,\mathrm{d}y + (3z^2 - 3xy + 1)\,\mathrm{d}z$,

b) $\frac{yz\,\mathrm{d}x}{1+x^2y^2z^2} + \frac{xz\,\mathrm{d}y}{1+x^2y^2z^2} + \frac{xy\,\mathrm{d}z}{1+x^2y^2z^2}$.

*

Moudrost není produktem vzdělání, ale celoživotním úsilím. (A. Einstein)

*

Kapitola 5

Derivace složené funkce, Taylorův vzorec

Stejně jako u funkce jedné proměnné potřebujeme u funkcí více proměnných určit parciální derivace složené funkce. To je obsahem prvního odstavce, kde také ukážeme použití odvozených vzorců. Druhý odstavec této kapitoly je věnován Taylorovu vzorci pro funkci více proměnných. Podrobnější srovnání s funkcí jedné proměnné provedeme v každém odstavci zvlášť.

5.1. Parciální derivace složených funkcí

Vzorce pro parciální derivace složených funkcí jsou jedním z nejdůležitějších nástrojů řešení rovnic matematické fyziky. Tyto rovnice jsou tzv. *parciální diferenciální rovnice* — to jsou rovnice, které obsahují parciální derivace neznámé funkce a jejichž řešení jsou funkce dvou či více proměnných. Odvozené vzorce umožňují transformovat tyto rovnice na jednodušší tvar, z něhož buď již umíme najít řešení, nebo alespoň můžeme vyvodit řadu důležitých vlastností řešení rovnice.

Na úvod připomeňme, jak se derivuje složená funkce jedné proměnné. Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci v bodě x_0. Označme $u_0 = g(x_0)$. Má-li funkce $y = f(u)$ derivaci v bodě u_0, pak složená funkce $y = F(x) = f(g(x))$ má derivaci v bodě x_0 a platí: $y'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0)$.

Nyní odvodíme podobné vztahy pro parciální derivace složené funkce dvou proměnných. Bude nás především zajímat případ, kdy vnější funkce f není explicitně zadána (obvykle je to hledané řešení parciální diferenciální rovnice).

Věta 5.1. *Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Označme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $z = f(u, v)$ diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, pak složená funkce $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace 1. řádu v bodě $[x_0, y_0]$ a platí:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Zkráceně píšeme

$$z_x = z_u\, u_x + z_v\, v_x, \qquad z_y = z_u\, u_y + z_v\, v_y \tag{5.2}$$

nebo také

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5.3}$$

Důkaz. Dokážeme pouze první vzorec v (5.1), druhý se dokáže zcela analogicky. Vyjdeme přímo z definice parciální derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{F(x_0 + t, y_0) - F(x_0, y_0)}{t} =\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(u(x_0 + t, y_0), v(x_0 + t, y_0)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{t}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Označíme-li $u(t) = u(x_0 + t, y_0)$, $v(t) = v(x_0 + t, y_0)$, z diferencovatelnosti funkce f plyne existence funkce τ splňující (4.3) takové, že

$$\begin{aligned}&f(u(t), v(t)) - f(u_0, v_0) =\\ &= f_u(u_0, v_0)(u(t) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v(t) - v_0) + \tau(u(t) - u_0, v(t) - v_0).\end{aligned}$$

Dosazením tohoto vztahu do (5.4) dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[f_u(u_0, v_0)(u(t) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v(t) - v_0) +\\ &+ \tau(u(t) - u_0, v(t) - v_0)] = f_u(u_0, v_0)\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} +\\ &+ f_v(u_0, v_0)\lim_{t\to 0}\frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{\tau(u(t) - u_0, v(t) - v_0)}{t} =\\ &= f_u(u_0, v_0)u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_x(x_0, y_0) + \lim_{t\to 0}\frac{\tau(u(t) - u_0, v(t) - v_0)}{t}.\end{aligned}$$

K dokončení důkazu nyní stačí ukázat, že poslední limita je nulová:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau(u(t)-u_0,\, v(t)-v_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\tau(u(t)-u_0,\, v(t)-v_0)}{\sqrt{(u(t)-u_0)^2+(v(t)-v_0)^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{u(t)-u_0}{t}\right)^2+\left(\frac{v(t)-v_0}{t}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{u_x^2(x_0,y_0)+v_x^2(x_0,y_0)}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\tau(u(t)-u_0,\, v(t)-v_0)}{\sqrt{(u(t)-u_0)^2+(v(t)-v_0)^2}} = 0.$$

V posledním výpočtu jsme využili faktu, že $\lim_{t\to 0} u(t) = u_0$, $\lim_{t\to 0} v(t) = v_0$, neboť funkce $u(t) = u(x_0+t, y_0)$, $v(t) = v(x_0+t, y_0)$ jsou spojité v bodě $t = 0$ — to plyne z existencí parciálních derivací funkcí u, v v bodě $t = 0$ a pro funkci jedné proměnné plyne z existence derivace spojitost. □

Příklad 5.2.

i) Je dána funkce $z = \mathrm{e}^u \sin v$, kde $u = xy$ a $v = x + y$. Vypočtěte z_x a z_y.

Řešení. Protože vnitřní i vnější složky mají spojité parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, má složená funkce parciální derivace v každém bodě tohoto prostoru. Dosazením do (5.2) dostáváme

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = (\mathrm{e}^u \sin v)y + (\mathrm{e}^u \cos v),$$
$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = (\mathrm{e}^u \sin v)x + (\mathrm{e}^u \cos v).$$

Zbývá dosadit za u a v, $u = xy$ a $v = x + y$ a dostaneme

$$z_x = \mathrm{e}^{xy}(y\sin(x+y)+\cos(x+y)), \qquad z_y = \mathrm{e}^{xy}(x\sin(x+y)+\cos(x+y)).$$ ▲

ii) Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných $u = x + y$, $v = x - y$ najděte všechny diferencovatelné funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující rovnost

$$f_x(x,y) + f_y(x,y) = 0. \tag{5.5}$$

Řešení. Označme $z = f(x,y)$. Pak $z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v$, $z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_u - z_v$. Dosazením dostáváme $z_u + z_v + z_u - z_v = 2z_u = 0$, tedy $z_u = 0$. To znamená, že funkce $z = z(u,v)$ nezávisí na proměnné u, a tedy $z(u,v) = g(v)$, kde g je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Dosazením za v vidíme, že všechny diferencovatelné funkce dvou proměnných, které splňují (5.5), jsou tvaru $f(x,y) = g(x-y)$, kde g je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. ▲

iii) Proveďte totéž jako v předchozím příkladě zavedením polárních souřadnic $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ do rovnice

$$y f_x(x, y) - x f_y(x, y) = 0. \tag{5.6}$$

Řešení. Vypočtěme nejprve parciální derivace funkcí r a φ:

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\varphi_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \varphi_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Označíme-li opět $z = f(x, y)$ a dosadíme-li do vzorečků pro derivace složené funkce prvního řádu, dostáváme

$$z_x = z_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - z_\varphi \frac{y}{x^2 + y^2},$$
$$z_y = z_r \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z_\varphi \frac{x}{x^2 + y^2},$$

což po dosazení do (5.6) a úpravě dává rovnici $z_\varphi = 0$, a tedy $z(r, \varphi) = h(r)$. Všechny funkce dvou proměnných splňující rovnici (5.6) jsou tedy tvaru $f(x, y) = h\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$, kde h je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. ▲

Na předchozích příkladech vidíme, že zavedením nových nezávisle proměnných můžeme dosáhnout značného zjednodušení dané parciální diferenciální rovnice, což se velmi často využívá především při řešení diferenciálních rovnic popisujících různé fyzikální děje. Protože tyto rovnice jsou většinou druhého řádu (obsahují parciální derivace druhého řádu neznámé funkce), zvláště důležité jsou vzorce pro parciální derivace 2. řádu složených funkcí.

Dříve než si tyto vzorce pro parciální derivace 2. řádu uvedeme, připomeňme opět pro srovnání vzorec pro derivace 2. řádu složené funkce jedné proměnné. Derivováním rovnosti $y' = f'(u(x))g'(x)$ dostáváme

$$y'' = (f'(u)g'(x))' = f''(u)g'^2(x) + f'(u)g''(x).$$

Věta 5.3. *Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ mají parciální derivace 2. řádu v bodě $[x_0, y_0]$, označme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Má-li funkce $z = f(u, v)$ spojité parciální derivace 2. řádu v bodě $[u_0, v_0]$, pak složená funkce*

$z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace 2. řádu v bodě $[x_0, y_0]$ a platí:

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} \\
z_{xy} &= z_{uu}u_x u_y + z_{uv}v_y u_x + z_{vu}u_y v_x + z_{vv}v_y v_x + z_u u_{xy} + z_v v_{xy} \qquad (5.7) \\
z_{yy} &= z_{uu}u_y^2 + 2z_{uv}u_y v_y + z_{vv}v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}.
\end{aligned}
$$

Funkce z a její parciální derivace mají argument (u_0, v_0), funkce u, v a jejich parciální derivace mají argument (x_0, y_0).

Důkaz. Dokážeme pouze rovnost pro z_{xx}, důkaz zbývajících dvou vzorců je zcela analogický. Platí

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(z_x) = \frac{\partial}{\partial x}(z_u u_x + z_v v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(z_u u_x) + \frac{\partial}{\partial x}(z_v v_x) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(z_u)u_x + z_u u_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}(z_v)v_x + z_v v_{xx} = \\
&= (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x)u_x + z_u u_{xx} + (z_{vu}u_x + z_{vv}v_x)v_x + \\
&\quad + z_v v_{xx} = z_{uu}u_x^2 + z_{uv}v_x u_x + z_{vv}v_x^2 + z_{vu}u_x v_x + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} = \\
&= z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx}.
\end{aligned}
$$

K výpočtu $\frac{\partial}{\partial x}z_u$ a $\frac{\partial}{\partial x}z_v$ jsme využili skutečnosti, že $z_u = z_u(u(x, y), v(x, y))$ a $z_v = z_v(u(x, y), v(x, y))$ jsou opět složené funkce proměnných x, y, a proto můžeme k výpočtu jejich derivací využít vztahů (5.1), ve kterých místo z dosadíme z_u, resp. z_v. □

Poznámka 5.4. K zapamatování vzorců (5.7) můžeme použít formální umocnění, o kterém jsme se již zmínili u výpočtu diferenciálů vyšších řádů (poznámka 4.13). Například pro výpočet z_{xx} formálně umocníme pravou stranu rovnosti $z_x = z_u u_x + z_v v_x$. Dostaneme $z_u^2 u_x^2 + 2z_u z_v u_x v_x + z_v^2 v_x^2$, a nahradíme-li druhé mocniny, resp. součin prvních derivací funkce z odpovídajícími druhými derivacemi, obdržíme $z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}v_x^2$, což jsou právě první tři členy v (5.7).

Příklad 5.5.

i) Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných $u = x+ay$, $v = x-ay$ najděte obecné řešení tzv. *vlnové rovnice*

$$a^2 z_{xx} - z_{yy} = 0$$

(tato rovnice popisuje např. chvění struny na hudebním nástroji, $z(x, y)$ udává velikost výchylky struny ve vzdálenosti x od jednoho z bodů upevnění struny v čase $t = y$).

Řešení. Využitím vzorečků pro parciální derivace 1. a 2. řádu dostáváme

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v, \; z_y = z_u u_y + z_v v_y = a z_u - a z_v,$$
$$z_{xx} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}, \; z_{yy} = a^2 z_{uu} - 2a^2 z_{uv} + a^2 z_{vv}.$$

Dosazením a úpravou obdržíme rovnici $z_{uv} = 0$, kterou řešíme takto: Označíme-li $z_u(u, v) = w(u, v)$, pak řešením rovnice $w_v = 0$ je libovolná funkce nezávisející na v, tedy $w = w(u)$. Řešení rovnice $z_u = w(u)$ je tvaru $z(u, v) = \int w(u)\,du + g(v)$ (podobně jako při hledání kmenové funkce je „integrační konstantou" funkce $g(v)$ proměnné v, viz odst. 4.3). Označíme-li $f(u) = \int w(u)\,du$, dostáváme řešení rovnice ve tvaru $z(u, v) = f(u) + g(v)$ a po dosazení za u a v

$$z(x, y) = f(x + ay) + g(x - ay),$$

kde f, g jsou libovolné funkce jedné proměnné mající derivaci 2. řádu.
Je-li ještě zadána počáteční poloha a rychlost chvějící se struny, tj. je daná dvojice funkcí φ, ψ jedné proměnné popisující počáteční stav struny, pak dvojice počátečních podmínek

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad z_y(x, 0) = \psi(x)$$

určuje jednoznačně funkci $z(x, y)$ popisující chvění struny, viz např. [T-S]. ▲

ii) Pomocí transformace nezávisle proměnných $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$ najděte všechny funkce dvou proměnných splňující rovnici

$$x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} - 2xy z_{xy} + x z_x + y z_y = 0.$$

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladu

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u y + z_v \frac{1}{y}, \qquad z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_u x - z_v \frac{x}{y^2},$$
$$z_{xx} = y^2 z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv} \frac{1}{y^2}, \qquad z_{xy} = xy z_{uu} - \frac{x}{y^3} z_{vv} + z_u - \frac{1}{y^2} z_v,$$
$$z_{yy} = x^2 z_{uu} - 2\frac{x^2}{y^2} z_{uv} + \frac{x^2}{y^4} z_{vv} + 2z_v \frac{x}{y^3}.$$

Dosadíme do rovnice a po úpravě dostáváme

$$z_{uu}(x^2y^2 + x^2y^2 - 2x^2y^2) + z_{uv}(2x^2 - 2x^2) + z_{vv}\left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{x^2}{y^4} + 2\frac{x^2}{y^4}\right) +$$
$$+ z_u(-2xy + xy + xy) + z_v\left(\frac{x}{y} + 2\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\right) = 4\frac{x^2}{y^2} z_{vv} + \frac{x}{y} z_v = 0,$$

odtud $z_{vv} + \frac{1}{2v} z_v = 0$. Řešením této rovnice je $z_v(u, v) = \frac{f(u)}{\sqrt{v}}$, kde f je libovolná (diferencovatelná) funkce jedné proměnné, a odtud $z(u, v) = 2f(u)\sqrt{v} + g(u)$, kde g je libovolná funkce jedné proměnné se spojitou druhou derivací, což po dosazení za u, v dává

$$z(x, y) = 2f(xy)\sqrt{\frac{x}{y}} + g(xy).$$

Přesvědčte se zkouškou, že tato funkce je opravdu řešením dané rovnice. ▲

iii) Transformujte tzv. *Laplaceovu rovnici* [1] v $\mathbb{R}^2$

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ za předpokladu, že funkce z má spojité parciální derivace 2. řádu.

Řešení. Podle (5.2) platí

$$\begin{aligned} z_r &= z_x\, x_r + z_y\, y_r = z_x \cos\varphi + z_y \sin\varphi, \\ z_\varphi &= z_x\, x_\varphi + z_y\, y_\varphi = -z_x\, r \sin\varphi + z_y\, r\cos\varphi. \end{aligned}$$

Pro derivace 2. řádu dostáváme

$$\begin{aligned} z_{rr} &= z_{xx}x_r^2 + 2z_{xy}\, x_r y_r + z_{yy}\, y_r^2 + z_x\, x_{rr} + z_y\, y_{rr} = \\ &= z_{xx}\cos^2\varphi + z_{xy}\sin 2\varphi + z_{yy}\sin^2\varphi, \\ z_{\varphi\varphi} &= z_{xx}x_\varphi^2 + 2z_{xy}x_\varphi y_\varphi + z_{yy}y_\varphi^2 + z_x\, z_{\varphi\varphi} + z_y\, y_{\varphi\varphi} = \\ &= z_{xx}r^2\sin^2\varphi - z_{xy}r^2\sin 2\varphi + z_{yy}r^2\cos^2\varphi - z_x r\cos\varphi - z_y r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li vzorec pro z_{rr} výrazem r^2 a sečteme se vzorcem pro $z_{\varphi\varphi}$, dostáváme

$$\begin{aligned} r^2 z_{rr} + z_{\varphi\varphi} &= r^2 z_{xx}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2 z_{yy}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \\ &\quad + z_{xy}(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi) - r[z_x\cos\varphi + z_y\sin\varphi] = \\ &= r^2(z_{xx} + z_{yy}) - rz_r. \end{aligned}$$

Laplaceova rovnice v polárních souřadnicích má tedy tvar

$$r^2 z_{rr} + z_{\varphi\varphi} + rz_r = 0.$$

▲

[1] Pierre Simon Laplace (1749–1827), francouzský matematik, fyzik a astronom.

Poznámka 5.6. Ve všech řešených příkladech, které jsme zde uvedli, byla transformace do nových proměnných dána již v zadání. V rovnicích matematické fyziky se vyšetřují rovnice typu

$$a(x, y)z_{xx} + 2b(x, y)z_{xy} + c(x, y)z_{yy} + f(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

Chceme-li najít řešení této rovnice, je třeba ji vhodnou transformací do nových nezávisle proměnných zjednodušit — převést na tzv. *kanonický tvar*. Tuto „vhodnou" transformaci najdeme prostřednictvím řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$a(x, y)y'^2 - 2b(x, y)y' + c(x, y) = 0.$$

Podrobnější informace o tomto postupu lze nalézt například v [T-S].

Doposud jsme uvažovali pouze funkce dvou proměnných, ale situace pro funkce více proměnných je zcela analogická, včetně důkazu následujícího tvrzení.

Věta 5.7. *Nechť je dána funkce $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a m-tice funkcí $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které mají spojité parciální derivace 2. řádu. Označme $u_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, m$. Pak složená funkce $F(x_1, \dots, x_n) = f\big(g_1(x_1 \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)\big)$ má spojité parciální derivace 2. řádu a platí*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1 \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_k} f(u_1, \dots, u_m) \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(x_1, \dots, x_n), \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial u_k u_l} f(u) \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(x) \frac{\partial}{\partial x_j} g_l(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_k} f(u) \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} g_k(x), \tag{5.9}$$

kde $i, j = 1, 2, \dots, n$ a ve vzorci (5.9) je $u = (u_1 \dots, u_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka 5.8.

i) Jsou-li funkce g_i ve větě 5.7 lineární, pak všechny členy v druhé sumě v (5.9) jsou nulové (neboť druhá derivace lineární funkce je nulová). Metoda formálního vynásobení derivací prvního řádu a následná náhrada součinů prvních derivací odpovídajícími druhými derivacemi dává pak přímo vztahy pro druhou derivaci. Takto je tomu např. v příkladu 5.5 i).

ii) Uvedli jsme si zde pouze vzorce pro parciální derivace složené funkce 1. a 2. řádu, které jsou potřeba v rovnicích matematické fyziky. Metodou stejnou jako v důkazu věty 5.3 lze odvodit vztahy pro třetí a vyšší derivace, nebudeme je zde však již uvádět, neboť jsou formálně poměrně složité.

Příklad 5.9.

i) Transformujte Laplaceovu rovnici v $\mathbb{R}^3$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

do sférických souřadnic $x = r \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = r \sin\varphi \sin\vartheta$, $z = r \cos\vartheta$.

Řešení. Mohli bychom postupovat podobně jako při řešení příkladu 5.5 iii), zde však pro ilustraci různých možných metod postupujeme odlišně. Vyjádříme nejprve r, φ, ϑ pomocí x, y, z. Jednoduchými úpravami dostáváme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Nyní vypočteme všechny potřebné parciální derivace funkcí r, φ, ϑ. Platí

$$
\begin{aligned}
r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}, \ r_y = \frac{y}{r}, \ r_z = \frac{z}{r}, \\
r_{xx} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \ r_{yy} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \ r_{zz} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}, \\
\varphi_x &= \frac{y}{x^2+y^2}, \ \varphi_y = -\frac{x}{x^2+y^2}, \ \varphi_z = 0, \\
\varphi_{xx} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \ \varphi_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \varphi_{zz} = 0, \\
\vartheta_x &= \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}} \frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)} = \frac{xz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}, \\
\vartheta_y &= \frac{yz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \vartheta_z = \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}} \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{z^2} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2}, \\
\vartheta_{xx} &= \frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} - 2\frac{x^2z}{r^4\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2z}{r^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\vartheta_{yy} &= \frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} - 2\frac{y^2z}{r^4\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2z}{r^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\vartheta_{zz} &= \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{r^4}.
\end{aligned}
$$

Podle vzorců pro derivace složené funkce

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\varphi \varphi_x + u_\vartheta \vartheta_x = u_r \frac{x}{r} + u_\varphi \frac{y}{x^2+y^2} + u_\vartheta \frac{xz}{r\sqrt{x^2+y^2}}, \\
u_y &= u_r \frac{y}{r} - u_\varphi \frac{x}{x^2+y^2} + u_\vartheta \frac{yz}{r\sqrt{x^2+y^2}}, \\
u_z &= u_r \frac{z}{r} - u_\vartheta \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}, \\
u_{xx} &= u_{rr}\frac{x^2}{r^2} + u_{\varphi\varphi}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + u_{\vartheta\vartheta}\frac{x^2z^2}{r^4(x^2+y^2)} + 2u_{r\varphi}\frac{xy}{r(x^2+y^2)} + \\
&\quad + 2u_{r\vartheta}\frac{x^2z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} - 2u_{\varphi\vartheta}\frac{xyz}{r(x^2+y^2)^{3/2}} + u_r\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) - \\
&\quad - u_\varphi\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + u_\vartheta\left(\frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} - 2\frac{x^2z}{r^4\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2z}{r^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \\
u_{yy} &= u_{rr}\frac{y^2}{r^2} + u_{\varphi\varphi}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + u_{\vartheta\vartheta}\frac{y^2z^2}{r^4(x^2+y^2)} - 2u_{r\varphi}\frac{xy}{r(x^2+y^2)} + \\
&\quad + 2u_{r\vartheta}\frac{y^2z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} - 2u_{\varphi\vartheta}\frac{xyz}{r(x^2+y^2)^{3/2}} + u_r\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) -
\end{aligned}
$$

$$- u_\varphi \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + u_\vartheta \left(\frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} - 2\frac{y^2 z}{r^4\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2 z}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$u_{zz} = u_{rr}\frac{z^2}{r^2} + u_{\vartheta\vartheta}\frac{x^2+y^2}{r^2} - 2u_{r\vartheta}\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} + u_r\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right) + u_\vartheta \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{r^4}.$$

Odtud

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{u_{rr}}{r^2}(x^2+y^2+z^2) + u_{\varphi\varphi}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} +$$

$$+ \frac{u_{\vartheta\vartheta}}{r^4}\left(\frac{x^2z^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2z^2}{(x^2+y^2)^2} + (x^2+y^2)\right) + 2\frac{u_{r\varphi}}{r(x^2+y^2)}(xy - xy) +$$

$$+ 2\frac{u_{r\vartheta}}{r^2}\left(\frac{x^2 z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2 z}{\sqrt{x^2+y^2}} - z\sqrt{x^2+y^2}\right) + 2\frac{u_{\varphi\vartheta}}{r^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(xyz - xyz) +$$

$$+ u_r\left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right) + \frac{u_\varphi}{(x^2+y^2)^2}(-2xy + 2xy) +$$

$$+ u_\vartheta\left(\frac{2z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2z}{r^4}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2z}{r^4}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{r^2}u_\vartheta.$$

ii) Určete řešení Laplaceovy rovnice v $\mathbb{R}^3$, které je sféricky symetrické, tj. závisí pouze na vzdálenosti od počátku.

Řešení. Nechť funkce u závisí pouze na proměnné $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ a nikoliv na proměnných φ a ϑ, tj. $u = u(r)$ (tento předpoklad je „rozumný" vzhledem k fyzikálnímu významu Laplaceovy rovnice). Pak všechny parciální derivace podle φ, ϑ jsou rovny nule a dostáváme rovnici

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = 0.$$

Položíme-li $u_r = v$, dostáváme dále rovnici $v_r + \frac{2}{r}v = 0$ a po úpravě $r^2 v_r + 2rv = 0$, což je ekvivalentní rovnici $\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0$. Řešením této rovnice je např. $v(r) = -\frac{1}{r^2}$, a tedy $u = \frac{1}{r}$, tj.

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

je jedním z řešení Laplaceovy rovnice (srov. příklad 3.7 ii)).

5.2. Taylorova věta

Nejprve připomeňme, co to je *Taylorův polynom* a *Taylorova věta*[1] pro funkci jedné proměnné. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, x \in \mathbb{R}$ a $h = x - x_0$. Taylorův polynom

[1] Brook Taylor (1685–1731), anglický matematik.

(mnohočlen) stupně $n \in \mathbb{N}$ funkce f se středem v bodě x_0 je polynom

$$T_n(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

$k = 0, \dots, n$. Koeficienty a_k určíme z požadavku, aby polynom T_n měl v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a hodnotu prvních n derivací jako funkce f.

Taylorův polynom používáme k přibližnému výpočtu funkčních hodnot funkce f v okolí bodu x_0. Taylorova věta udává velikost chyby, které se dopustíme, aproximujeme-li funkci Taylorovým polynomem.

Obdobně je tomu u funkce více proměnných. Taylorův polynom funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je polynom více proměnných, který má s funkcí f v daném bodě $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in \mathbb{R}^n$ stejnou funkční hodnotu a stejnou hodnotu všech *parciálních* derivací až do řádu n, kde n je stupeň polynomu. Pro funkce dvou proměnných dostáváme toto tvrzení.

Věta 5.10 (Taylorova). *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí*

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y), \tag{5.10}$$

kde

$$\begin{aligned} T_n(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y_y}(x_0, y_0)k + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right) + \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0, y_0)h^{n-j}k^j, \\ R_n(x, y) &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)h^{n+1-j}k^j \end{aligned}$$

a kde $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, $\vartheta \in (0, 1)$.

Poznámka 5.11. Vzorec (5.10) se nazývá *Taylorův vzorec*, polynom T_n *Taylorův polynom* a R_n *zbytek* v Taylorově vzorci.

Taylorův vzorec lze zapsat pomocí diferenciálů takto:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)(h, k) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)(h, k). \end{aligned}$$

Důkaz věty 5.10. Zaveďme pomocnou funkci jedné proměnné $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Platí $F(1) = F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x, y)$, $F(0) = f(x_0, y_0)$. Pomocí Taylorova vzorce pro funkci jedné proměnné dostáváme

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\vartheta),$$

kde $\vartheta \in (0, 1)$. Pro výpočet derivací funkce F využijeme vztahů pro parciální derivace složených funkcí. Dostáváme

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0 + th, y_0 + tk)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0)h + \frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0)k, \\ F''(0) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}F(t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(x_0 + th, y_0 + tk)|_{t=0} = \\ &= f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \end{aligned}$$

a analogicky obdržíme

$$F^{(m)}(0) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} y^j}(x_0, y_0)h^{m-j}k^j.$$

Stejně postupujeme i při výpočtu zbytku R_n. □

Příklad 5.12.

i) Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě $[x_0, y_0] = [1, 1]$ pro funkci $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Řešení. Vypočteme nejprve všechny potřebné parciální derivace

$$f_x = \frac{1}{y}, \quad f_y = -\frac{x}{y^2}, \quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = -\frac{1}{y^2}, \quad f_{yy} = \frac{2x}{y^3}.$$

Podle věty 5.10

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) + \\ &+ \frac{1}{2}[f_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + f_{yy}(1, 1)(y - 1)^2] = \\ &= 1 + (x - 1) - (y - 1) - (x - 1)(y - 1) - (y - 1)^2 = \\ &= -y^2 - xy + 2x + 2y - 1. \end{aligned}$$

▲

ii) Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vypočtěte přibližně:

a) $\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}05)^2}$; b) $1{,}04^{2{,}02}$.

Výsledek porovnejte s přibližnou hodnotou získanou pomocí diferenciálu z příkladu 4.8 ii).

Řešení.

a) Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[x_0, y_0] = [3, 4]$ a diferencemi $h = -0{,}02$, $k = 0{,}05$. Parciální derivace funkce z jsou

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_{xx} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$z_{xy} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad z_{yy} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Taylorův polynom je roven

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = {} & f(3, 4) + f_x(3, 4)(x - 3) + f_y(3, 4)(y - 4) + \\ & + \frac{1}{2}\big[f_{xx}(3, 4)(x - 3)^2 + 2f_{xy}(3, 4)(x - 3(y - 4) + \\ & + f_{yy}(3, 4)(y - 4)^2\big] = \\ = {} & 5 + \frac{1}{5}\big[3(x - 3) + 4(y - 4)\big] + \frac{1}{250}\big[16(x - 3)^2 - \\ & - 24(x - 3)(y - 4) + 9(y - 4)^2\big]. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}05)^2} \doteq {} & 5 + \frac{1}{5}(-0{,}06 + 0{,}2) + \\ & + \frac{1}{250}(16 \cdot 0{,}0004 - 24 \cdot 0{,}001 + 9 \cdot 0{,}0025) = 5{,}0281332. \end{aligned}$$

V příkladu 4.8 ii) jsme pomocí diferenciálu dostali přibližný výsledek $\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}05)^2} \doteq 5{,}028$.

b) V Taylorově vzorci pro funkci $z = x^y$ položme $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $h = 0{,}04$, $k = 0{,}02$. Nejprve vypočtěme všechny potřebné parciální derivace. Platí $z_x = yx^{y-1}$, $z_x(1, 2) = 2$, $z_y = x^y \ln x$, $z_y(1, 2) = 0$, $z_{xx} = y(y - 1)x^{y-2}$, $z_{xx}(1, 2) = 2$, $z_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x)$, $z_{xy}(1, 2) = 1$, $z_{yy} = x^y \ln x \ln x = x^y \ln^2 x$, $z_{yy}(1, 2) = 0$. Pak

$$T_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1).$$

Odtud

$$1{,}04^{2{,}02} \doteq 1 + 2 \cdot 0{,}04 + 0{,}0016 + 0{,}0008 = 1{,}0824.$$

V příkladu 4.8 ii) jsme pomocí diferenciálu obdrželi přibližný výsledek $1{,}04^{2{,}02} \doteq 1{,}08$. ▲

iii) Mnohočlen $P(x, y) = x^3 + 3y^3 + xy^2 + 2x^2 + xy + x - 2y$ napište jako polynom v proměnných $u = x - 1$, $v = y + 2$.

Řešení. Nechť $T_3(x, y)$ Taylorův polynom 3. stupně funkce P se středem $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Pak ve zbytku $R_3(x, y)$ vystupují 4. derivace funkce P, které jsou však všechny nulové, neboť P je polynom 3. stupně. Tedy $T_3(x, y) = P(x, y)$ a stačí určit koeficienty v $T_3(x, y)$. Postupně dostáváme $P(1, -2) = -20$, $P_x = 3x^2 + y^2 + 4x + y + 1$, $P_x(1, -2) = 10$, $P_y = 9y^2 + 2xy + x - 2$, $P_y(1, -2) = 31$, $P_{xx} = 6x + 4$, $P_{xx}(1, -2) = 10$, $P_{xy} = 2y + 1$, $P_{xy}(1, -2) = -3$, $P_{yy} = 18y + 2x$, $P_{yy}(1, -2) = -34$, $P_{xxx} = 6$, $P_{xxy} = 0$, $P_{xyy} = 2$, $P_{yyy} = 18$. Odtud

$$T_3(x, y) = -14 + 10(x - 1) + 31(y + 2) + 5(x - 1)^2 - 3(x - 1)(y + 2) - 17(y + 2)^2 + (x - 1)^3 + (x - 1)(y + 2)^2 + 3(y + 2)^3.$$

Jestliže ve výsledku provedeme umocnění, po úpravě samozřejmě dostáváme polynom P. Tuto kontrolu výsledku necháváme čtenáři jako cvičení. ▲

Zformulujme na závěr kapitoly ještě Taylorův vzorec pro obecný případ funkcí n proměnných. Důkaz tohoto tvrzení neuvádíme, neboť je v podstatě stejný jako pro dvě proměnné.

Věta 5.13. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m + 1$. Pak pro $h = [h_1, \ldots, h_n]$ platí*

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(h) + R_m(x),$$

kde

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \vartheta h)(h), \quad \vartheta \in (0, 1)$$

je zbytek v Taylorově vzorci a

$$\mathrm{d}^k f(x^*)(h) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = k} \frac{k!}{j_1! j_2! \ldots j_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}}(x^*) h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}$$

je k-tý diferenciál funkce f v bodě x^*.

Cvičení

5.1. Využitím uvedené substituce najděte všechny funkce splňující danou rovnost:

a) $yz_x - xz_y = 0,\ u = x,\ v = \sqrt{x^2 + y^2}$,

b) $xz_x + yz_y = 0,\ u = x,\ v = \frac{y}{x}$,

c) $u_x + u_y + u_z = 0,\ \xi = x + y - 2z,\ \eta = x - 2y + z,\ \chi = z$.

5.2. Diferenciální rovnice transformujte do nových proměnných u, v. V případech, kdy po transformaci vyjde jednoduchý výsledek, se pokuste najít jejich řešení:

a) $z_{xx} - yz_{yy} - \frac{1}{2}z_y = 0,\ u = x - 2\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$,

b) $y^2 z_{xx} + x^2 z_{yy} - 2xyz_{xy} - xz_x - yz_y = 0, u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = xy$,

c) $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2)z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0,\ u = x + y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,

d) $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0,\ u = x + y, v = \frac{1}{x-y}$,

e) $xyz_{xx} - (x^2 + y^2)z_{xy} + xyz_{yy} + yz_x + xz_y = 0, u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $v = xy$,

f) $xz_{xx} - yz_{yy} = 0,\ u = \sqrt{x} + \sqrt{y}, v = \sqrt{x} - \sqrt{y}$,

g) $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = 0, u = x + y, v = \frac{y}{x+y}$,

h) $x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + xz_x + yz_y = 0, u = xy, v = y$,

i) $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0, u = xy, v = \frac{y}{x}$.

5.3. Ukažte, že daná transformace do nových proměnných nemění tvar rovnice $z_{xx} + z_{yy} = 0,\ x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, kde φ, ψ jsou funkce dvou proměnných splňující identity $\varphi_u = \psi_v$, $\varphi_v = -\psi_u$.

5.4. Určete Taylorův polynom 2.stupně se středem $[x_0, y_0]$ následujících funkcí:

a) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $[x_0, y_0] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

b) $\operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$, $[x_0, y_0] = [0, 0]$,

c) $\frac{\cos x}{\cos y}$, $[x_0, y_0] = [0, 0]$,

d) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$,

e) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $[x_0, y_0] = [0, 1]$,

f) $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$,

g) $x^{\frac{y}{z}}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$,

h) $\sin x \sin y$, $[x_0, y_0] = [0, 0]$.

5.5. Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vypočtěte přibližně funkční hodnoty:

a) $\operatorname{arctg} \frac{1,04}{0,98}$,

b) $\sin 29° \operatorname{tg} 46°$.

Kapitola 6

Lokální a absolutní extrémy

Vyšetřování extrémů funkcí je jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu. Je tomu tak proto, že v každodenním životě se setkáváme s řešením extremálních úloh. Např. každé ekonomické rozhodování se řídí pravidlem minimalizace nákladů a maximalizace zisku. Rovněž přírodovědné děje probíhají tak, že jistá veličina nabývá nejmenší nebo největší hodnoty (spotřebovaná energie, vykonaná práce).

Nejprve studujeme lokální extrémy. Zde vyšetřujeme danou funkci pouze lokálně, tj. v okolí nějakého bodu. To je předmětem prvního odstavce. Pokud je předepsána množina a máme najít bod této množiny, v němž funkce nabývá největší, resp. nejmenší hodnoty, mluvíme o absolutních extrémech. O nich pojednává druhá část této kapitoly.

6.1. Lokální extrémy

Definice 6.1. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \leqq f(x^*)$ $(f(x) \geqq f(x^*))$.
Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech. Pro (ostrá) lokální minima a maxima budeme používat společný termín *(ostré) lokální extrémy*.

Příklad 6.2.

i) Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ má v bodě $[x, y] = [0, 0]$ ostré lokální minimum, neboť $f(0, 0) = 0$ a pro každé $[x, y] \neq [0, 0]$ je $f(x, y) > 0$. (Grafem funkce je kuželová plocha, viz obr. P.12.)

ii) Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1, & \text{pro } [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ ostré lokální maximum, neboť pro $[x, y] \neq [0, 0]$ dostatečně blízko počátku platí $f(x, y) < f(0, 0) = 1$.

Uvedené příklady ilustrují skutečnost, že pro existenci lokálního extrému v nějakém bodě funkce *nemusí mít v tomto bodě parciální derivace, nemusí zde být dokonce ani spojitá.*

V následujícím textu odvodíme nutné a postačující podmínky pro existenci lokálního extrému v případě, že funkce má v daném bodě parciální derivace. Podobně jako u funkce jedné proměnné je nutná podmínka formulována pomocí stacionárního bodu a postačující podmínka pomocí parciálních derivací 2. řádu.

Definice 6.3. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionární bod funkce* f, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace funkce f a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6.1}$$

Následující věta, která prezentuje nutnou podmínku existence lokálního extrému, bývá v některé literatuře citována jako Fermatova věta[1].

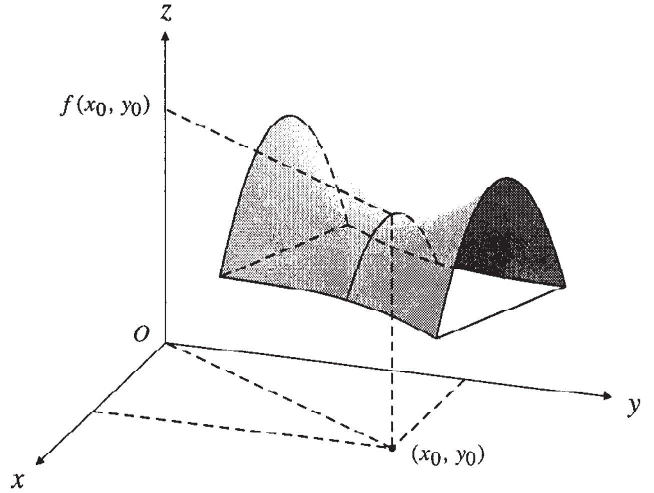
Věta 6.4. *Nechť funkce* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce* f*, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Důkaz. Předpokládejme, že některá z parciálních derivací funkce f v bodě x^* je nenulová, tj. platí $f_{x_i}(x^*) \neq 0$. To vzhledem k definici parciální derivace znamená, že funkce $\varphi(t) = f(x^* + te_i)$, kde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, jednička je na i-tém místě, má nenulovou derivaci v bodě $t = 0$, a tedy zde nemůže mít lokální extrém. To však znamená, že ani funkce f nemůže mít v bodě x^* lokální extrém. □

Poznámka 6.5. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

Zdůrazněme, že stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému, jak ukazuje následující obrázek. Zde je znázorněn graf funkce $f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)$, která má stacionární bod $[x_0, y_0]$, avšak v tomto bodě nemá lokální extrém (takový bod se nazývá *sedlo*).

[1] Pierre de Fermat (1601–1665), francouzský matematik.



V následující větě odvodíme postačující podmínku, aby funkce měla ve stacionárním bodě lokální extrém.

Připomeňme situaci pro funkci jedné proměnné $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ je stacionární bod této funkce. O tom, zda v tomto bodě je, nebo není extrém, rozhodneme podle hodnot vyšších derivací funkce g v t_0. Speciálně je-li $g''(t_0) > 0$ (< 0), má funkce g v bodě t_0 ostré lokální minimum (maximum).

Toto tvrzení se dokáže pomocí Taylorova rozvoje funkce g v t_0. Platí

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}g''(\xi)(t - t_0)^2 = g(t_0) + \frac{1}{2}g''(\xi)(t - t_0)^2,$$

kde ξ je číslo ležící mezi t a t_0. Je-li nyní funkce g'' spojitá, pak $g''(t_0) > 0$ ($g''(t_0) < 0$) implikuje $g''(\xi) > 0$ ($g''(\xi) < 0$) pro ξ dostatečně blízká t_0, pak $g''(\xi)(t - t_0)^2 > 0$ ($g''(\xi)(t - t_0)^2 < 0$), a tedy $g(t) > g(t_0)$ ($g(t) < g(t_0)$) pro t dostatečně blízko t_0, tj. funkce g nabývá v t_0 ostrého lokálního minima (maxima). Analogicky postupujeme u funkcí více proměnných.

Zformulujme nejprve postačující podmínku pro existenci lokálního extrému pro funkci dvou proměnných.

Věta 6.6. *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod.*

Jestliže

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0, \qquad (6.2)$$

pak má funkce f v $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jde o minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jde o maximum.

Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém nenastává.

Důkaz. Nechť $D(x_0, y_0) \neq 0$. Ze spojitosti parciálních derivací 2. řádu funkce f plyne spojitost funkce $D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$ a funkce f_{xx} v bodě $[x_0, y_0]$. Odtud plyne, že pro $[x, y]$ dostatečně blízká bodu $[x_0, y_0]$ platí

$$\operatorname{sgn} D(x, y) = \operatorname{sgn} D(x_0, y_0), \quad \operatorname{sgn} f_{xx}(x, y) = \operatorname{sgn} f_{xx}(x_0, y_0).$$

Taylorův vzorec pro $n = 1$ se středem $[x_0, y_0]$ dává

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[f_{xx}(c_1, c_2)(x - x_0)^2 + \\ + 2 f_{xy}(c_1, c_2)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(c_1, c_2)(y - y_0)^2], \end{aligned} \tag{6.3}$$

kde $[c_1, c_2]$ leží na úsečce spojující $[x_0, y_0]$ a $[x, y]$.

Označme $A = f_{xx}(c_1, c_2)$, $B = f_{xy}(c_1, c_2)$, $C = f_{yy}(c_1, c_2)$, $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ a uvažujme kvadratický polynom dvou proměnných

$$P(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Pak vztah (6.3) můžeme psát ve tvaru

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} P(h, k). \tag{6.4}$$

Vyšetřeme nyní znaménko polynomu $P(h, k)$. Uvažujme dva případy.

1. $D(x_0, y_0) > 0$. Pro $k = 0$ je $P(h, 0) = Ah^2$, přičemž $A \neq 0$ (plyne ze vztahu $AC - B^2 > 0$). Proto $P(h, 0) > 0$ pro $A > 0$, $P(h, 0) < 0$ pro $A < 0$.
   Pro $k \neq 0$ lze $P(h, k)$ psát ve tvaru $P(h, k) = k^2\big[A(\frac{h}{k})^2 + 2B\frac{h}{k} + C\big]$. Označme

   $$Q(t) = At^2 + 2Bt + C, \quad \text{kde } t = \frac{h}{k}.$$

   Jelikož $AC - B^2 > 0$, tj. Q má záporný diskriminant, je pro $A > 0$ polynom $Q(t) > 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a odtud $P(h, k) > 0$ pro všechna $h, k \in \mathbb{R}$. Podobně v případě $A < 0$ je $P(h, k) < 0$. To podle (6.4) znamená, že pro $A > 0$ má funkce f v $[x_0, y_0]$ ostré lokální minimum a pro $A < 0$ ostré lokální maximum.

II. $D(x_0, y_0) < 0$, tj. diskriminant polynomu $Q(t)$ je kladný. To znamená, že existují $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $Q(t_1) > 0$ a $Q(t_2) < 0$. Položme $[h_1, k_1] = [\alpha t_1, \alpha]$, $[h_2, k_2] = [\alpha t_2, \alpha]$, kde $\alpha \neq 0$. Pak

$$P(h_1, k_1) = \alpha^2 Q(t_1), \qquad P(h_2, k_2) = \alpha^2 Q(t_2),$$

tj. pro $[x_1, y_1] = [x_0+h_1, y_0+k_1], [x_2, y_2] = [x_0+h_2, y_0+k_2]$ platí $f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0)$, $f(x_2, y_2) < f(x_0, y_0)$. Protože $\alpha \neq 0$ bylo libovolné, tj. $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ mohou být libovolně blízko $[x_0, y_0]$, v tomto bodě extrém nenastává.

$\square$

Příklad 6.7. Určete lokální extrémy funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení. Funkce, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných x, y, a proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy proto mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$z_x = 3x^2 - 3y = 0, \qquad z_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = x^2$ a dosazením do druhé rovnice dostáváme

$$x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

odtud $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (kvadratický trojčlen x^2+x+1 má záporný diskriminant, a je proto vždy kladný). Existují tedy dva stacionární body $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [1, 1]$. Dále platí $z_{xx} = 6x$, $z_{yy} = 6y$, $z_{xy} = -3$. Odtud dostáváme

$$D(x, y) = 36xy - 9, \quad \text{tj. } D(P_1) = -9 < 0, \ D(P_2) = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Podle věty 6.6 v bodě P_1 extrém nenastává a v bodě P_2 nastává ostré lokální minimum, neboť $z_{xx}(P_1) = 6 > 0$. ▲

Poznámka 6.8. V případě, že ve stacionárním bodě $[x_0, y_0]$ platí $D(x_0, y_0) = 0$, o existenci extrému v tomto bodě nelze na základě druhých derivací rozhodnout. Pro funkce jedné proměnné máme k dispozici tvrzení, které říká, že funkce f má ve stacionárním bodě x_0, v němž $f''(x_0) = 0$, lokální extrém nebo inflexní bod podle toho, je-li první nenulová derivace v x_0 sudého, nebo lichého řádu. U funkcí více proměnných není však aparát vyšších derivací v praktických případech příliš vhodný. V některých příkladech lze o existenci lokálního extrému rozhodnout vyšetřením lokálního chování funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, bez počítání druhých derivací. Tento postup je ilustrován na následujících dvou příkladech.

Příklad 6.9.

i) Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Řešení. Stacionární body určíme jako řešení soustavy rovnic

$$z_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \quad z_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0. \tag{6.5}$$

Odečtením rovnic dostáváme $x^3 - y^3 = 0$, odtud $x = y$ a dosazením do jedné z rovnic v (6.5) dostáváme tři stacionární body $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [1, 1]$, $P_3 = [-1, -1]$.

Dále

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - [f_{xy}]^2 = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4.$$

Protože $D(P_2) = D(P_3) = 96 > 0$ a $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) = 10 > 0$, má funkce f v obou těchto stacionárních bodech ostré lokální minimum. Ve stacionárním bodě P_1 je však $D(P_1) = 0$, proto o existenci extrému v tomto bodě nelze takto rozhodnout.

Zde postupujeme následujícím způsobem: Funkci f můžeme upravit na tvar $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$. Odtud $f(x, -x) = 2x^4 > 0$ pro $x \neq 0$. Na druhé straně $f(x, 0) = x^4 - x^2 = x^2(1 - x^2) < 0$ pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. V libovolném okolí bodu $[0, 0]$ tedy funkce f nabývá jak kladných, tak záporných hodnot, což spolu s faktem, že $f(0, 0) = 0$, znamená, že v tomto bodě lokální extrém nenastává.

ii) Určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

Řešení. Stacionární body určíme jako řešení soustavy rovnic

$$z_x = y \ln(x^2 + y^2) + xy \frac{2x}{x^2 + y^2} = y \left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right] = 0,$$
$$z_y = x \ln(x^2 + y^2) + xy \frac{2y}{x^2 + y^2} = x \left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right] = 0.$$

Jsou možné čtyři případy:

a) $[x, y] = [0, 0]$, v tomto bodě však není funkce definována;

b) $x = 0$, pak $\ln y^2 = 0$, tj. $y = \pm 1$, označme $P_{1,2} = [0, \pm 1]$;

c) $y = 0$, $\ln x^2 = 0$, tj. $x = \pm 1$, označme $P_{3,4} = [\pm 1, 0]$;

d)

$$\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0, \quad \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

odtud $x^2 = y^2$. Soustavě rovnic vyhovuje čtveřice bodů $P_{5-8} = \left[\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$. O tom, v kterém z těchto stacionárních bodů nastává extrém, rozhodneme vyšetřením znaménka funkce f. Funkce f nabývá nulové hodnoty na souřadných

osách (v počátku má limitu rovnu 0 — viz příklad 2.10 v)) a v bodech kružnice $x^2+y^2=1$. Uvnitř jednotkové kružnice je funkce v I. a III. kvadrantu záporná, ve II. a IV. je kladná. Vně jednotkové kružnice je tomu naopak (načrtněte si obrázek).
Odtud je zřejmé, že v bodech $P_{1,2}=[0,\pm 1]$, $P_{3,4}=[\pm 1, 0]$ extrém nenastává, neboť funkční hodnota je zde nulová a v libovolném okolí tohoto bodu nabývá funkce jak kladných, tak záporných hodnot.
Dále je vidět, že v bodě $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ (ležícím uvnitř jednotkové kružnice) je lokální minimum, neboť na hranici množiny, která je tvořena souřadnými osami a jednotkovou kružnicí a kde leží tento bod, je funkce nulová a uvnitř této množiny je funkce f záporná. Pak nutně v jediném stacionárním bodě uvnitř této množiny musí být lokální minimum. Stejnou úvahou zjistíme, že lokální minimum je i v bodě $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a ve zbývajících dvou bodech je lokální maximum. Graf funkce $z = xy\ln(x^2+y^2)$ a její vrstevnice jsou znázorněny v příloze, viz P.13. Na tomto znázornění je dobře vidět charakter jednotlivých stacionárních bodů.

Poznámka 6.10. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$ a $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$, pak tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ je vodorovná. Je-li výraz $D(x_0, y_0) > 0$ a $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (< 0), pak je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální minimum (maximum), tj. v okolí tohoto bodu leží graf funkce nad (pod) tečnou rovinou.

Projdeme-li důkaz věty 6.6, snadno zjistíme, že i v případě, kdy $[x_0, y_0]$ není stacionární bod, jsou podmínky $D(x_0, y_0) > 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (< 0) dostatečné pro to, aby graf funkce f v okolí bodu ležel nad (pod) tečnou rovinou v tomto bodě.

Příklad 6.11. Rozhodněte, zda graf funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ leží v okolí bodu $[1, 1]$ nad, nebo pod tečnou rovinou sestrojenou v tomto bodě.

Řešení. Přímým výpočtem určíme parciální derivace funkce f v bodě $[1, 1]$: $f_x = 1$, $f_y = 1$, $f_{xx} = 6$, $f_{xy} = -2$, $f_{yy} = 6$. Podle (4.6) má tečná rovina ke grafu funkce v bodě $[1, 1]$ rovnici $z = x + y - 2$. Vzhledem k tomu, že $D(1, 1) = 34 - 4 = 32 > 0$, leží podle předchozí poznámky graf funkce v okolí bodu $[1, 1]$ *nad* tečnou rovinou sestrojenou v tomto bodě. ▲

Pro funkce tří a více proměnných je situace podobná jako pro dvě proměnné. O existenci extrému ve stacionárním bodě „rozhoduje“ kvadratický polynom n proměnných v Taylorově rozvoji. Pouze rozhodnout, kdy tento polynom nemění své znaménko, je poněkud složitější. K tomu připomeňme nejprve některé pojmy z lineární algebry.

Definice 6.12. Nechť $A = (a_{ij})$, $i, j = 1 \dots, n$ je symetrická matice, $h \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že kvadratická forma $P(h) = \langle Ah, h \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ určená maticí A je *pozitivně (negativně) semidefinitní*, jestliže

$$P(h) \geqq 0, \quad (P(h) \leqq 0) \quad \text{pro každé } h \in \mathbb{R}^n. \tag{6.6}$$

Jestliže v (6.6) nastane rovnost pouze pro $h = 0$, řekneme, že forma P je *pozitivně (negativně) definitní*. Jestliže existují $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $P(h) < 0$ a $P(\tilde{h}) > 0$, řekneme, že kvadratická forma P je *indefinitní*. Často místo o definitnosti, resp. indefinitnosti kvadratické formy P mluvíme o definitnosti, resp. indefinitnosti *matice* A.

V následujících úvahách pro funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symbolem f' značíme n-rozměrný vektor, jehož komponenty jsou parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, a symbol f'' značí $n \times n$ matici, jejíž prvky jsou parciální derivace 2. řádu funkce f, tj. $(f'')_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Věta 6.13. *Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ je stacionární bod funkce f a předpokládejme, že f má v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Položme $A = (a_{ij}) = f''(x^*)$, tj. $a_{ij} = f_{x_i x_j}(x^*)$.*

i) *Je-li kvadratická forma $P(h) = \langle Ah, h \rangle$ pozitivně (negativně) definitní, má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum).*

ii) *Je-li kvadratická forma P indefinitní, v bodě x^* extrém nenastává.*

iii) *Má-li funkce f v bodě x^* lokální minimum (maximum), je kvadratická forma P pozitivně (negativně) semidefinitní.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že důkaz prvních dvou tvrzení je zcela stejný jako pro dvě proměnné, dokážeme pouze tvrzení iii). Předpokládejme, že funkce f má v x^* např. lokální minimum a kvadratická forma P není pozitivně semidefinitní, tj. existuje $\tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $P(\tilde{h}) < 0$. Protože pro pevné $\tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ je kvadratická forma P spojitou funkcí koeficientů této formy a_{ij}, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že je-li $|a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon$, $i, j = 1, \dots, n$ a $B = (b_{ij})$, platí $\langle B\tilde{h}, \tilde{h} \rangle < 0$. To vzhledem ke spojitosti derivací druhého řádu funkce f znamená, že $\langle f''(x)\tilde{h}, \tilde{h} \rangle < 0$, je-li x dostatečně blízko x^*, tj. pro x splňující $x \in \mathcal{O}_\delta(x^*)$, kde $\delta > 0$ je vhodné reálné číslo. Nyní nechť $\{\alpha_n\}$ je libovolná posloupnost kladných reálných čísel konvergujících k nule a položme $x_n = x^* + \alpha_n \tilde{h}$. Pak $x_n \to x^*$, tedy pro dostatečně velká n je $x_n \in \mathcal{O}_\delta(x^*)$ a z Taylorova vzorce pro $n = 1$ dostáváme

$$f(x_n) - f(x^*) = \langle f'(x^*), \alpha_n \tilde{h}, \rangle + \langle f''(y_n)\alpha_n \tilde{h}, \alpha_n \tilde{h} \rangle = \alpha_n^2 \langle f''(y_n)\tilde{h}, \tilde{h} \rangle < 0,$$

kde y_n leží na úsečce spojující x^* a x_n. Proto $y_n \in \mathcal{O}_\delta(x^*)$ pro n dostatečně velká a odtud $f(x_n) < f(x^*)$, což je spor s tím, že funkce f má v x^* lokální minimum. □

Poznámka 6.14. Podle předchozí věty neumíme o existenci lokálního extrému v daném stacionárním bodě x^* rozhodnout v případě, kdy je matice $f''(x^*)$ pouze semidefinitní.

Analogicky jako u funkce jedné proměnné (i když podstatně komplikovaněji) lze určit postačující podmínky pomocí definitnosti kubických a vyšších forem, které odpovídají diferenciálům vyšších řádů, viz [N, str. 70].

O tom, jak rozhodnout o definitnosti kvadratické formy určené danou symetrickou maticí A, vypovídá následující věta.

Věta 6.15.
i) *Kvadratická forma P určená symetrickou maticí $A = (a_{ij})$,*

$$P(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j$$

je pozitivně (negativně) definitní, právě když všechna vlastní čísla matice A jsou kladná (záporná). Forma P je pozitivně (negativně) semidefinitní, právě když všechna vlastní čísla jsou nezáporná (nekladná).

ii) *Kvadratická forma P je pozitivně definitní, právě když jsou všechny hlavní minory matice A, tj. determinanty*

$$\left|a_{11}\right|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

kladné. Kvadratická forma P je negativně definitní, právě když hlavní minory střídají znaménko, počínajíc záporným.

Příklad 6.16. Určete lokální extrémy funkce $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ležící v prvním oktantu, tj. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Řešení. Nejprve určíme stacionární body, tj. derivujeme a řešíme soustavu rovnic

$$u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 - y^2 = 0,$$

$$u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 7y^3 - 2xz^2 = 0,$$

$$u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad z^3 - y = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = \pm 2x$, a protože hledáme pouze kladné řešení, uvažujeme pouze případ $y = 2x$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme $2x(4x^2 - z^2) = 0$, odtud $z = 2x$ (případ $z = -2x$ opět neuvažujeme). Dosazením do třetí rovnice obdržíme $8x^3 - 2x = 0$

a tato rovnice má kladné řešení $x = \frac{1}{2}$, tedy na množině $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ má soustava rovnic jediné řešení $B = [\frac{1}{2}, 1, 1]$. Vypočteme druhé derivace

$$u_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad u_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad u_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3},$$
$$u_{xy} = \frac{y}{2x^2}, \quad u_{xz} = 0, \quad u_{yz} = -\frac{2z}{y^2}$$

a v bodě $B = \left[\frac{1}{2}, 1, 1\right]$: $u_{xx} = 4$, $u_{yy} = 3$, $u_{zz} = 6$, $u_{xy} = 2$, $u_{xz} = 0$, $u_{yz} = -2$. Dále použijeme větu 6.13. Pro bod $B = \left[\frac{1}{2}, 1, 1\right]$ je

$$d^2u = 4(dx)^2 + 3(dy)^2 + 6(dz)^2 + 2\,dx dy - 2\,dy dz.$$

Tato forma je pozitivně definitní, neboť matice této formy je

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

a její všechny tři hlavní minory jsou kladné, jak zjistíme snadným výpočtem. Celkově má daná funkce u v prvním oktantu jediný lokální extrém v bodě $B = [\frac{1}{2}, 1, 1]$, kde nastává ostré lokální minimum. ▲

6.2. Absolutní extrémy

Definice 6.17. Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathscr{D}(f)$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je bodem *absolutního minima* (*maxima*) funkce f na M, jestliže $f(x^*) \leqq f(x)$ ($f(x^*) \geqq f(x)$) pro každé $x \in M$. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech. Místo termínu absolutní extrém se často používá pojem *globální* extrém.

Připomeňme, že spojitá funkce jedné proměnné na uzavřeném a ohraničeném intervalu nabývá své největší a nejmenší hodnoty buď v bodě lokálního extrému ležícím uvnitř intervalu, nebo v jednom z krajních bodů. Pro funkce více proměnných je situace podobná.

Věta 6.18. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř M, nebo v některém hraničním bodě.*

Důkaz. Tvrzení o existenci absolutních extrémů plyne ihned z Weierstrassovy věty (věta 2.25). Zbývající tvrzení je triviální, neboť jestliže bod absolutního extrému není hraničním bodem (tj. je vnitřním bodem M), musí být i lokálním extrémem. □

Předchozí věta dává praktický návod jak hledat absolutní extrémy *diferencovatelných* funkcí (s takovými se v praktických situacích setkáváme nejčastěji) na kompaktních množinách. Najdeme stacionární body ležící uvnitř množiny a pak vyšetříme danou funkci na hranici množiny. Vyšetření funkce na hranici množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ je obecně poměrně složitý problém a pojednává o něm devátá kapitola. Pro funkce dvou proměnných je však situace poměrně jednoduchá. V tomto případě jsou velmi často hranice nebo její části tvořeny grafy funkcí jedné proměnné. Vyšetřit funkci na hranici pak znamená dosadit rovnici křivky, která tvoří část hranice, do funkce, jejíž extrémy hledáme, a vyšetřovat extrémy vzniklé funkce jedné proměnné. Tento postup je nejlépe srozumitelný na následujících příkladech.

Příklad 6.19.

i) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $z = f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ v trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a tečnou ke grafu funkce $y = \frac{4}{x}$ v bodě $[2, 2]$.

Řešení. Nejprve určeme rovnici tečny ke grafu funkce $y = \frac{4}{x}$. Platí $y' = -\frac{4}{x^2}$, tj. rovnice tečny je $y - 2 = -\frac{4}{4}(x - 2) = -x + 2$. Tedy množinou M, na níž hledáme absolutní extrémy, je množina

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geqq 0, y \geqq 0, y \leqq 4 - x\}.$$

Určíme stacionární body funkce z

$$z_x = y - 2x + 1 = 0, \qquad z_y = x - 2y + 1 = 0,$$

odkud dostáváme stacionární bod $[x, y] = [1, 1] \in M$.
Nyní vyšetřeme funkci f na hranici množiny M, která se skládá z úseček

I. $y = 0$, $x \in [0, 4]$, II. $x = 0$, $y \in [0, 4]$, III. $y = 4 - x$, $x \in [0, 4]$.

I. $y = 0$, $x \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme $u = f(x, 0) = -x^2 + x$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0, 4]$. Platí $u'(x) = -2x + 1 = 0$, odtud $x = \frac{1}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $u(0) = 0$, $u(4) = 12$.

II. $x = 0$, $y \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme $v = f(0, y) = -y^2 + y$ a stejně jako v části I $v(0) = 0$, $v(4) = -12$, $v(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

III. $y = 4 - x$, $x \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme $w = f(x, 4 - x) =$ $= x(4 - x) - x^2 - (4 - y)^2 + x + 4 - x = -3x^2 + 12x - 12$. Platí $w'(x) = -6x + 12 = 0$, odtud $x = 2$, $w(2) = 0$. V krajních bodech $w(0) = -12$, $w(4) = -12$.

Porovnáním funkčních hodnot funkce f na hranici (tj. hodnot funkcí u, v, w v jejich stacionárních bodech a v krajních bodech intervalů, kde tyto funkce vyšetřujeme) s funkční hodnotou funkce f v jediném stacionárním bodě $[1, 1]$ vidíme, že

$$f_{\min} = -12 \text{ pro } [x, y] = [0, 4] \text{ a } [x, y] = [4, 0],$$
$$f_{\max} = 1 \text{ pro } [x, y] = [1, 1].$$

Závěrem poznamenejme, že algebraické úpravy spojené s vyjádřením funkce f na hranici bývají nejčastějším zdrojem numerických chyb. Máme však k dispozici poměrně dobrou průběžnou kontrolu. V bodě $[x, y] = [4, 0]$ se stýkají části hranice I a III, a tedy funkce u z I musí pro $x = 4$ nabývat stejné funkční hodnoty jako funkce w z III v $x = 4$. V našem případě je $u(4) = -12 = w(4)$. Podobně v bodě $[0, 0]$ se stýkají části I a II a v bodě $[0, 4]$ části II a III. Také v těchto bodech průběžná kontrola vychází, neboť $u(0) = 0 = v(0)$ a $w(0) = v(4) = -12$. Doporučujeme čtenáři tuto kontrolu vždy provést, neboť značně minimalizuje možnost šíření numerické chyby ve výpočtu. ▲

ii) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $z = (2x^2 + 3y^2)\,e^{-x^2-y^2}$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 4\}$.

Řešení. Nejprve určíme stacionární body ležící uvnitř množiny M, kterou je kruh o poloměru 2. Vypočteme parciální derivace

$$z_x = 4xe^{-x^2-y^2} - 2x(2x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} = -2xe^{-x^2-y^2}\left[2x^2 + 3y^2 - 2\right],$$
$$z_y = 6ye^{-x^2-y^2} - 2y(2x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} = -2ye^{-x^2-y^2}\left[2x^2 + 3y^2 - 3\right]$$

a položíme je rovny nule:

$$xe^{-x^2-y^2}\left[2x^2 + 3y^2 - 2\right] = 0,$$
$$ye^{-x^2-y^2}\left[2x^2 + 3y^2 - 3\right] = 0.$$

Odtud dostáváme 4 možnosti:

A) $x = 0 = y \implies f(0, 0) = 0$.

B) $x = 0,\ 3y^2 = 3 \implies y = \pm 1,\ f(0, \pm 1) = 3e^{-1}$.

C) $y = 0,\ 2x^2 = 2 \implies x = \pm 1,\ f(\pm 1, 0) = 2e^{-1}$.

D) $2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$ a $2x^2 + 3y^2 - 3 = 0$ — tento systém nemá řešení.

Nyní vyšetřeme funkci f na hranici množiny M. Tu si rozdělíme na dvě části, horní a dolní půlkružnici.

I. $y = \sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 2],\ u = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = (2x^2 + 3(4 - x^2))e^{-4} = (12 - x^2)e^{-4}$. Najdeme největší a nejmenší hodnotu funkce u na intervalu $[-2, 2]$. Těchto extremálních hodnot je dosaženo buď v lokálním extrému uvnitř intervalu $[-2, 2]$, nebo v některém z krajních bodů $x = \pm 2$. Platí $u' = -2xe^{-4} = 0 \implies x = 0$. Odtud $u(0) = e^{-4}$, $u(\pm 2) = 8e^{-4}$.

II. $y = -\sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 2]$. Zde je situace zcela stejná jako pro I, neboť $f(x, -y) = f(x, y)$.

Porovnáním všech vypočtených hodnot vidíme, že

$$f_{\max} = 3e^{-1}, \quad \text{pro } [x, y] = [0, \pm 1],$$
$$f_{\min} = 0, \quad \text{pro } [x, y] = [0, 0].$$

Graf vyšetřované funkce je znázorněn v příloze, příklad P.14; zde lze ověřit, že všechny stacionární body leží uvnitř kruhu M. ▲

iii) Je dán drát délky l, tento drát je rozdělen na tři části. Z jedné je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze zbylé rovnostranný trojúhelník. Určete délky jednotlivých částí tak, aby plocha omezená těmito obrazci byla minimální, resp. maximální.

Řešení. Označíme-li x délku strany čtverce, y poloměr kruhu a z délku strany trojúhelníka, platí $4x + 2\pi y + 3z = l$, odtud $z = \frac{l - 4x - 2\pi y}{3}$. Pro součet obsahů čtverce, kruhu a trojúhelníka platí

$$P = x^2 + \pi y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 = x^2 + \pi y^2 + \frac{1}{12\sqrt{3}}(l - 4x - 2\pi y)^2$$

a hledáme absolutní extrémy této funkce na množině $M = \{[x, y] : x, y \geqq 0, 4x + 2\pi y \leqq l, \}$. Nejprve vypočteme parciální derivace a stacionární body:

$$P_x = 2x - \frac{8}{12\sqrt{3}}(l - 4x - 2\pi y) = 0, \qquad P_y = 2\pi y - \frac{4\pi}{12\sqrt{3}}(l - 4x - 2\pi y) = 0.$$

Odtud

$$x = \frac{l}{4 + \pi + 3\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{l}{8 + 2\pi + 6\sqrt{3}}$$

a funkční hodnota v tomto stacionárním bodě je

$$P(x, y) = \frac{l^2}{4(4 + \pi + 3\sqrt{3})}.$$

Nyní vyšetřeme funkci P na hranici množiny M.

I. $y = 0, x \in \left[0, \frac{l}{4}\right]$, označme $\varphi(x) = P(x, 0) = x^2 + \frac{1}{12\sqrt{3}}(l - 4x)^2$. Pak $\varphi(0) = \frac{l^2}{12\sqrt{3}}$, $\varphi\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{16}$, $\varphi'(x) = 2x - \frac{8}{12\sqrt{3}}(l - 4x) = 0$, tj. $x = \frac{l}{4+\sqrt{3}}$, $\varphi(x) = \frac{l^2}{4(4+3\sqrt{3})}$.

II. $x = 0, y \in \left[0, \frac{l}{2\pi}\right]$, označme $\psi(y) = P(0, y) = \pi y^2 + \frac{1}{12\sqrt{3}}(l - 2\pi y)^2$. Platí $\psi(0) = \frac{l^2}{12\sqrt{3}}$, $\psi\left(\frac{l}{2\pi}\right) = \frac{l^2}{4\pi}$, $\psi'(y) = 2\pi y - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(l - 2\pi y) = 0 \implies y = \frac{l}{2(\pi+3\sqrt{3})}$, $\psi(y) = \frac{l^2}{4(3\sqrt{3}+\pi)}$.

III. $y = \frac{l-4x}{2\pi}$, $x \in \left[0, \frac{l}{4}\right]$, označme $\omega(x) = P\left(x, \frac{l-4x}{2\pi}\right) = x^2 + \frac{1}{4\pi}(l - 4x)^2$. $\omega(0) = \frac{l^2}{4\pi}$, $\omega\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{16}$, $\omega'(x) = 2x - \frac{2}{\pi}(l - 4x) = 0 \implies x = \frac{l}{4+\pi}$, $\omega(x) = \frac{l^2}{4(4+\pi)}$.

Porovnáním všech vypočtených hodnot zjistíme, že největší obsah dostaneme, jestliže celý drát stočíme do kružnice, tj.

$$P_{\max} = \frac{l^2}{4\pi} \text{ pro } [x, y] = \left[0, \frac{l}{2\pi}\right],$$

a nejmenší obsah $P_{\min} = P(x, y) = \frac{l^2}{4(4+\pi+3\sqrt{3})}$, jestliže jej rozdělíme takto:

část na čtverec $\qquad 4x = \dfrac{4l}{4 + \pi + 3\sqrt{3}}$,

část na kruh $\qquad 2\pi y = \dfrac{\pi l}{4 + \pi + 3\sqrt{3}}$,

část na trojúhelník $\qquad 3z = \dfrac{3\sqrt{3}l}{4 + \pi + 3\sqrt{3}}$.

▲

Na závěr této kapitoly si ještě ukažme metodu, jak lze řešit úlohy na absolutní extrémy v některých speciálních případech, např. umíme-li sestrojit vrstevnice funkce, jejíž extrémy hledáme, a pokud množina, kde tyto extrémy hledáme, je „dostatečně jednoduchá“. Celý postup je nejlépe srozumitelný na příkladech.

Příklad 6.20.

i) Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 4y + 10$ na množině M: $x^2 + y^2 \leqq 1$.

Řešení. Platí $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + 2$. Protože konstanta 2 nemá vliv na to, v kterém bodě nastává absolutní minimum a maximum (má vliv pouze na hodnotu těchto extrémů), stačí najít absolutní extrémy funkce $g(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$. Tato funkce však udává druhou mocninu vzdálenosti bodu $[x, y]$ od bodu $[2, 2]$. Úlohu proto můžeme přeformulovat takto:

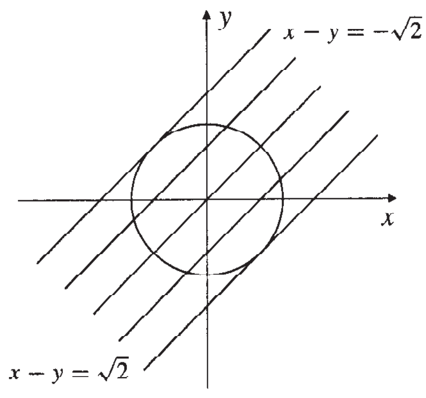
V jednotkovém kruhu najděte bod, který je nejblíže a nejdále od bodu $[2, 2]$.

Geometricky je nyní řešení úlohy zřejmé. Sestrojíme přímku $y = x$ spojující počátek s bodem $[2, 2]$. Průsečíky této přímky s kružnicí $x^2 + y^2 = 1$ jsou řešením naší úlohy, tj. $2x^2 = 1$, odkud $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Minimum nastává v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a maximum v bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a extremální hodnoty jsou $f_{\min} = 11 - 4\sqrt{2}$, $f_{\max} = 11 + 4\sqrt{2}$. Všimněme si také, že průsečíky přímky $y = x$ s jednotkovou kružnicí jsou body, kde jednotková kružnice a vrstevnice funkce f — soustředné kružnice se středem $[2, 2]$ — mají společnou tečnu.

▲

ii) Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x - y$ na množině M: $x^2 + y^2 \leq 1$.

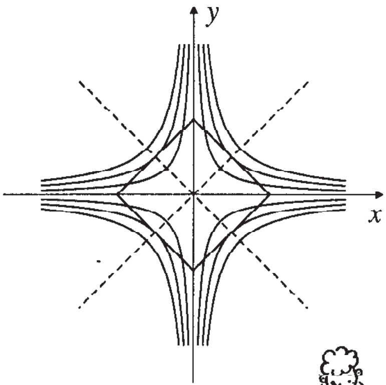
Řešení. Vrstevnice funkce f jsou přímky načrtnuté na vedlejším obrázku. Nutnou podmínkou (a zde i dostatečnou) pro to, aby hodnota $c \in \mathbb{R}$ byla hodnotou absolutního maxima, resp. minima funkce f je, že přímka $x - y = c$ je tečnou ke kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Vskutku, pokud přímka $x - y = c$ kružnici protne, znamená to, že pro $\tilde{c}$ dostatečně blízká c protne kružnici i přímka $x - y = \tilde{c}$. To však znamená, že funkce $x - y$ nabývá na M hodnot jak větších než c (pro $\tilde{c} > c$), tak menších než c (pro $\tilde{c} < c$). Jestliže přímka $x - y = c$ kružnici vůbec neprotne, znamená to, že tyto body neleží v M, a tedy nepřipadají v úvahu. Zbývá tedy pouze možnost, že přímka $x - y = c$ je tečnou.



Z obrázku je nyní zřejmé, že maximum nastane v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, jeho hodnota je $\sqrt{2}$, a minimum je v bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, jeho hodnota je $-\sqrt{2}$.

iii) Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = xy$ na množině tvaru $M\colon\ |x| + |y| \leqq 1$.

Řešení. Množina M a vrstevnice funkce f jsou načrtnuty na vedlejším obrázku (vrstevnicemi jsou grafy funkcí $xy = c$, tj. rovnoosé hyperboly $y = \frac{c}{x}$). Stejnou úvahou jako v předchozím příkladu zjistíme, že funkce nabývá absolutního maxima $f_{\max} = \frac{1}{4}$ v bodech $\left[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right]$ a absolutního minima $f_{\min} = -\frac{1}{4}$ v bodech $\left[\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right]$. ▲



Cvičení

6.1. Najděte lokální extrémy funkcí:

a) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$,
b) $z = xy(4 - x - y)$,
c) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$,
d) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$,
e) $z = x^2 + xy + y^2 - \ln x - \ln y$,
f) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,
g) $z = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$,
h) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$,
i) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$,
j) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$,
k) $u = xyz(12 - x - 2y - 3z)$,
l) $u = x_1 x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \dots - nx_n)$, $x_1, x_1, \dots, x_n > 0$,
m) $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$, $x_1, \dots, x_n > 0$.

6.2. Udejte příklad funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ splňující uvedené podmínky:

a) $f_x(1, 1) = 0 = f_y(1, 1)$, ale v bodě $[1, 1]$ nenastává lokální extrém;

b) f má v bodě $[0, 1]$ ostré lokální minimum a v bodě $[1, 0]$ ostré lokální maximum;

c) f má v bodě $[-1, 0]$ ostré lokální minimum, v bodě $[0, 0]$ sedlo a v bodě $[1, 0]$ ostré lokální maximum.

6.3. Pomocí vrstevnic funkce f určete její nejmenší a největší hodnotu na množině M:

a) $f(x, y) = x + y$, $M\colon |x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1$,
b) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$, $M\colon x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq 1$,
c) $f(x, y) = |x| + |y|$, $M\colon (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 1$,
d) $f(x, y, z) = x + y + z$, $M\colon x^2 + y^2 \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1$,
e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $M\colon x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$.

6.4. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce f na množině M:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$, M je trojúhelník určený body $A = [0, 2]$, $B = [3, 0]$, $C = [0, -1]$,

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2$, M je omezená grafy funkcí $y = |x|$ a $y = 2$,

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$, M je trojúhelník určený body $A = [-1, 0]$, $B = [1, 2]$, $C = [3, 0]$,

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2$, $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq |x| - 1\}$,

e) $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$ na $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leqq 9\}$,

f) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$ na $M = \{[x, y] :\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$.

6.5. Určete absolutní extrémy funkce f na množině M:

a) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $M: 0 \leqq x, y \leqq \pi$,

b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $M: |x| + |y| \leqq 1$,

c) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $M: x^2 + y^2 \leqq z \leqq 1$,

d) $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\dots(x_n+b)}$, $M:\ a \leqq x_1, \dots, x_n \leqq b, 0 < a < b$ (tzv. Huyghensova[1] úloha), nejprve řešte úlohu pro $n = 2$.

6.6. Rozložte kladné číslo h

a) na součet tří nezáporných čísel tak, aby jejich součin byl největší;

b) na součin tří kladných čísel tak, aby jejich součet byl nejmenší.

6.7. Ověřte, že matice $f''(x^*)$ je pro následující funkce semidefinitní v bodě $x^* = [0, 0]$, a rozhodněte, zda v tomto bodě nastává lokální extrém:

a) $f(x, y) = x^2 + y^4$,

b) $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$,

c) $f(x, y) = x^2 + y^3$.

*

Věčným zázrakem světa je jeho pochopitelnost... To, že je svět pochopitelný, je zázrak. (A. Einstein)

*

[1] Christian Huyghens (1629–1695), nizozemský matematik a fyzik.

Kapitola 7

Zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí

V této kapitole využijeme výsledků předcházejících částí ke studiu vlastností zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí. Výsledky, které zde odvodíme, hrají důležitou roli mj. v teorii integrálu funkcí více proměnných, a to při důkazu věty o substituci ve vícerozměrném integrálu, viz [R2].

7.1. Zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$

Definice 7.1. Nechť jsou dány funkce f, g dvou proměnných a $\mathscr{D} = \mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$. Dále nechť zobrazení $F : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem

$$[x, y] \xmapsto{F} [f(x, y), g(x, y)].$$

Pak řekneme, že *zobrazení F je určeno funkcemi f, g*, tyto funkce nazýváme *složky* nebo také *souřadnicové funkce* zobrazení F a píšeme $F = [f, g]$.

Příklad 7.2. Vypište složky zobrazení pro stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic, otočení o úhel φ a pro kruhovou inverzi určenou jednotkovou kružnicí.

Řešení.

i) *Stejnolehlost se středem v počátku.* Je-li k koeficient stejnolehlosti, pak

$$[x, y] \xmapsto{F} [kx, ky].$$

ii) *Otočení o úhel $\varphi \in [0, \pi]$ v kladném smyslu.* Pro odchylku ψ dvou přímek procházejících počátkem a bodem $[x_1, y_1]$, resp. $[x_2, y_2]$ platí

$$\cos\psi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

(kosinus úhlu je roven podílu skalárního součinu a součinu velikostí vektorů určených počátkem a body $[x_1, y_1]$, resp. $[x_2, y_2]$). Proto zobrazení F, které bodu $[x, y]$ přiřadí bod otočením o úhel φ kolem počátku v kladném smyslu (tj. proti směru otáčení hodinových ručiček), je tvaru

$$[x, y] \stackrel{F}{\longmapsto} [x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi].$$

iii) *Kruhová inverze určená jednotkovou kružnicí.* Při tomto zobrazení je bodu $[x, y]$ přiřazen bod $[u, v]$ ležící na polopřímce určené počátkem a bodem $[x, y]$ s vlastností, že součin vzdáleností bodů $[x, y]$ a $[u, v]$ od počátku je roven 1. Protože $[x, y]$ a $[u, v]$ leží na stejné polopřímce, existuje reálné $\alpha > 0$ takové, že $u = \alpha x$, $v = \alpha y$. Z podmínky na vzdálenost bodů $[x, y]$ a $[u, v]$ od počátku dostáváme $\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{u^2 + v^2} = \alpha(x^2 + y^2) = 1$, odtud $\alpha = (x^2 + y^2)^{-1}$. Toto zobrazení je proto tvaru

$$[x, y] \stackrel{F}{\longmapsto} \left[\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right].$$

▲

Příklad 7.3. Zobrazení množiny komplexních čísel do sebe lze chápat také jako zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Například zobrazení, které komplexnímu číslu $z = x + \mathrm{i}y$ přiřadí jeho druhou mocninu z^2, definuje zobrazení

$$[x, y] \stackrel{F}{\longmapsto} [x^2 - y^2, 2xy],$$

neboť $z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$.

Definice 7.4. Řekneme, že zobrazení $F = [f, g]$ z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ je *spojité v bodě* $[x_0, y_0]$, jsou-li funkce f, g spojité v $[x_0, y_0]$.
Řekneme, že F je *diferencovatelné v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže každá z funkcí f, g je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Zobrazení $\mathrm{d}F(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\begin{aligned}[h, k] \stackrel{\mathrm{d}F}{\longmapsto} [\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k), \mathrm{d}g(x_0y_0)(h, k)] &= \\ = [f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k, g_x(x_0, y_0)h + g_y(x_0, y_0)k]\end{aligned}$$

nazýváme *diferenciál* zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $\mathrm{d}F(x_0, y_0)$

Podle této definice je tedy diferenciál zobrazení F *lineární* zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Protože z lineární algebry víme, že každé lineární zobrazení mezi konečně dimenzionálními prostory lze reprezentovat vhodnou maticí, dostáváme se k následující definici.

Definice 7.5. Nechť zobrazení $F = [f, g]$ z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ je diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$. Matici typu 2×2

$$F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

nazýváme *Jacobiho*[1] *matice* zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$, determinant této matice nazýváme *jacobián* zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$.

Nejprve odvodíme vzorec pro diferenciál složeného zobrazení. Je zcela analogický vztahu pro derivaci složené funkce jedné proměnné, stačí „zapomenout", že místo zobrazení mezi jednodimenzionálními prostory se jedná o vícerozměrná zobrazení.

Věta 7.6. *Nechť $F = [f_1, f_2]$, $G = [g_1, g_2]$ jsou zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Pak pro Jacobiho matici složeného zobrazení $H = F \circ G$ platí*

$$H'(x, y) = F'(u, v)G'(x, y), \tag{7.2}$$

kde $[u, v] = G(x, y)$, tj. $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$. Pro jejich jacobiány dostáváme $\det H'(x, y) = \det F'(u, v) \det G'(x, y)$.

Důkaz. Nechť h_1, h_2 jsou souřadnicové funkce zobrazení H, tj.

$$h_1(x, y) = f_1(g_1(x, y), g_2(x, y)), \qquad h_2(x, y) = f_2(g_1(x, y), g_2(x, y)). \tag{7.3}$$

Aplikací věty 5.1 dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} h_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial u} f_1(u, v) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial v} f_1(u, v) \frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y) \tag{7.4}$$

a podle definice 7.5

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}, \qquad G'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li tyto dvě matice, vidíme, že prvek nacházející se vlevo nahoře je právě roven $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y)$, kde h_1 je dáno v (7.3). Stejným způsobem ověříme, že i ostatní prvky součinu matic $F' \cdot G'$ jsou totožné s výrazy pro prvky matice H získané pomocí (7.2), čímž je rovnost (7.2) dokázána. Vzorec pro jacobiány plyne z faktu, že determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů. □

V diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné jsme vyšetřovali lokální vlastnosti funkce (tj. v okolí daného bodu) pomocí derivace funkce v tomto bodě (což je pro funkci jedné proměnné v podstatě ekvivalentní diferenciálu této funkce, neboť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je v nějakém bodě diferencovatelná, právě když zde existuje konečná derivace f'). Podobně budeme postupovat v případě zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí.

[1] Carl Jacobi (1804–1851), německý matematik.

Věta 7.7. *Předpokládejme, že složky zobrazení* $F = [f, g]: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *mají v bodě* $[x_0, y_0]$ *spojité parciální derivace prvního řádu a Jacobiho matice* $F'(x_0, y_0)$ *je regulární, tj.* $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$. *Pak existuje okolí* $\mathcal{U}$ *bodu* $[x_0, y_0]$, *v němž je zobrazení* F *prosté, a pro Jacobiho matici inverzního zobrazení* F^{-1} *v bodě* $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$ *platí*

$$(F^{-1})'(u_0, v_0) = \left[F'(x_0, y_0)\right]^{-1}. \tag{7.5}$$

Důkaz. Tvrzení zde nebudeme dokazovat se všemi podrobnostmi (detailní důkaz je proveden v [R1]). Zdůrazněme zde pouze hlavní myšlenku důkazu. Diferenciál $dF(x_0, y_0)$ zobrazení $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je nejlepší lineární aproximace F v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Je-li zobrazení $dF(x_0, y_0)$ prosté — to nastane, právě když je jeho matice $F'(x_0, y_0)$ regulární — je v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$ prosté i samo zobrazení F.

Vztah (7.5) dokážeme takto: Z definice inverzního zobrazení je $F^{-1}(F(x, y)) = [x, y]$. Položme $[u, v] = F(x, y)$. Ze vztahu pro Jacobiho matici složeného zobrazení plyne $(F^{-1})'(u, v)\, F'(x, y) = E$ — jednotková matice (neboť Jacobiho matice identického zobrazení je jednotková matice) a odtud $(F^{-1})'(u, v) = [F'(x, y)]^{-1}$. □

Příklad 7.8.

i) Rozhodněte, zda zobrazení $F = [f, g]: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se souřadnicovými funkcemi $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = \frac{x}{y}$ je prosté v okolí bodu $[x, y] = [2, 1]$. Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $[u, v] = F(2, 1)$.

Důkaz. Jacobiho matice zobrazení F je

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

a pro bod $[x, y] = [2, 1]$ je $\det F'(2, 1) = -4$, tedy F je prosté v jistém okolí bodu $[2, 1]$. Pro Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $[2, 2] = F(2, 1)$ platí

$$(F^{-1})'(2, 2) = [F'(2, 1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

▲

ii) Určete Jacobiho matici zobrazení $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je složením kruhové inverze, jejíž řídicí kružnice je jednotková, a otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu, přičemž nejprve se provádí kruhová inverze.

Řešení. Kruhová inverze přiřadí bodu $[x, y]$ bod $\left[\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right]$ a otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu přiřadí bodu $[x, y]$ bod $[-y, x]$, viz příklad 7.2. Složené zobrazení tedy přiřadí bodu $[x, y]$ bod $\left[-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right]$. Jacobiho matice tohoto zobrazení je

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)2} \end{pmatrix}.$$

▲

Poznámka 7.9.

i) Jacobiho matici inverzního zobrazení v příkladu 7.8 i) můžeme vypočíst také přímo — prostřednictvím explicitního vyjádření inverzního zobrazení k F. Vypočteme-li z rovnic $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$ proměnné x a y pomocí u a v, dostáváme

$$x = \pm\sqrt{uv}, \ y = \pm\sqrt{\frac{u}{v}},$$

a vzhledem k tomu, že hledáme inverzní zobrazení v okolí bodu $[2, 1]$, bereme v obou rovnicích $+$. Pak

$$(F^{-1})'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}x & \frac{\partial}{\partial v}x \\ \frac{\partial}{\partial u}y & \frac{\partial}{\partial v}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme-li sem $[u, v] = F(2, 1) = [2, 2]$, dostáváme vskutku stejný výsledek jako v příkladu 7.8.

ii) Ze skutečnosti, že $\det F'(x_0, y_0) = 0$ pro nějaké zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ještě neplyne, že F *není* prosté v okolí bodu $[x_0, y_0]$, tj. podmínka $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$ je pouze *dostatečná*, nikoliv nutná pro to, aby zobrazení F bylo prosté v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Například zobrazení F dané předpisem

$$[x, y] \stackrel{F}{\longmapsto} [x^3, y^3]$$

zobrazuje prostě $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$, přestože $\det F'(0, 0) = 0$.

7.2. Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

Pro zobrazení mezi prostory dimenzí vyšších než dvě je situace zcela analogická. Jsou-li $n, m \in \mathbb{N}$ a $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pak přiřazení

$$[x_1, \dots, x_n] \stackrel{F}{\longmapsto} [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)]$$

definuje zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Funkce $f_1, \dots, f_m$ se nazývají *složky* nebo *souřadnicové funkce* zobrazení F. Jsou-li všechny složky spojité v bodě x^*, řekneme, že F je *spojité v bodě* x^*. Jsou-li $f_1, \dots, f_n$ diferencovatelné v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$, řekneme, že zobrazení F je *diferencovatelné* v bodě x^*. Jeho diferenciál $\mathrm{d}F(x^*)$ definujeme jako *lineární* zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$h = [h_1, \dots, h_n] \stackrel{\mathrm{d}F}{\longmapsto} [\mathrm{d}f_1(x^*)(h), \dots, \mathrm{d}f_m(x^*)(h)],$$

kde $\mathrm{d}f_1(x^*), \dots, \mathrm{d}f_m(x^*)$ jsou diferenciály souřadnicových funkcí v bodě x^*, tj.

$$\mathrm{d}f_k(x^*)(h) = \mathrm{d}f_k(x^*)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^*)h_i.$$

Matice tohoto lineárního zobrazení (je to matice typu $m \times n$)

$$F'(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

se nazývá *Jacobiho matice* nebo také *derivace* zobrazení F a v případě $n = m$ se její determinant nazývá *jacobián* zobrazení F v bodě x^*. V některé starší literatuře se jacobián značí

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(x^*) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x^*).$$

Věta 7.10. *Nechť zobrazení $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ a zobrazení $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné v bodě $y^* = G(x^*)$. Pak složené zobrazení $H = F \circ G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné v bodě x^* a platí*

$$H'(x^*) = F'(y^*)G'(x^*) = F'(G(x^*))G'(x^*). \tag{7.7}$$

Je-li $n = m$ a $\det G'(x^*) \neq 0$, existuje okolí bodu x^*, v němž je zobrazení G prosté, tj. existuje zde inverzní zobrazení G^{-1} a pro jeho Jacobiho matici v bodě $y^* = G(x^*)$ platí

$$(G^{-1})'(y^*) = [G'(x^*)]^{-1}. \tag{7.8}$$

Poznámka 7.11. Vzorce (7.7) a (7.8) pro Jacobiho matici složeného zobrazení a Jacobiho matici inverzního zobrazení jsou formálně zcela stejné jako vzorce pro derivaci složené a inverzní funkce jedné proměnné, zde však musíme dávat pozor na pořadí obou činitelů, neboť násobení matic není komutativní operace. Matice F' je typu $k \times m$, G' je typu $m \times n$, násobení těchto matic je tedy možné pouze v pořadí uvedeném v (7.7) (tímto způsobem se také pořadí činitelů nejlépe pamatuje).

Příklad 7.12.

i) Vypočtěte Jacobiho matici zobrazení $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které bodu $[x, y, z]$ přiřadí jeho sférické souřadnice

$$[x, y, z] \overset{F}{\longmapsto} \left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right].$$

Řešení. Podle (7.6) platí

$$F'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} & \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} & \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)} \end{pmatrix}.$$

▲

ii) Jak jsme již poznamenali v příkladu 7.3, zobrazení $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ množiny komplexních čísel do sebe můžeme chápat jako zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které komplexnímu číslu $z = x + iy$ přiřadí číslo $F(z) = f(x, y) + ig(x, y)$, kde f, g jsou reálné funkce dvou proměnných. Podobně jako v reálném oboru definujeme derivaci komplexní funkce F v čísle $z_0 = x_0 + iy_0$ vztahem

$$F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0},$$

přičemž limita komplexní funkce v tomto vztahu se chápe zcela analogicky jako v reálném oboru a znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna z splňující $0 < |z - z_0| < \delta$ platí

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - F'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Dokažte toto tvrzení: Nechť funkce f, g jsou diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$. Pak komplexní funkce F má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ derivaci, právě když platí tzv. Cauchyovy-Riemannovy[1] podmínky

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Řešení. Označme $F'(z_0) = A + iB$. Z diferencovatelnosti funkcí f, g v bodě $[x_0, y_0]$ plyne

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - F'(z_0) = \\
&= \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) + ig(x, y) - [f(x_0, y_0) + ig(x_0, y_0)]}{(x - x_0) + i(y - y_0)} - (A + iB) = \\
&= \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) + B(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + \\
&\quad + i \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{g(x, y) - g(x_0, y_0) - B(x - x_0) - A(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \\
&= \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{(f_x(x_0, y_0) - A)(x - x_0) + (f_y(x_0, y_0) + B)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \\
&\quad + i \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{(g_x(x_0, y_0) - B)(x - x_0) + (g_y(x_0, y_0) - A)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.
\end{aligned}$$

Odtud $f_x(x_0, y_0) = A = g_y(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0) = -B = -g_x(x_0, y_0)$. ▲

[1] Augustin Louis Cauchy (1789–1857), francouzský matematik, Bernhard Riemann (1826 až 1866), německý matematik, oba jsou považováni za spolutvůrce moderní matematiky.

7.3. Diferenciální operátory matematické fyziky

V odstavci 4.1 jsme uvedli, že ve fyzikální terminologii a také v některých odvětvích matematiky, např. v numerických metodách, se vektor parciálních derivací f' funkce f nazývá gradient funkce a značí se grad f.

Zobrazení $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se ve fyzikální terminologii nazývá *vektorové pole*. Lze je chápat jako zobrazení, které bodu o souřadnicích $[x, y, z]$ přiřadí vektor s počátečním bodem v počátku a koncovým bodem

$$F(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)],$$

kde P, Q, R jsou souřadnicové funkce. Důležitými fyzikálními charakteristikami vektorových polí jsou tzv. *divergence* vektorového pole

$$\operatorname{div} F(x, z, y) = P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z)$$

a *rotace* vektorového pole

$$\operatorname{rot} F(x, z, y) = \\ = [R_y(x, y, z) - Q_z(x, y, z), P_z(x, y, z) - R_x(x, y, z), Q_x(x, y, z) - P_y(x, y, z)]$$

(tedy divergence je skalární veličina a rotace je vektorová veličina).

Příklad 7.13. Vypočtěte divergenci a rotaci gravitačního pole vytvořené hmotným bodem o jednotkové hmotnosti umístěným v počátku souřadné soustavy.

Řešení. Z fyziky je známo, že dva hmotné body o hmotnostech m_1, m_2 se navzájem přitahují silou, jejíž velikost je $|F| = \frac{\kappa m_1 m_2}{d^2}$, kde $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 je Newtonova gravitační konstanta a d je vzdálenost bodů. Bod $[x, y, z]$ s jednotkovou hmotností bude přitahován do počátku silou, jejíž směr je opačný než směr vektoru s počátkem v $[0, 0, 0]$ a koncem v $[x, y, z]$ a jejíž velikost $|F|$ je rovna $\kappa(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$. Tedy $F(x, y, z) = -\alpha[x, y, z]$ a hodnotu skaláru α určíme z podmínky pro velikost F, tj. $\alpha\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \kappa(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$, a tedy $\alpha = \kappa(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$. Odtud

$$F(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)] = \kappa\left[-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right],$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Nyní vypočteme všechny parciální derivace funkcí P, Q, R potřebné k určení div F a rot F.

$$P_x = \kappa\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right), \quad Q_y = \kappa\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right), \quad R_z = \kappa\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right),$$

odtud snadno ověříme, že pro $[x, y, z] \neq [0, 0, 0]$ je div $F = 0$. Podobně vypočteme

$$P_y = Q_x = \kappa\frac{3xy}{r^5}, \quad P_z = R_x = \kappa\frac{3xz}{r^5}, \quad Q_z = R_y = \kappa\frac{3yz}{r^5},$$

a tedy i rot $F = 0$. ▲

Manipulace s diferenciálními výrazy obsahujícími operátory rotace a divergence se podstatně usnadňuje zavedením tzv. Hamiltonova *nabla* operátoru ∇[1]. Tento symbol je formálně definován jako vektorový operátor předpisem

$$\nabla :=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

tj. jako operátor, který funkci $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ přiřazuje vektorové pole

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Toto je alternativní označení pro vektorové pole f', které diferencovatelné funkci f přiřazuje její derivaci. Operátor ∇ lze s výhodou použít i při formalizaci operátorů divergence a rotace. Uvažujme nejprve případ divergenčního operátoru. Formálně můžeme aplikaci operátoru divergence na pole F zapsat takto:

$$\operatorname{div} F = \langle \nabla, F\rangle = \left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), (P, Q, R)\right\rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{7.9}$$

Podobně můžeme formalizovat operátor rotace rot pomocí vektorového součinu takto:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Připomeňme, že vektorový součin $u \times v$ dvou vektorů $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ je definován jako vektor kolmý na lineární prostor generovaný dvojicí vektorů u, v, orientovaný podle pravidla pravé ruky, o délce

$$||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \sin\varphi,$$

kde φ je úhel mezi vektory u, v. Konkrétně, souřadnice vektoru $u \times v$ jsou

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_2 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2).$$

Zejména jsou-li vektory u, v lineárně závislé, pak $u \times v = 0$. Proto pro složení operátorů rotace a gradientu platí

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = 0$$

pro libovolnou dostatečně hladkou funkci f. Podobně lze ukázat, že $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$ pro libovolné dostatečně hladké vektorové pole F. Poslední identita plyne z faktu, že skalární součin $\langle u, u \times v\rangle = 0$, neboť vektor $u \times v$ je kolmý na každý z vektorů u, v. Proto

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} F = \langle \nabla, \nabla \times F\rangle = 0.$$

[1] William Rowan Hamilton (1805–1865), irský matematik. Termín nabla operátor byl zaveden přímo Hamiltonem, nabla označuje starý hudební nástroj trojúhelníkového tvaru.

Obě výše uvedené identity lze samozřejmě dokázat i přímým derivováním, jejich ověření tímto způsobem je však pracnější.

Na závěr této kapitoly připomeňme ještě pojem Laplaceova operátoru Δ, který je definován předpisem

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Parciální diferenciální rovnice $\Delta u = 0$ se nazývá *Laplaceova rovnice* (viz závěr první části kapitoly 5) a její řešení se nazývají *harmonické funkce*. Pomocí operátoru ∇ můžeme Laplaceův operátor definovat takto:

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \langle \nabla, \nabla u \rangle = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Cvičení

7.1. Rozhodněte, zda zobrazení $F = [f, g]$ je prosté v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = xy$, $[x_0, y_0] = [0, 1]$,

b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $g(x, y) = y^3 + 3x^2 y$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$,

c) $f(x, y) = x^y$, $g(x, y) = y^x$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$.

7.2. Určete souřadnicové funkce a Jacobiho matici uvedených zobrazení:

a) Osová souměrnost podle přímky p, jejíž rovnice je $ax + by + c = 0$.

b) Složení osové souměrnosti podle přímky $y = x$ a projekce bodu na jednotkovou kružnici (bodu $[x, y] \neq [0, 0]$ je přiřazen bod na jednotkové kružnici, který je průsečíkem kružnice s přímkou určenou počátkem a bodem $[x, y]$).

c) Bodu $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ je přiřazen bod ležící na rovníku kulové plochy se středem v počátku procházející bodem $[x, y, z]$, přičemž přiřazený bod leží na stejném poledníku.

d) „Eliptická inverze v $\mathbb{R}^3$": Bodu $[x, y, z]$ je přiřazen bod ležící na polopřímce určené počátkem a bodem $[x, y, z]$, přičemž součin vzdálenosti vzoru a obrazu od počátku je roven vzdálenosti od počátku průsečíku jejich spojnice s elipsoidem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

7.3. Je dána dvojice diferencovatelných funkcí $R(r, \varphi)$, $\Phi(r, \varphi)$, která definuje funkci $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \to R(r, \varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(r,\varphi)}.$$

Využitím výsledku příkladu 7.12 ii) určete nutnou podmínku, aby F měla derivaci.

7.4. Dokažte následují identity (buď přímým derivováním, nebo pomocí operátoru ∇). V těchto identitách $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

1. $\operatorname{div}(fF) = \langle F, \operatorname{grad} f\rangle + f \operatorname{div} F$,
2. $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + \langle \operatorname{grad} f, F\rangle$,
3. $\operatorname{div}(F \times G) = \langle \operatorname{rot} A, B\rangle - \langle A, \operatorname{rot} B\rangle$,
4. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{grad}\operatorname{div} F - \Delta F$ (výraz ΔF je třeba chápat jako aplikaci operátoru Δ na každou z komponent vektorového pole F).

*

Důležité je nepřestat se ptát. Zvědavost existuje z dobrého důvodu. Nelze než žasnout, rozvažujeme-li o tajemstvích věčnosti, života a úžasného uspořádání věcí vezdejších. Stačí, když se člověk snaží každý den porozumět alespoň kousku tohoto tajemství. Nikdy neztrácejte zvědavost, tu posvátnou vlastnost. (A. Einstein)

*

Kapitola 8

Funkce zadaná implicitně

Uvažujme tento problém: Nechť F je funkce dvou proměnných a označme množinu (křivku)

$$M = \{[x, y] \in \mathscr{D}(F) : F(x, y) = 0\}.$$

Například pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je křivka M jednotková kružnice se středem v počátku.

Zvolme libovolný bod na křivce M. Chceme vyšetřit chování křivky v okolí tohoto bodu, zejména určit rovnici tečny v tomto bodě a rozhodnout, zda křivka v okolí tohoto bodu leží nad, nebo pod tečnou.

Jestliže křivka M je přímo grafem funkce jedné proměnné $y = f(x)$, tj. $F(x, y) = y - f(x) = 0$, problém snadno vyřešíme výpočtem derivací f', f''. Rovněž v jednoduchých případech, jako je rovnice kružnice, lze využít metod diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné, neboť z rovnice kružnice můžeme snadno spočítat y jako funkci proměnné x. Je-li však rovnice křivky komplikovanější, např. $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, a chceme určit rovnici tečny ke křivce určené touto rovnicí v bodě $[x_0, y_0] = [1, 1]$, předchozí postup selhává, protože z rovnice křivky nelze y rozumně spočítat.

V této kapitole ukážeme, jak tuto nesnáz obejít. Budeme se nejprve zabývat problémem, zda je křivka M v okolí daného bodu totožná s grafem nějaké funkce jedné proměnné, a pokud ano, jak spočítat její derivace.

V prvním odstavci je tento problém vyřešen pro funkci jedné proměnné, v druhém pro funkci n proměnných a v třetím odstavci pro zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí.

8.1. Implicitně zadaná funkce jedné proměnné

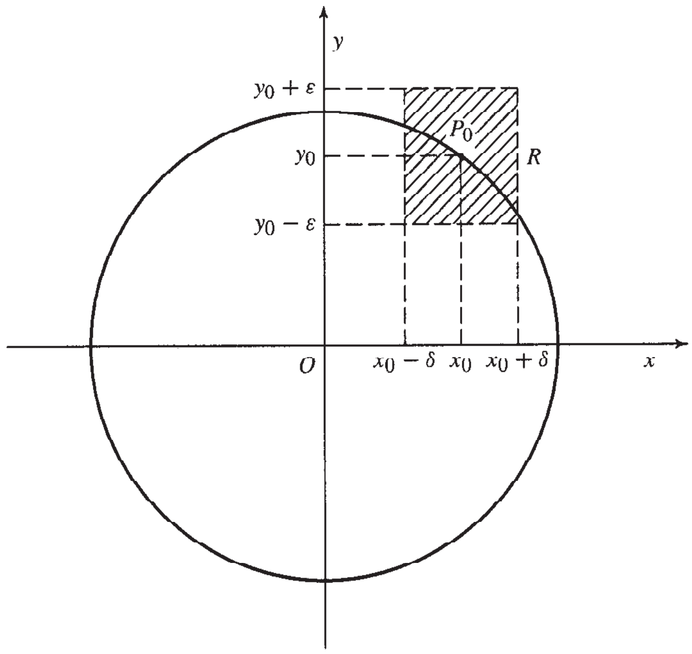
Definice 8.1. Nechť F je funkce dvou proměnných a $F(x_0, y_0) = 0$. Předpokládejme, že existuje obdélníkové okolí $\mathcal{O} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, s následující vlastností:

K libovolnému $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje v intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ právě jedno y takové, že $F(x, y) = 0$. Označme tuto hodnotu $y = f(x)$.

Pak o takto definované funkci $f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, říkáme, že je *zadaná implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu (x_0, y_0).

Jinými slovy, funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ zadána implicitně[1] rovnicí $F(x, y) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

V případě rovnice kružnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ z obrázku vidíme, že v okolí libovolného bodu $P_0 \neq [\pm 1, 0]$ této kružnice je rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ implicitně zadána funkce $y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ (znaménko + bereme, leží-li bod na horní půlkružnici, a znaménko −, je-li na dolní půlkružnici).



[1] Doslovný český překlad slova implicitní je nerozvinutý, v něčem obsažený.

Dále vidíme, že v okolí bodů $[\pm 1, 0]$ není rovnicí zadána žádná funkce proměnné x.

Jako jiný příklad uvažujme křivky dané rovnicemi

$$F(x, y) := x - y^2 = 0 \qquad \text{(parabola)},$$
$$F(x, y) := x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{(dvojice přímek } y = \pm x\text{)}.$$

Je vidět, že v libovolném okolí počátku není rovnicí $F(x, y) = 0$ určena implicitně žádná funkce. Naopak v dostatečně malém okolí každého jiného bodu těchto křivek je rovnicí $F(x, y) = 0$ definována funkce $y = f(x)$. V prvním případě to jsou funkce $y = \sqrt{x}$ nebo $y = -\sqrt{x}$, podle toho, leží-li bod v horní, nebo dolní polorovině určené osou x, ve druhém případě $y = x$ nebo $y = -x$, podle toho, na které z dvojice přímek bod leží.

V následující větě 8.2 je uvedena postačující podmínka pro existenci funkce zadané implicitně v okolí daného bodu křivky a ve větě 8.4 způsob pro výpočet její derivace.

Věta 8.2. *Nechť je funkce F spojitá na čtverci $R = \{[x, y] \in \mathcal{D}(F) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\}$ a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že funkce F má spojitou parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.*

Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna funkce $y = f(x)$, která je spojitá.

Důkaz. Existenci implicitně zadané funkce dokážeme pomocí Banachovy věty o pevném bodu kontraktivního zobrazení v úplném metrickém prostoru, viz [D-D]. Nechť $\varepsilon, \delta > 0$ jsou reálná čísla, jejichž přesnou hodnotu určíme později, a označme $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Uvažujme prostor funkcí

$$P = \{g \in C(I) : g(x_0) = y_0, \ |g(x) - y_0| \leqq \varepsilon \text{ pro } x \in I\}.$$

To znamená, že P je prostor spojitých funkcí na I, jejichž grafy procházejí bodem $[x_0, y_0]$ a leží v δ-ε obdélníku kolem bodu $[x_0, y_0]$. Na P uvažujme metriku stejnoměrné konvergence $\rho(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$. Označme $d = F_y(x_0, y_0) \neq 0$ a definujme na P zobrazení $T : P \to C(I)$ předpisem

$$g(x) \overset{T}{\longmapsto} g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d}.$$

Najdeme-li pevný bod $f \in P$ zobrazení T, je tento bod hledanou implicitně zadanou funkcí f. Vskutku, je-li $f(x) = T(f)(x) = f(x) - d^{-1}F(x, f(x))$, je $d^{-1}F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in I$, což podle definice 8.1. znamená, že funkce f je implicitně zadána rovností $F(x, y) = 0$.

Určíme nyní konstanty δ a ε tak, aby zobrazení T bylo kontrakcí a zobrazovalo prostor P do sebe (což jsou spolu s úplností prostoru P předpoklady Banachovy věty).

Nechť $f, g \in P$. Využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci F dostáváme

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(g)(x)| &= \\ &= \max_{x\in I} |f(x) - d^{-1}F(x, f(x)) - g(x) + d^{-1}F(x, g(x))| = \\ &= \left| f(x) - g(x) - \frac{F_y(x, \xi)(f(x) - g(x))}{d} \right| = \\ &= |f(x) - g(x)| \cdot \left| 1 - \frac{F_y(x, \xi)}{d} \right|, \end{aligned}$$

kde $\xi = \xi(x)$ leží mezi $f(x)$ a $g(x)$. Protože funkce F_y je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ a $F_y(x_0, y_0) = d$, existují $\varepsilon, \delta_1 > 0$ taková, že $|1 - d^{-1}F_y(x, y)| < \frac{1}{2}$ pro $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Je-li $\delta \leqq \delta_1$, pro takto zvolená ε, δ_1 platí

$$\begin{aligned} \rho(T(f), T(g)) = \max_{x\in I} |f(x) - g(x)| \cdot \left| 1 - \frac{F_y(x, \xi)}{d} \right| &\leqq \\ \leqq \frac{1}{2} \max_{x\in I} |f(x) - g(x)| = \frac{1}{2}\rho(f, g), \end{aligned}$$

tj. T je kontrakce s koeficientem kontrakce $q = \frac{1}{2}$. Nechť $f \in P$. Pak $T(f)$ je spojitá funkce a $T(f)(x_0) = f(x_0) - d^{-1}F(x_0, f(x_0)) = y_0$. Odtud plyne existence $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ platí

$$|T(f)(x) - y_0| \leqq \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pak pro takto určená ε, δ je T kontraktivní zobrazení P do sebe, což jsme potřebovali dokázat. □

Poznámka 8.3.

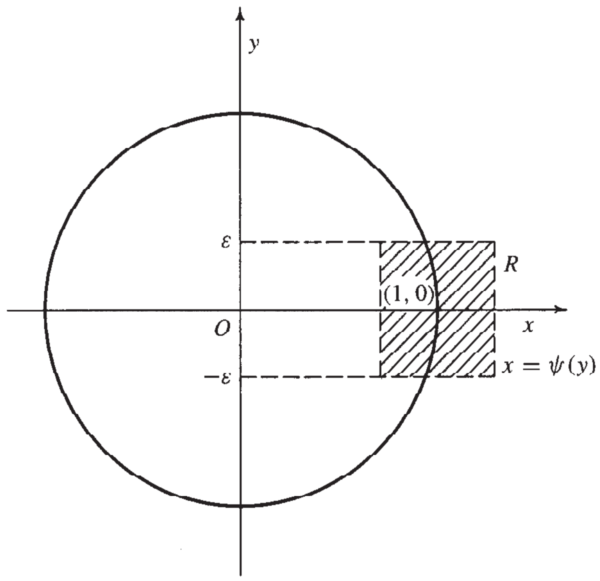
i) Uvědomme si, že rovností $F(x, y) = 0$ může být v dostatečně velkém okolí bodu $[x_0, y_0]$ zadána jedna či více spojitých nebo nespojitých funkcí. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

Uvažujme rovnici $y(y - 1) = 0$. Touto rovnicí je v okolí bodu $[0, 0]$ určena spojitá funkce $y \equiv 0$ a kromě ní také nespojitá funkce

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ii) Podmínka $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ je pouze dostatečnou, nikoliv nutnou podmínkou pro existenci implicitně zadané funkce. V případě rovnice $y^3 - x = 0$ je $F_y(0, 0) = 3y^2|_{y=0} = 0$, a přesto je rovnicí v okolí počátku implicitně určena funkce $y = \sqrt[3]{x}$.

iii) Na zadávající rovnici $F(x, y) = 0$ se můžeme dívat také jako na rovnici definující funkci $x = \psi(y)$ proměnné y. Snadno se vidí na základě věty 8.2, že dostatečnou podmínkou pro existenci takto implicitně zadané funkce $x = \psi(y)$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. Na vedlejším obrázku je vidět, že rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ je v okolí bodu $[1, 0]$ implicitně určena funkce $x = \psi(y) = \sqrt{1 - y^2}$.



Derivaci implicitně zadané funkce vypočteme podle následující věty.

Věta 8.4. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 8.2 a funkce F má na R spojité parciální derivace 1. řádu. Pak má funkce f, která je implicitně určena v okolí bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci v bodě x_0 a platí*

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{8.1}$$

Důkaz. Nechť f je funkce, která je implicitně určená v okolí bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí $F(x, y) = 0$, tj. existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $F(x, f(x)) = 0$. Důkaz existence derivace implicitně zadané funkce f zde nebudeme provádět (lze jej s podrobnostmi nalézt např. v [N]), zde se zaměříme pouze na odvození vzorce pro f'. Derivováním rovnosti $F(x, f(x))$ podle x dostáváme

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0,$$

odkud

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Dosadíme-li za $x = x_0$, pak ze skutečnosti, že $f(x_0) = y_0$, plyne dokazované tvrzení. □

Příklad 8.5.

i) Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$ (viz úvodní komentář).

Řešení. Označme $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Platí $F_y(x, y) = 3y^2 - 2x$, $F_y(1, 1) = 1 \neq 0$, jsou tedy splněny všechny předpoklady věty, tj. rovností $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ je v jistém okolí bodu $[1, 1]$ určena implicitně funkce jedné proměnné $y = f(x)$, pro jejíž derivaci v bodě $x = 1$ dostáváme

$$f'(1) = -\frac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 1)} = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}\bigg|_{[x,y]=[1,1]} = -1.$$

Rovnice tečny t je $y - 1 = -(x - 1) \implies x + y - 2 = 0$. Normála je přímka kolmá k tečně, a vzhledem k tomu, že pro směrnice k_1, k_2 dvou navzájem kolmých přímek platí $k_1 k_2 = -1$, rovnice normály n je $y - 1 = x - 1 \implies y = x$. ▲

ii) Určete, ve kterých bodech křivky $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ je tečna rovnoběžná s osou x, resp. y.

Řešení. Stejně jako v předchozím příkladu zjistíme, že ve všech bodech, kde $\frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2 - xy - 1] = 2y - x \neq 0$, je rovnicí $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ implicitně určena jistá funkce proměnné x. Pro její derivaci platí

$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x}.$$

Tečna je rovnoběžná s osou x v bodech, kde $y' = 0$, musí proto platit $2x - y = 0$. Protože hledaný bod leží na křivce $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$, dostáváme systém rovnic

$$y = 2x, \quad x^2 + y^2 - xy - 1 = 0.$$

Dosazením z první rovnice do druhé snadno najdeme řešení $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, tedy tečna ke křivce je vodorovná v bodech $\left[\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Při určení bodů, kde je tečna rovnoběžná s osou y, postupujeme podobně. Tečna může být svislá pouze v bodech, kde je jmenovatel zlomku vyjadřující y' nulový. (Ke stejnému výsledku dojdeme, jestliže se na rovnici $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ díváme jako na rovnici určující implicitně x jako funkci proměnné y.) Obdržíme systém rovnic

$$2y - x = 0, \quad x^2 + y^2 - xy - 1 = 0,$$

jehož řešením je dvojice bodů $\left[\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, v nichž je tečna ke křivce svislá. ▲

Poznámka 8.6.

i) Při výpočtu derivace funkce zadané rovnicí $F(x, y) = 0$ využíváme často místo vzorce (8.1) postupu uvedeného při jeho odvození. Rovnici $F(x, y) = 0$ derivujeme podle x a na y se díváme jako na funkci proměnné x. Pak dostáváme

$$F_x(x, y) + y' F_y(x, y) = 0 \tag{8.2}$$

a z této rovnice vypočteme y'.

ii) Postup z předchozí poznámky je vhodný i při výpočtu vyšších derivací funkce implicitně zadané rovnicí $F(x, y) = 0$. Derivujeme-li rovnici (8.2) ještě jednou podle x, dostáváme

$$F_{xx}(x, y) + (F_{xy}(x, y) + F_{yx}(x, y)) + F_{yy}(x, y)y') + F_y(x, y)y'' = 0$$

a z této rovnice vypočteme y''. Dalším derivováním poslední rovnice odvodíme vztah pro y''' atd.

iii) Je-li c reálná konstanta, je rovnicí $F(x, y) - c = 0$ určena vrstevnice funkce F na úrovni c — viz definice 1.4. Směrnice tečny k vrstevnici v bodě $[x_0, y_0]$ (pokud je funkce F diferencovatelná a tečna existuje) má rovnici

$$t: \quad y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

a odtud $F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. To znamená, že vektor $u = (F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0))$ je *normálový vektor* ke křivce $F(x, y) - c = 0$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Příklad 8.7.

i) Rozhodněte, zda křivka $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1]$ pod tečnou, nebo nad tečnou.

Řešení. Rovnici tečny jsme vypočítali v příkladu 8.5 i) podle vzorce o derivaci funkce dané implicitně.
Nyní postupujme jako při odvození tohoto vzorce. Derivujeme-li rovnici $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ podle x a uvážíme-li, že y je funkce proměnné x, dostáváme $3x^2 + 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0$. Dalším derivováním podle x obdržíme $6x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0$ a odtud

$$y'' = \frac{4y' - 6x - 6y(y')^2}{3y^2 - 2x}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za x, y a y' (hodnota y' je určena při výpočtu tečny), dostaneme $y''(1) = -16$, což znamená, že křivka leží v okolí bodu $[1, 1]$ pod tečnou (neboť implicitně určená funkce je v bodě $x = 1$ konkávní). ▲

ii) Najděte lokální extrémy funkce zadané implicitně rovností

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{8.3}$$

Řešení. Derivováním rovnosti implicitně zadávající y jako funkci proměnné x dostáváme

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}.$$

Odtud

$$x + yy' = y'x - y \implies y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Z podmínky $y' = 0$ máme $x = -y$ a dosazením do (8.3) dostáváme $\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg}(-1)$ a odtud $x = \pm e^{-\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}$, $y = \mp e^{-\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}$. Nyní vypočteme y'' v nalezených stacionárních bodech. Derivujeme-li rovnici $x + yy' = y'x - y$ „implicitně“ podle x (jiná možnost, vedoucí samozřejmě ke stejnému výsledku, je derivovat podle x zlomek $\frac{x+y}{y-x}$), dostáváme $1 + (y')^2 + yy'' = y''x + y' - y'$. Odtud

$$y'' = \frac{1+(y')^2}{x-y}.$$

Dosadíme-li do této rovnosti, vidíme, že $y''\left(-e^{-\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}\right) < 0$, $y''\left(e^{-\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}\right) > 0$, tedy v bodě $x = -e^{-\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}$ má implicitně zadaná funkce lokální maximum a v bodě $x = e^{-\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}$ lokální minimum. Geometricky se o správnosti výpočtu můžeme přesvědčit náčrtkem křivky, přejdeme-li v (8.3) k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, pak pro $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dostáváme část logaritmické spirály $r = e^{2\varphi}$ a pro $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ křivku, která je středově symetrická podle počátku s touto spirálou. ▲

8.2. Implicitně zadaná funkce více proměnných

V úvahách prováděných na začátku předchozího odstavce se můžeme snadno „posunout“ o dimenzi výše. Uvažujme v prostoru $\mathbb{R}^3$ množinu $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$, kde F je nějaká funkce tří proměnných. Za celkem přirozených předpokladů na funkci F (např. diferencovatelnost) je M nějaká plocha v $\mathbb{R}^3$ a můžeme si klást otázku, jaká je rovnice tečné roviny k ploše M v bodě $[x_0, y_0, z_0] \in M$, popř. zda v okolí tohoto bodu je plocha pod, nebo nad tečnou rovinou. Lze-li z rovnice $F(x, y, z) = 0$ vypočítat proměnnou z, můžeme použít postup ze čtvrté kapitoly. Pokud toto není možné, zcela analogicky jako pro funkci dvou proměnných můžeme odvodit podmínku, kdy je množina M v okolí bodu $[x_0, y_0, y_0]$ totožná s grafem nějaké funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$, tj. v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a $f(x_0, y_0) = z_0$. Pokud taková funkce existuje, řekneme, že je v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ *implicitně zadána* rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

Zcela analogická je situace, kdy je rovnicí $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ v okolí bodu $[x^*, y] = [x_1^*, \dots, x_n^*, y]$ implicitně určena funkce n proměnných $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Přistoupíme proto k formulaci existenčního tvrzení přímo pro tento obecný případ. Důkaz tvrzení neuvádíme, protože je v podstatě totožný s případem, kdy x je skalární proměnná.

Věta 8.8. *Nechť funkce* $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $M = \{[x, y] = [x_1, \dots, x_n, y] \in \mathbb{R}^{n+1}, F(x, y) = 0\}$, *bod* $[x^*, y^*] \in M$ *a funkce* F *je spojitá na množině* $R = \{[x, y] = [x_1, \dots, x_n, y] : |x_i - x_i^*| < a, i = 1, \dots, n, |y - y^*| < a\}$. *Dále předpokládejme, že* F *má spojitou parciální derivaci* F_y *v bodě* $[x^*, y^*]$ *a* $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$. *Pak existuje okolí bodu* $[x^*, y^*]$, *v němž je rovnicí* $F(x, y) = F(x_1 \dots, x_n, y) = 0$ *implicitně určena právě jedna spojitá funkce* $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Má-li navíc funkce F *v bodě* $[x^*, y^*]$ *spojité parciální derivace* $\frac{\partial}{\partial x_i} F$, *má implicitně určená funkce* f *v bodě* $x^* = [x_1^* \dots, x_n^*]$ *parciální derivace a platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*, y^*)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)}.$$

Příklad 8.9.

i) Určete rovnici tečné roviny v bodě $[1, 0, 1]$ k ploše určené rovnicí $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$.

Řešení. Určíme parciální derivace implicitně zadané funkce $z = z(x, y)$. Derivováním zadávající rovnice podle x a podle y (uvážíme přitom, že z je funkcí proměnných x a y) dostáváme

$$3x^2 + 3z^2 z_x - 3yz - 3xyz_x - 1 - z_x = 0,$$
$$3y^2 + 3z^2 z_y - 3xz - 3xyz_y - 1 - z_y = 0,$$

odtud

$$z_x = \frac{3x^2 - 3yz - 1}{3xy + 1 - 3z^2}, \quad z_y = \frac{3y^2 - 3xz - 1}{3xy + 1 - 3z^2}.$$

Dosazením $x = 1, y = 0, z = 1$ dostáváme $z_x(1, 0) = -1$, $z_y(1, 0) = 2$, a tedy tečná rovina k dané ploše v bodě $[1, 0, 1]$ má podle (4.6) rovnici $z - 1 = -(x - 1) + 2y$, po úpravě $x - 2y + z - 2 = 0$. ▲

ii) Rozhodněte, zda plocha v $\mathbb{E}^3$ daná rovnicí $x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1, 1]$ pod tečnou rovinou, nebo nad tečnou rovinou sestrojenou v tomto bodě.

Řešení. Postupem popsaným ve větě 8.8 určíme parciální derivace v bodě $[1, 1]$ funkce $z = z(x, y)$. Dostáváme

$$z_x = -\frac{1}{1 + 3z^2}, \qquad z_y = -\frac{2y}{1 + 3z^2},$$

$$z_{xx} = -\frac{6z_x^2 z}{1 + 3z^2}, \qquad z_{yy} = -\frac{2 + 6z_y^2 z}{1 + 3z^2}, \qquad z_{xy} = -\frac{6z_x z_y z}{1 + 3z^2},$$

tedy v bodě $[1, 1, 1]$ platí $z_x = -\frac{1}{4}$, $z_y = -\frac{1}{2}$, $z_{xx} = -\frac{3}{32}$, $z_{xy} = -\frac{3}{16}$, $z_{yy} = -\frac{7}{8}$. Tečná rovina v bodě $[1, 1, 1]$ má rovnici $z - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$. Nyní použijeme tvrzení uvedené v poznámce 6.10. Platí

$$D(1, 1) = z_{xx}(1, 1)z_{yy}(1, 1) - z_{xy}^2(1, 1) = \left(-\tfrac{3}{32}\right)\left(-\tfrac{7}{8}\right) - \left(\tfrac{3}{16}\right)^2 = \tfrac{12}{16^2} > 0$$

a $z_{xx}(1, 1) = -\frac{3}{32}$. Proto plocha určená rovnicí $x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1, 1]$ pod tečnou rovinou v tomto bodě. ▲

iii) Určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$, která je určena implicitně rovnicí $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$.

Řešení. Derivováním zadávající rovnosti podle x a y dostáváme

$$\begin{aligned} 2x + 2zz_x - z - xz_x - \sqrt{2}yz_x &= 0, \\ 2y + 2zz_y - xz_y - \sqrt{2}z - \sqrt{2}yz_y &= 0, \end{aligned} \tag{8.4}$$

odtud

$$z_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \qquad z_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Stacionární body určíme z podmínky $z_x = 0 = z_y$, tj. $z = 2x = \sqrt{2}y$, tedy $y = \sqrt{2}x$. Dosazením do zadávající rovnice obdržíme dvojici stacionárních bodů $P_1 = [1, \sqrt{2}, 2]$, $P_2 = [-1, -\sqrt{2}, -2]$. V těchto bodech je $F_z \neq 0$, tedy v jejich okolí je implicitně určena jistá funkce $z = f(x, y)$. Derivováním (8.4) vypočteme parciální derivace 2. řádu ve stacionárních bodech

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \qquad z_{xy} = 0, \qquad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

V obou bodech $P_{1,2}$ je $D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 1 > 0$, tj. v těchto bodech nastávají lokální extrémy, a to maximum v bodě P_1 (neboť $z_{xx} = -2$) a minimum v bodě P_2 ($z_{xx} = 2$). ▲

Podobným způsobem jako v poznámce 8.6 iii) lze dokázat následující tvrzení.

Věta 8.10. *Předpokládejme, že funkce $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v bodě $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in \mathbb{R}^n$ a alespoň jedna z těchto parciálních derivací je nenulová. Pak lze k $(n-1)$-rozměrné ploše určené rovnicí $F(x) = F(x_1, \dots, x_n) = 0$ v bodě x^* sestrojit tečnou nadrovinu a tato nadrovina má rovnici*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*)(x_i - x_i^*) = 0. \tag{8.5}$$

Ve vektorovém zápisu je uvedený vztah

$$\langle F'(x^*), x - x^* \rangle = 0,$$

($\langle .,. \rangle$ značí skalární součin v $\mathbb{R}^n$), tedy vektor $F'(x^*) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^*)\right)$ je normálovým vektorem v bodě x^* k ploše $F(x) = 0$.

Příklad 8.11. Určete rovnici tečné nadroviny v bodě $[1, 1, \dots, 1]$ k $(n-1)$-rozměrné ploše dané rovnicí $x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n - n = 0$.

Řešení. Platí $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^k\right) = kx_k^{k-1}$. Odtud dosazením do (8.5) dostáváme rovnici tečné nadroviny

$$\rho\colon \sum_{k=1}^{n} k(x_k - 1) = 0, \quad \text{tj.} \quad x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Poznámka 8.12. Derivace vyšších řádů funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ zadané implicitně rovnicí $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ vypočteme úplně stejně jako pro dvě proměnné. Například parciální derivaci $\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} f(x)$ vypočteme tak, že rovnici $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ derivujeme nejprve podle x_i a pak podle x_j (přitom vždy bereme v úvahu, že y je funkcí vektorové proměnné $x = [x_1, \dots, x_n]$).

8.3. Implicitně zadané zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí

V tomto odstavci se zabýváme nejobecnějším případem. Nechť je dáno m funkcí F_i, $n+m$ proměnných $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_m]$, $i = 1, \dots, m$ a uvažujme systém rovnic

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Na m-tici funkcí $F_1, \dots, F_m$ se můžeme dívat jako na zobrazení z $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, které označíme $\mathscr{F}$. Pak $F_1, \dots, F_m$ jsou složky tohoto zobrazení, tj. $\mathscr{F} = [F_1, \dots, F_m]$. Podobně jako v předchozích dvou odstavcích označme $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathscr{F}(x, y) = 0\}$ a nechť $[x^*, y^*] \in M$. Jestliže existuje okolí bodu $[x^*, y^*] \in \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathscr{O}([x^*, y^*]) = \mathscr{O}(x^*) \times \mathscr{O}(y^*)$ a zobrazení $\mathscr{G}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $[x, y] \in \mathscr{O}([x^*, y^*])$ je množina bodů $[x, y] \in M$ totožná s množinou bodů $[x, \mathscr{G}(x)]$, $x \in \mathscr{O}(x^*)$, řekneme, že *zobrazení $\mathscr{G}$ je v okolí bodu $[x^*, y^*]$ implicitně určeno* rovnicí $\mathscr{F}(x, y) = 0$.

Hledáme podmínky pro existenci implicitně zadaného zobrazení. Jinými slovy, chceme v okolí bodu $[x^*, y^*]$ ze systému rovnic (8.6) jednoznačně určit proměnné $y_1, \dots, y_m$ v závislosti na $x_1, \dots, x_n$, neboli hledáme podmínky, za kterých systém rovnic (8.6) určuje v okolí bodu $[x^*, y^*] \in M$ nějaké spojité zobrazení $\mathscr{G}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Současně odvodíme vzorce pro Jacobiho matici tohoto implicitně určeného zobrazení.

Čtenáři doporučujeme při čtení výsledků tohoto odstavce dosadit $m = n = 1$ (tj. všechny matice a vektory se redukují na skalární hodnoty) a porovnat je s tvrzeními z odstavce 8.1. Takto zjistíme, že když „zapomeneme", že x, y jsou vektorové proměnné, je tvrzení věty 8.13 stejné jako ve větách 8.2, 8.4.

Věta 8.13. *Nechť $\mathscr{F} = [F_1, \dots, F_m]$ je spojité zobrazení na množině*

$$R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^{n+m} : [x, y] \in \mathscr{O}_a(x^*) \times \mathscr{O}_a(y^*)\},$$

nechť matice

$$\mathscr{F}_y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} F_1(x, y) & \dots & \frac{\partial}{\partial y_m} F_1(x, y) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial y_1} F_m(x, y) & \dots & \frac{\partial}{\partial y_m} F_m(x, y) \end{pmatrix}$$

je regulární v bodě $[x^*, y^*]$ a její prvky jsou spojité v tomto bodě. Pak existuje okolí $\mathscr{O}([x^*, y^*]) = \mathscr{O}(x^*) \times \mathscr{O}(y^*)$ bodu $[x^*, y^*]$ takové, že rovnicí $\mathscr{F}(x, y) = 0$ je v tomto okolí bodu $[x^*, y^*]$ implicitně určeno jediné spojité zobrazení $\mathscr{G}: \mathscr{O}(x^*) \to \mathscr{O}(y^*)$, tj. pro $x \in \mathscr{O}(x^*)$ je $\mathscr{F}(x, \mathscr{G}(x)) = 0$.

Jsou-li navíc v bodě $[x^*, y^*]$ spojité prvky matice

$$\mathscr{F}_x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x, y) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_1(x, y) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_n(x, y) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_n(x, y) \end{pmatrix},$$

pak jsou prvky Jacobiho matice implicitně určeného zobrazení $\mathscr{G}$ spojité v x^* a platí

$$\mathscr{G}'(x^*) = -\left[\mathscr{F}_y(x^*, y^*)\right]^{-1} \mathscr{F}_x(x^*, y^*).$$

Důkaz. Označíme-li $d = \det \mathscr{F}_y(x^*, y^*)$ a budeme-li s maticemi $\mathscr{F}_y$, $\mathscr{F}_x$ manipulovat v podstatě stejně jako v důkazu vět 8.2, 8.4, zjistíme, že důkaz těchto vět „projde" i v maticovém případě. Se všemi technickými podrobnostmi je tato myšlenka realizována ve skriptu [N]. □

Nyní se budeme zabývat definicí tečného a normálového prostoru k podmnožinám v $\mathbb{R}^n$ definovaných jako množina řešení jistého systému rovnic. Podrobně, nechť $\mathscr{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ jsou složky tohoto zobrazení a označme $M = \mathscr{F}^{-1}(0) = \{x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : \mathscr{F}(x) = 0\}$, tj. M je množina řešení systému rovnic

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0,$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Jako model uvažujme dvojici rovnic $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $x + y + z = 0$. Z geometrického významu je zřejmé, že množinou M v $\mathbb{R}^3$ určenou touto dvojicí rovnic je kružnice, která je průsečíkem sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ s rovinou $x + y + z = 0$. Je-li $[x^*, y^*, z^*] \in M$, pak je přirozené nazvat směrový vektor tečny ke kružnici v bodě $[x^*, y^*, z^*]$ *tečným prostorem* k M v bodě $[x^*, y^*, z^*]$ a ortogonální doplněk k tomuto jednorozměrnému podprostoru *normálovým prostorem*. Je zřejmé, že normálový prostor k M v $[x^*, y^*, z^*]$ je lineární podprostor v $\mathbb{R}^3$, který je generován normálovými vektory ke kulové ploše a k rovině. Z tohoto pohledu je přirozená následující definice.

Definice 8.14. Nechť $\mathscr{F} = [f_1, \dots, f_m]: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou stejné jako výše a $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$. Dále předpokládejme, že funkce f_i, $i = 1, \dots, m$, mají na M spojité parciální derivace a Jacobiho matice $\mathscr{F}'(x^*)$ zobrazení $\mathscr{F}$ v bodě x^* má hodnost m. Prostor $\mathscr{N}_M(x^*) = \mathrm{Lin}\{f_1'(x^*), \dots, f_m'(x^*)\}$, $f_i'(x^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x^*), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x^*)\right)$, nazýváme *normálový prostor* k M v bodě x^* a jeho ortogonální doplněk $\mathscr{T}_M(x^*) = [\mathscr{N}(x^*)]^\perp$ se nazývá *tečný prostor* k M v bodě x^*.

Poznámka 8.15.

i) V literatuře věnované diferenciální geometrii a globální analýze (viz např. [S]) bývá tečný prostor k podmnožinám v $\mathbb{R}^n$ definován poněkud odlišně, pro množiny zadané systémem rovnic při splnění předpokladů z předchozí definice je však tento objekt totožný s námi definovaným tečným prostorem. Podrobněji o této problematice pojednává skriptum [N] a monografie [S].

ii) Předpoklad na hodnost matice $\mathscr{F}'(x^*)$ v definici 8.14 nelze vypustit. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ množinu $M = \{[x, y] : f(x, y) = x^2 - y^2 = 0,\ y \geqq 0\}$. Pak evidentně M je tvořena dvojicí polopřímek $y \pm x = 0$ a v počátku (kde $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$) tečnu nelze sestrojit, neboť křivka zde má „hrot".

Příklad 8.16.

i) Určete parametrickou rovnici tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, $z_0 > 0$ k prostorové křivce, která je průsečíkem kulové plochy $x^2+y^2+z^2 = 4$ s válcovou plochou $x^2+y^2-2x = 0$ (tzv. Vivianiho křivka[1]).

Řešení. Normálové vektory k jednotlivým plochám v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ jsou $n_1 = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ pro kouli a $n_2 = (2x_0 - 2, 2y_0, 0)$ pro válec. Normálový prostor ke křivce je generován těmito dvěma vektory (všimněte si, že v bodě [2,0,0] jsou lineárně závislé — načrtněte si obrázek). Jejich vektorový součin $u = 4(-y_0z_0, z_0(x_0-1), y_0)$ je směrovým vektorem tečny, která má tedy rovnici $t\colon [x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + \alpha(-y_0z_0, z_0(x_0-1), y_0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ▲

ii) Určete Jacobiho matici zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, které je v okolí bodu $[x^*, y^*, u^*, v^*] = [1, 0, 1, 0]$ určeno implicitně dvojicí rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 2 &= 0, \\ xu - yv + e^{uv} - 2 &= 0. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Řešení. Označme M množinu bodů v $\mathbb{R}^4$, které vyhovují zadávající dvojici rovnic. Přímým dosazením snadno ověříme, že vskutku $[x^*, y^*, u^*, v^*] \in M$ a derivováním systému rovnic podle x (s tím, že u, v jsou funkce proměnných x, y) dostáváme (po jednoduché úpravě)

$$\begin{aligned} uu_x + {} & \qquad vv_x = -x, \\ (x + ve^{uv})u_x + {} & (-y + ue^{uv})v_x = -u, \end{aligned}$$

odtud pomocí Cramerova pravidla (toto je pro lineární 2×2 systémy většinou nejrychlejší metoda řešení)

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -x & v \\ -u & -y + ue^{uv} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ x + ve^{uv} & -y + ue^{uv} \end{vmatrix}}, \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} u & -x \\ x + ve^{uv} & -u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ x + ve^{uv} & -y + ue^{uv} \end{vmatrix}}.$$

Analogicky parciálním derivováním systému (8.7) podle y obdržíme systém dvou lineárních rovnic pro neznámé u_y, v_y, jehož řešením je (opět podle Cramerova pravidla)

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} -y & v \\ v & -y + ue^{uv} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ x + ve^{uv} & -y + ue^{uv} \end{vmatrix}}, \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} u & -y \\ x + ve^{uv} & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ x + ve^{uv} & -y + ue^{uv} \end{vmatrix}}.$$

[1] Vincenzo Viviani (1622–1703), italský matematik, žák G. Galileiho.

Dosazením bodu $[x^*, y^*, u^*, v^*]$ do těchto vyjádření vidíme, že systém (8.7) definuje implicitně v okolí bodu $[x^*, y^*, u^*, v^*]$ opravdu zobrazení $\mathscr{G}: [x, y] \longmapsto [u, v]$ (neboť jmenovatel všech zlomků je nenulový) a platí $u_x = -1$, $v_x = 0$, $u_y = 0$, $v_y = 0$, tedy $\det \mathscr{G}'(x^*, y^*) = 0$. ▲

Cvičení

8.1. a) Najděte body křivky $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$, v nichž nejsou splněny předpoklady věty 8.2 o existenci implicitní funkce $y = f(x)$.

b) Najděte body parabolické válcové plochy $z^2 - 2px = 0$, kde $p > 0$, v nichž nejsou splněny předpoklady věty 8.8 o existenci implicitní funkce $z = f(x, y)$.

c) Ve kterých bodech jednodílného hyperboloidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ nejsou splněny předpoklady věty 8.8 o existenci implicitní funkce $z = f(x, y)$?

8.2. Vypočtěte y' funkce $y = f(x)$ zadanou implicitně rovnicí:

a) $x - y^2 = \ln y$, b) $x^y = y^x$, kde $x > 0$, $y > 0$.

8.3. Určete rovnici tečny ke kuželosečce:

a) $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$ procházející počátkem,

b) $7x^2 - 2y^2 = 14$ kolmou k přímce $p: 2x + 4y - 3 = 0$.

8.4. Na elipse o rovnici $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ najděte body, v nichž je normála rovnoběžná s osou y.

8.5. Vypočtěte y'' funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí $y - c \sin y = x$, $c \in (0, 1)$.

8.6. a) Určete rovnici tečné roviny a normály k ploše $\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$ v bodě $T = \left[2, \frac{4}{3}, -1\right]$.

b) K elipsoidu $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ veďte tečné roviny rovnoběžné s rovinou $\alpha: x + 4y + 6z = 0$.

c) K elipsoidu o rovnici $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ veďte tečné roviny rovnoběžné s rovinou $\beta: x - y + 2z = 0$.

8.7. Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $z = z(x, y)$ dané implicitně rovnicí:

a) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$, b) $z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

8.8. Najděte stacionární body funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $3x^2 + 2xy - y^2 - 3y + x - \frac{5}{4} = 0$ a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

8.9. Najděte stacionární body funkce $z = f(x, y)$ a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$,

b) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

*

Nic na světě nemůže nahradit vytrvalost. Nenahradí ji ani talent; nic není běžnější než neúspěšný člověk s talentem. Ani genialita; nedoceněný génius je téměř příslovečný. Pouze vytrvalost a odhodlání jsou všemocné.
(C. Coolidge)

*

Kapitola 9

Vázané extrémy

V úvodu kapitoly 6 jsme zdůraznili, že vyšetřování extrémů funkcí je jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu. V předchozích dvou kapitolách jsme si připravili aparát k tomu, abychom mohli vyšetřovat tzv. vázané extrémy. Je to vlastně v jistém smyslu speciální případ lokálních extrémů, avšak metody uvedené v kapitole 6 zde nejsou vhodné. V prvním odstavci vysvětlíme tzv. metodu Lagrangeových multiplikátorů, kde extrémy původní funkce vyšetřujeme pomocí přiřazené, tzv. Lagrangeovy funkce. Ve druhém odstavci studujeme vázané extrémy pomocí nerovností mezi průměry čísel.

9.1. Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Začněme následující úlohou.

Určete absolutní minimum a maximum funkce $u = f(x, y, z)$ na množině M: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x, y, z \geqq 0$ (konkrétní tvar funkce f není v tuto chvíli podstatný).

Vyšetřujeme-li při řešení úlohy funkci f na části hranice tvořené kulovou plochou, vyjádříme $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a funkci $f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ vyšetřujeme na množině $\tilde{M}$: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geqq 0$, tj. najdeme stacionární body uvnitř $\tilde{M}$ a vyšetříme funkci na hranici množiny $\tilde{M}$. Provést toto na části hranice tvořené čtvrtkružnicí znamená vyjádřit $y = \sqrt{1 - x^2}$ a dosadit do f, tj. vyšetřovat funkci $f(x, \sqrt{1 - x^2}, 0)$ pro $x \in [0, 1]$.

Tímto postupem převedeme původní problém vyšetření funkce na hranici na studium extrémů funkce jedné proměnné. Je zřejmé, že tato metoda je nepraktická zejména při větším počtu proměnných. V tomto odstavci si popíšeme tzv. metodu Lagrangeových multiplikátorů, která řešení úlohy podstatně usnadní.

Definice 9.1. Nechť f je funkce n proměnných, $M \subset \mathscr{D}(f)$, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$. Existuje-li okolí $\mathscr{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in M \cap \mathscr{O}(x^*)$ platí $f(x) \geqq f(x^*)$, $(f(x) \leqq f(x^*))$, říkáme, že funkce f má v bodě A *lokální minimum* (*maximum*) vzhledem k množině M. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o *ostrých lokálních extrémech vzhledem k M*.

V této kapitole se zabýváme případem, kdy množina M je zadána systémem rovností

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{9.1}$$

kde $1 \leqq m < n$. V tomto případě se často místo termín lokální extrém vzhledem k M používá termínu *lokální extrém vázaný podmínkami* (9.1) nebo prostě *vázaný lokální extrém*.

Nejprve zformulujme nutnou podmínku pro existenci vázaného extrému.

Věta 9.2. *Nechť funkce n proměnných $f, g_1, \ldots, g_m$, $1 \leqq m < n$, mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny U má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

hodnost m. Buď M množina všech bodů $[x_1, \ldots, x_n]$, které vyhovují rovnicím (9.1). *Má-li funkce f v bodě $a = [a_1, \ldots, a_n] \in M$ lokální extrém vzhledem k M, existují reálná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tak, že jsou splněny rovnosti*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9.3}$$

Poznámka 9.3.

i) Dříve než přistoupíme k důkazu tvrzení, objasněme si význam rovnosti (9.3). Zprvu uvažujme nejjednodušší případ $n = 2$, $m = 1$. Pak M je křivka v $\mathbb{R}^2$ zadaná rovnicí $g(x, y) = 0$ (píšeme x, y, $[x^*, y^*]$ a g místo x_1, x_2, a a g_1). Rovnost (9.3) můžeme psát ve tvaru rovnosti dvou dvojrozměrných vektorů

$$\big(f_x(x^*, y^*), f_y(x^*, y^*)\big) = \lambda\big(g_x(x^*, y^*), g_y(x^*, y^*)\big).$$

Když si uvědomíme, že vektor $\big(g_x(x^*, y^*), g_y(x^*, y^*)\big)$ je normálovým vektorem ke křivce $g(x, y) = 0$ v bodě $[x^*, y^*]$ a vektor $\big(f_x(x^*, y^*), f_y(x^*, y^*)\big)$ je normálovým vektorem k vrstevnici funkce f na úrovni $c = f(x^*, y^*)$, vztah (9.3) říká, že vektory $\big(f_x(x^*, y^*), f_y(x^*, y^*)\big)$ a $\big(g_x(x^*, y^*), g_y(x^*, y^*)\big)$ jsou lineárně závislé. Jinými slovy, křivky $g(x, y) = 0$ a $f(x, y) = f(x^*, y^*)$ mají společnou tečnu v bodě $[x^*, y^*]$. Tato skutečnost je v plném souladu s úvahami, které jsme použili při řešení příkladů 6.19.

ii) V obecném případě nechť f', g'_k jsou vektory parciálních derivací funkcí f, g_k, $k = 1, \ldots, m$, a nechť M je množina určená systémem (9.1). Pak v souladu s terminologií z kapitoly o implicitních funkcích vztah (9.3) říká, že $f'(a) \in \mathcal{N}_M(a)$, kde $\mathcal{N}_M(a)$ je normálový prostor k M v bodě a.

iii) Funkce

$$L(x,\lambda) = L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1\dots,x_n)$$

se nazývá *Lagrangeova funkce* a konstanty λ_k *Lagrangeovy multiplikátory*. Princip metody Lagrangeových multiplikátorů spočívá v tom, že do Lagrangeovy funkce jsou „zabudovány" vazebné podmínky a místo vyšetřování funkce f na M vyšetřujeme Lagrangeovu funkci L bez omezujících podmínek. Metodu multiplikátorů lze použít i v případě, kdy množina M je zadána nikoliv jen systémem rovností, ale i systémem nerovností.

Důkaz věty 9.2. Předpokládejme nejprve, že funkce g_k jsou afinní, tj.

$$g_k(x) = \langle u_k, x\rangle + \beta_k,$$

kde $u_k \in \mathbb{R}^n$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,\dots,m$. Předpokládejme, že neexistuje m-tice multiplikátorů, pro něž platí (9.3), pak $f'(a) \notin \operatorname{Lin}\{g_1'(a),\dots,g_m'(a)\}$. To znamená, že existuje $h \in \mathbb{R}^n$, $h \in \operatorname{Lin}\{g_1'(a),\dots,g_m'(a)\}^\perp$ ($^\perp$ značí ortogonální doplněk) takové, že $\langle f'(a), h\rangle \neq 0$. Položme $y = a + \alpha h$.

Vzhledem k tomu, že funkce g_k jsou afinní a $h \in \operatorname{Lin}\{g_1'(a),\dots,g_m'(a)\}^\perp = \operatorname{Lin}\{u_1,\dots,u_m\}^\perp$, je

$$g_k(y) = \langle u_k, a+\alpha h\rangle + \beta_k = g_k(a) + \alpha\langle u_k, h\rangle = 0,$$

tedy $y \in M$. Z diferencovatelnosti funkce f dostáváme

$$f(y) = f(a) + \alpha\langle f'(a), h\rangle + \tau(\alpha h) = f(a) + \alpha\left[\langle f'(a), h\rangle + \frac{\tau(\alpha h)}{\alpha}\right],$$

kde $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\tau(\alpha h)}{\alpha}$. Odtud

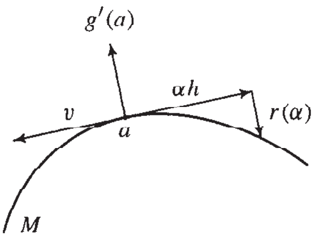
$$\frac{f(y)-f(a)}{\alpha} = \langle f'(a), h\rangle + \frac{\tau(\alpha h)}{\alpha}.$$

Je-li nyní např. $\langle f'(a), h\rangle > 0$, limitním přechodem pro $\alpha \to 0$ vidíme, že pro $|\alpha|$ dostatečně malá je $f(y) > f(a)$ pro $\alpha > 0$ a $f(y) < f(a)$ pro $\alpha < 0$. To je ve sporu s tím, že f má v bodě a lokální extrém vzhledem k M.

Nyní vyšetřeme obecný případ, kdy funkce g_k nejsou afinní. Pak bod y sestrojený v předchozí části důkazu již nemusí být prvkem množiny M, proto místo tohoto bodu musíme uvažovat jiný bod. Geometricky je jeho nalezení naznačeno na následujícím obrázku. Označme $v_1,\dots,v_{n-m}$ bázi prostoru $\operatorname{Lin}\{g_1'(a),\dots,g_m'(a)\}^\perp$ a uvažujme systém rovnic

$$\begin{aligned} g_k(a+\alpha h + r) &= 0, \quad k = 1,\dots,m,\\ \langle v_k, r\rangle &= 0, \quad k = 1,\dots,n-m, \end{aligned} \tag{9.4}$$

kde $r \in \mathbb{R}^n$. Pak jsou vzhledem k nezávislosti vektorů $g_k'(a)$ a výběru vektorů v_k splněny předpoklady věty 8.8 a systém rovnic 9.4 určuje implicitně v okolí bodu $[\alpha, r] = [0, 0] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ funkci $r = r(\alpha) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.



Podle věty 8.8 pro její derivaci podle α dostáváme $r'(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$, což podle l'Hospitalova pravidla znamená, že

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{r(\alpha)}{\alpha} = 0. \tag{9.5}$$

Nyní položme $y = a + \alpha h + r(\alpha)$. Podobně jako v první části důkazu platí

$$f(y) = f(a) + \langle f'(a), \alpha h + r(\alpha)\rangle + \tau(\alpha h) =$$
$$= f(a) + \alpha \left[\langle f'(a), h\rangle + \langle f'(a), \frac{r(\alpha)}{\alpha}\rangle + \frac{\tau(\alpha h)}{\alpha} \right]$$

a stejnou úvahou jako výše v libovolném okolí bodu a najdeme $\bar{y}, \tilde{y} \in M$ taková, že $f(\bar{y}) < f(a)$ i $f(\tilde{y}) > f(a)$ — spor. □

Definice 9.4. Nechť množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je dána systémem rovnic (9.1). Řekneme, že bod $a \in M$ je *stacionární bod funkce f na M*, jestliže existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ takové, že platí (9.3).

Věta 9.2 říká, že v případě diferencovatelných funkcí f a g_k lokální extrém vzhledem k množině M může nastat pouze ve stacionárním bodě. O tom, zda ve stacionárním bodě nastává, nebo nenastává, lokální extrém rozhodneme pomocí vlastností matice druhých derivací Lagrangeovy funkce $L''(x, \lambda)$.

Věta 9.5. *Nechť funkce f a g_k, $k = 1, \dots, m$, mají spojité parciální derivace druhého řádu v bodě a, který je stacionárním bodem f na M, a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory, tj. $L'(a, \lambda) = 0$. Dále nechť matice (9.2) má pro $x = a$ hodnost m. Jestliže pro každé $0 \neq h \in \mathrm{Lin}\{g_1'(a), \dots, g_m'(a)\}^\perp$ platí*

$$\langle L''(a)h, h\rangle > 0 \ (< 0), \tag{9.6}$$

má funkce f v bodě a ostré lokální minimum (maximum) vzhledem k M. Jestliže existují $\tilde{h}, \bar{h} \in \mathrm{Lin}\{g_1'(a), \dots, g_m'(a)\}^\perp$ taková, že

$$\langle L''(a)\tilde{h}, \tilde{h}\rangle > 0, \quad \langle L''(a)\bar{h}, \bar{h}\rangle < 0, \tag{9.7}$$

v bodě a lokální extrém vzhledem k M nenastává.

Důkaz. Především si všimněme, že pro $x \in M$ je $f(x) = L(x)$, tj. $x^* \in M$ je lokálním extrémem f vzhledem k M, právě když je lokálním extrémem Lagrangeovy funkce L. Podobně jako v důkazu věty 9.2 můžeme body $y \in M$ vyjádřit ve tvaru $y = a + \alpha h + r(\alpha)$, kde $h \in \mathrm{Lin}\{g_1'(a), \dots, g_m'(a)\}^{\perp}$ a $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ splňuje (9.5). Pomocí Taylorova vzorce dostáváme

$$f(y) - L(y) = L(a) + \langle L'(a), \alpha h + r(\alpha)\rangle + \frac{1}{2}\langle L''(\tilde a)(\alpha h + r(\alpha), (\alpha h + r(\alpha))\rangle =$$
$$= f(a) + \frac{\alpha^2}{2}\left\langle L''(\tilde a)\left(h + \frac{r(\alpha)}{\alpha}\right), h + \frac{r(\alpha)}{\alpha}\right\rangle, \tag{9.8}$$

kde $\tilde a$ leží na úsečce spojující a a y (využili jsme faktu, že a je stacionární bod, tj. $L'(a) = 0$).

Předpokládejme, že platí (9.6), pak vzhledem ke spojitosti druhých derivací funkce L stejné nerovnosti platí i pro $\tilde a$ místo a, je-li $|\alpha|$ dostatečně malé Limitním přechodem pro $\alpha \to 0$ v (9.8) dostáváme pro $|\alpha|$ dostatečně malé,

$$\mathrm{sgn}[f(y) - f(a)] = \mathrm{sgn}\langle L''(a)h, h\rangle,$$

tedy v bodě a nastává lokální extrém f vzhledem k M, a to minimum, je-li $\langle L''(a)h, h\rangle > 0$, a maximum, platí-li opačná nerovnost.

Nyní předpokládejme, že existují $\tilde h, \bar h \in \mathrm{Lin}\{g_1'(a), \dots, g_m'(a)\}^{\perp}$ taková, že platí (9.7). Položme $y_1 = a + \alpha\tilde h + r(\alpha)$, $y_2 = a + \alpha\bar h + r(\alpha)$. Stejným způsobem jako v předchozí části důkazu lze ukázat, že pro $|\alpha|$ dostatečně malá platí $f(y_1) > f(a)$ a $f(y_2) < f(a)$, tj. v bodě a lokální extrém f vzhledem k M nenastává. □

Nyní si tvrzení posledních dvou vět shrňme do praktického návodu hledání vázaných extrémů funkcí se spojitými druhými derivacemi.

1. Vytvoříme Lagrangeovu funkci $L(x, \lambda) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x)$.
2. Určíme stacionární body f vzhledem k M, tj. určíme $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jako řešení systému $n + m$ rovnic

   $$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda) = 0,\ i = 1, \dots, n, \quad g_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, m.$$

   Nechť $a \in M$ je takto vypočtený stacionární bod f vzhledem k M a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušející multiplikátory.
3. Ze systému m lineárních rovnic

   $$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a)h_n = 0,$$
   $$\vdots$$
   $$\frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a)h_n = 0$$

   pro proměnné $h_1, \dots, h_n$ vypočteme m proměnných v závislosti na $n - m$ zbývajících. Takto vypočtené vektory $h \in \mathbb{R}^n$ jsou prvky tečného prostoru k M v bodě a, $\mathcal{T}_M(a) = \mathrm{Lin}\{g_1'(a), \dots, g_m'(a)\}^{\perp}$. Tento výpočet je možný, neboť podle předpokladu má matice (9.2) hodnost m. Pro určitost předpokládejme, že jsme vypočetli $h_1, \dots, h_m$ v závislosti na $h_{m+1}, \dots, h_n$.

4. Určíme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x ve stacionárním bodě a
$$d^2L(a,\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j = \langle L''(a)h, h\rangle,$$
za $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dosadíme příslušející multiplikátory a za $h_1, \dots, h_m$ vyjádření z předchozího bodu.

5. Vyšetříme definitnost vzniklé kvadratické formy $n - m$ proměnných (je to vlastně restrikce kvadratické formy $d^2L(a,\lambda)$ na tečný prostor $\mathcal{T}_M(a)$). Je-li tato forma pozitivně (negativně) definitní, nastává v bodě a ostré lokální minimum (maximum), a je-li indefinitní, v bodě a vázaný extrém nenastává.

Příklad 9.6.

i) Najděte lokální extrémy funkce $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $a > b > c$, na množině $M : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení. Nejprve sestavíme Lagrangeovu funkci úlohy a určíme stacionární body.
$$L(x,y,z,\lambda) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$
Derivováním a přidáním vazebné podmínky dostáváme
$$\begin{aligned}
L_x &= \frac{2x}{a^2} - 2\lambda x = 0 &\Longrightarrow\quad & x\left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) = 0,\\
L_y &= \frac{2y}{b^2} - 2\lambda y = 0 &\Longrightarrow\quad & y\left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right) = 0,\\
L_z &= \frac{2y}{c^2} - 2\lambda z = 0 &\Longrightarrow\quad & z\left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right) = 0,\\
& x^2 + y^2 + z^2 = 1.
\end{aligned}$$
Z prvních tří rovnic plyne, že vždy dvě ze souřadnic x, y, z musí být nulové (neboť pouze jeden z výrazů v závorkách může vždy být nulový). Dostáváme šestici stacionárních bodů a příslušejících multiplikátorů $P_{1,2} = [\pm 1, 0, 0]$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{a^2}$, $P_{3,4} = [0, \pm 1, 0]$, $\lambda_{3,4} = \frac{1}{b^2}$, $P_{5,6} = [0, 0, \pm 1]$, $\lambda_{56} = \frac{1}{c^2}$. Určíme druhý diferenciál funkce L (použijeme obvyklý zápis s dx, dy, dz místo h_1, h_2, h_3)
$$d^2L(x,y,z,\lambda) = 2\left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)(dx)^2 + 2\left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right)(dy)^2 + 2\left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right)(dz)^2$$
a diferencováním vazebné podmínky dostáváme $2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0$. Odsud plyne, že v bodech $P_{1,2}$ je $dx = 0$, v bodech $P_{3,4}$ je $dy = 0$ a v $P_{5,6}$ je $dz = 0$. Využitím

této skutečnosti vyšetřeme definitnost formy d^2L na tečném prostoru v bodech P_{1-6} ke kouli $x^2+y^2+z^2=1$.

$$P_{1,2}: \quad \mathrm{d}^2L = 2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)(\mathrm{d}y)^2 + 2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)(\mathrm{d}z)^2,$$
$$P_{3,4}: \quad \mathrm{d}^2L = 2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\mathrm{d}x)^2 + 2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\mathrm{d}z)^2,$$
$$P_{5,6}: \quad \mathrm{d}^2L = 2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\mathrm{d}x)^2 + 2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\mathrm{d}z)^2.$$

Protože $a > b > c$, je kvadratická forma v bodech $P_{1,2}$ pozitivně definitní, v bodech $P_{5,6}$ negativně definitní a v bodech $P_{3,4}$ indefinitní. To znamená, že v $P_{1,2}$ je ostré lokální minimum (rovno $\frac{1}{a^2}$), v $P_{5,6}$ je ostré lokální maximum (rovno $\frac{1}{c^2}$) a v bodech $P_{3,4}$ extrém nenastává. ▲

ii) Odvoďte vzorec pro vzdálenost bodu $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ od roviny $a_1x_1+\dots+a_nx_n = b$ v prostoru $\mathbb{E}^n$.

Řešení. Označme $a = [a_1, \dots, a_n]$, $x = [x_1, \dots, x_n]$. Pak můžeme úlohu zapsat ve vektorovém tvaru

$$\sqrt{\langle x-x^*, x-x^*\rangle} \to \min, \quad \langle a, x\rangle = b.$$

Je-li $\bar{x}$ bodem minima této úlohy, je také bodem minima úlohy

$$\frac{1}{2}\langle x-x^*, x-x^*\rangle \to \min, \quad \langle a, x\rangle = b$$

(tato úvaha nám usnadní derivování). Lagrangeova funkce této úlohy je

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}\langle x-x^*, x-x^*\rangle - \lambda(\langle a,x\rangle - b) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^*)^2 - \lambda\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k - b\right).$$

Derivováním dostáváme (používáme pro stručnost vektorový zápis)

$$L_x = x - x^* - \lambda a = 0, \qquad \langle a, x\rangle = b.$$

Z první rovnice $x = x^* + \lambda a$ a dosazením do druhé rovnice $\langle a, x^*+\lambda a\rangle = b$, odtud

$$\lambda = \frac{(b-\langle a, x^*\rangle)}{||a||^2} \implies x - x^* = \frac{b-\langle a, x^*\rangle}{||a||^2}\cdot a,$$

tedy

$$\sqrt{\langle x-x^*, x-x^*\rangle} = \frac{|b-\langle a,x^*\rangle|}{||a||} = \frac{|b-a_1x_1^*-\dots-a_nx_n^*|}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}},$$

což je vzorec dobře známý z lineární algebry. ▲

iii) Určete obsah elipsy, která vznikne při řezu elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ rovinou $Ax + By + Cz = 0$ (obsah elipsy je $P = \pi pq$, kde p, q jsou délky poloos elipsy).

Řešení. K určení obsahu elipsy potřebujeme určit délky jejích poloos. To jsou vzdálenosti bodů ležících zároveň na elipsoidu i v řezné rovině, které mají nejmenší, resp. největší vzdálenost od počátku. Vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od počátku je dána vztahem $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Místo této funkce budeme hledat extrémy funkce $u = x^2 + y^2 + z^2$, která se snáze derivuje, a vypočtený výsledek odmocníme. Řešíme tedy úlohu

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \to \max(\min), \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad Ax + By + Cy = 0.$$

Lagrangeova funkce úlohy je

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - \mu(Ax + By + Cy).$$

Jejím derivováním a připojením vazebných podmínek dostáváme systém rovnic

$$2x - \frac{2\lambda x}{a^2} - \mu A = 0, \quad 2y - \frac{2\lambda y}{b^2} - \mu B = 0, \quad 2z - \frac{2\lambda z}{c^2} - \mu C = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad Ax + By + Cz = 0.$$

Vynásobíme-li první rovnici x, druhou y, třetí z a sečteme je, pak využitím vazebných podmínek dostáváme rovnost $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, tedy $u_{\max} = \lambda_{\max}$ a $u_{\min} = \lambda_{\min}$. Vyjádříme-li z prvních tří rovnic x, y, z a dosadíme do rovnice roviny, obdržíme rovnici

$$\mu\left(\frac{A^2}{2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)} + \frac{B^2}{2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)} + \frac{C^2}{2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)}\right) = 0.$$

Protože $\mu \neq 0$ (jinak $x = y = z = 0$ a tento bod neleží na elipsoidu), z této rovnice vynásobením jmenovateli zlomků dostáváme

$$A^2\left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{c^2}\right) + B^2\left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{c^2}\right) + C^2\left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0.$$

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru kvadratické rovnice $\lambda^2 + K_1\lambda + K_2$, kde

$$K_2 = \frac{a^2b^2c^2(A^2 + B^2 + C^2)}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}.$$

Koeficient K_1 můžeme také vyjádřit explicitně, jeho hodnota však není podstatná, neboť rovnici nemusíme řešit. Nepotřebujeme totiž znát kořeny rovnice $\lambda_{1,2}$, nýbrž pouze jejich součin $\lambda_1\lambda_2$ — ve skutečnosti nepotřebujeme znát délky poloos, stačí nám znát jejich součin. Tento součin je roven absolutnímu členu K_2 v kvadratické rovnici.

Protože jsme hledali extrémy funkce $x^2 + y^2 + z^2$ místo funkce $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, je hledaná plocha elipsy

$$S = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \pi\sqrt{K_2} = \pi abc\sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}\,. \qquad \blacktriangle$$

9.2. Vázané extrémy a nerovnosti

V tomto odstavci si ukážeme, jak lze v některých speciálních (ale poměrně často se vyskytujících) případech hledat vázané extrémy, aniž by bylo nutné použít aparát Lagrangeových multiplikátorů. I když je tento postup poněkud vzdálený od metod diferenciálního počtu, uvádíme jej zde pro jeho výbornou praktickou použitelnost. Čtenáři doporučujeme všechny úlohy tohoto odstavce vyřešit pro srovnání také metodou Lagrangeových multiplikátorů.

Nejprve připomeňme pojem kvadratického, aritmetického, geometrického a harmonického průměru n-tice čísel. Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla, označme

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}},\\
\mathcal{A}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\\
\mathcal{G}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},\\
\mathcal{H}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.
\end{aligned}$$

Věta 9.7. *Nechť $x = [x_1, \dots, x_n]$ je n-tice kladných čísel. Platí nerovnosti*

$$\mathcal{Q}_n(x) \geqq \mathcal{A}_n(x) \geqq \mathcal{G}_n(x) \geqq \mathcal{H}_n(x),$$

přičemž rovnosti nastávají, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz. Viz skriptum [H-K-Š]. □

Kromě nerovností mezi průměry je účinným nástrojem i tzv. *Cauchyova nerovnost.*

Věta 9.8. *Pro libovolné dvě n-tice reálných čísel $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ platí*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

přičemž rovnost nastane, právě když existuje reálné t takové, že $y_k = t x_k$, $k = 1, \dots, n$, tj. právě když vektory x a y jsou lineárně závislé.

Důkaz. Viz skriptum [H-K-Š]. □

Příklad 9.9.

i) Mezi všemi trojúhelníky s konstantním obvodem o určete ten, který má největší obsah.

Řešení. Vyjdeme z Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)s-c)},$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníka a $s = (a+b+c)/2 = o/2$ je tzv. poloperimetr. Označíme-li $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$ a uvážíme-li, že najít maximum funkce P je totéž jako najít maximum funkce $\tilde{P} = s^{-\frac{1}{3}} P^{\frac{2}{3}}$, můžeme úlohu formulovat takto:

$$\tilde{P}(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz} \to \max, \quad x + y + z = \frac{o}{2}.$$

Využitím nerovnosti mezi algebraickým a geometrickým průměrem dostáváme

$$\tilde{P}(x, y, z) \leqq (x + y + z)/3 = o/6,$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x = y = z = o/2$. Máme tedy systém rovnic

$$s - a = \frac{o}{6}, \quad s - b = \frac{o}{6}, \quad s - c = \frac{o}{6},$$

jehož řešením je $a = b = c = o/3$.
Tedy mezi všemi trojúhelníky s daným obvodem o má největší obsah rovnostranný trojúhelník a tento maximální obsah je $P_{\max} = \frac{o^2}{12\sqrt{3}}$. ▲

ii) Mezi všemi trojicemi kladných čísel x, y, z s konstantním součtem a najděte ta, pro která je součet převrácených hodnot minimální.

Řešení. Z nerovnosti mezi harmonickým a aritmetickým průměrem dostáváme

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leqq \frac{x + y + z}{3} = \frac{a}{3},$$

přičemž rovnost nastane právě když $x = y = z = a/3$. Odtud $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{a}$, tedy součet převrácených hodnot je minimální, jsou-li všechna tři čísla stejná a rovna $\frac{a}{3}$. ▲

iii) Na elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ najděte bod v prvním oktantu s vlastností, že objem čtyřstěnu tvořeného souřadnými stěnami a tečnou rovinou k elipsoidu v tomto bodě je minimální.

Řešení. Nejprve připomeňme, že objem čtyřstěnu vypočteme podle vzorce $V = \frac{1}{6}x_0y_0z_0$, kde $[x_0, 0, 0]$, $[0, y_0, 0]$, $[0, 0, z_0]$ jsou průsečíky tečné roviny se souřadnými osami (sestrojíme-li trojboký hranol se základnou tvořenou trojúhelníkem s vrcholy $[0, 0, 0]$, $[x_0, 0, 0]$, $[0, y_0, 0]$ a výškou z_0, jeho objem je $\frac{1}{2}x_0y_0z_0$ a je trojnásobkem objemu daného čtyřstěnu). Vyjádřením proměnné z z rovnice elipsoidu nebo pomocí derivace implicitní funkce snadno ověříme, že rovnice tečné roviny k elipsoidu v bodě $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ je

$$\frac{z\bar{z}}{c^2} + \frac{y\bar{y}}{b^2} + \frac{x\bar{x}}{a^2} = 1. \tag{9.9}$$

Odtud dostáváme, že úseky vyťaté tečnou rovinou na souřadných osách jsou $x_0 = \frac{a^2}{\bar{x}}$ (položíme $y = 0 = z$ v (9.9)), $z_0 = \frac{b^2}{\bar{y}}$, $z_0 = \frac{c^2}{\bar{z}}$. Řešíme tedy úlohu

$$V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz} \to \min, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

která je, pokud jde o extremální bod, ekvivalentní úloze

$$\tilde{V} = (6V)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\sqrt[3]{\frac{x}{a}\frac{y}{b}\frac{z}{c}} \to \max, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Z nerovnosti mezi kvadratickým a geometrickým průměrem dostáváme, že $\tilde{V}$ je maximální, jestliže $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, což vzhledem k vazebné podmínce nastane, když $x = \sqrt{3}a$, $y = \sqrt{3}b$, $z = \sqrt{3}c$, a pro tyto hodnoty dostáváme minimální objem $V_{\min} = \frac{abc}{18\sqrt{3}}$. ▲

iv) Na elipsoidu $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ najděte bod, který je nejblíže rovině $x + y + z = 2\sqrt{14}$.

Řešení. Pro vzdálenost bodu $[x_0, y_0, z_0]$ od roviny $ax + by + cz = d$ platí vzorec (viz příklad 9.6 ii))

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Protože elipsoid leží pod rovinou $x + y + z = 2\sqrt{14}$, budeme řešit úlohu

$$-\frac{x + y + z - 2\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \to \min, \quad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \tag{9.10}$$

která je (pokud jde o bod, v němž je dosaženo minima) ekvivalentní úloze

$$x + y + z \to \max, \quad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Tuto úlohu vyřešíme pomocí Cauchyovy nerovnosti. Platí

$$x + y + z = x + 2\frac{y}{2} + 3\frac{z}{3} \leqq \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}} \cdot \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14},$$

přičemž rovnost nastává, právě když jsou vektory $\left(x, \frac{y}{2}, \frac{z}{3}\right)$, $(1, 2, 3)$ lineárně závislé, tj. existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $x = t$, $\frac{y}{2} = 2t$, $\frac{z}{3} = 3t$. Vezmeme-li v úvahu vazebnou podmínku $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, dostáváme $t = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$, tj. (hledaný bod leží v *I*. kvadrantu)

$$x = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad y = \frac{4}{\sqrt{14}}, \quad z = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

a dosazením do (9.10) dostáváme $d_{\min} = \sqrt{\frac{14}{3}}$. ▲

Cvičení

9.1. Určete vázané extrémy funkce f na množině určené rovnostmi:
a) $f(x,y,z) = xy^2z^3, x + 2y + 3z = a, a, x, y, z > 0$,
b) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z, x + y + z = \frac{\pi}{2}$,
c) $f(x,y,z) = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$,
d) $f(x,y,z) = xy + yz, x^2 + y^2 = 2, y + z = 2, x, y, z > 0$,
e) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2, \frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1, a_i > 0,\ i = 1,\dots,n$,
f) $f(x_1,\dots,x_n) = \frac{\alpha_1}{x_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}, \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = 1, \alpha_i, \beta_i, x_i > 0, i = 1,\dots,n$,
g) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, x_1 + \dots + x_n = 1, \alpha_i > 0, i = 1,\dots,n$.

9.2. a) Do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ vepište hranol s maximálním objemem. Tento objem určete.
b) Do úseče eliptického paraboloidu $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, z \leqq c$ vepište hranol s maximálním objemem. Tento objem určete.
c) Do kužele s poloměrem podstavy r a výškou h vepište hranol s maximálním objemem. Tento objem určete.
d) Mezi všemi čtyřbokými hranoly s konstantním povrchem P najděte ten, který má největší objem. Tento objem určete.
e) Na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ najděte bod s vlastností, že normála sestrojená v tomto bodě má největší vzdálenost od počátku.
f) Na elipsoidu v prostoru jsou dány dva body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$. Určete bod C na elipsoidu tak, aby vzniklý trojúhelník měl maximální obsah.

9.3. Řešte extremální úlohy:
a) $\frac{1}{2}||x||^2 \to \min$, $\langle u, x\rangle = \alpha$, $\langle v, x\rangle = \beta$, $x, u, v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
b) $\langle Ax, x\rangle \to \min$, $\langle u_k, x\rangle = \alpha_k$, $k = 1,\dots,n-1$, $x, u_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\dim\{\mathrm{Lin}\{u_1,\dots,u_{n-1}\}\} = n - 1$.

Všechny dobré zásady jsou již napsány. Nyní ještě zbývá je uskutečnit.
(B. Pascal)

Příloha

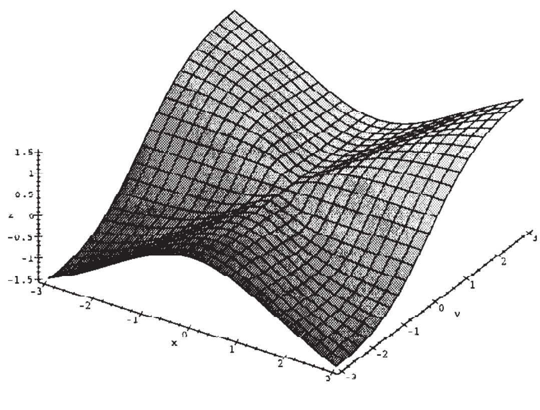
Tato příloha slouží k ilustraci a lepšímu pochopení základních pojmů diferenciálního počtu funkce dvou proměnných. Grafy funkcí byly vytvořeny pomocí systému Maple V R 3.

P 1. Limita a spojitost funkce

Příklad P.1. Funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

není v bodě $[0, 0]$ definovaná, ale má v tomto bodě limitu rovnu nule (podle věty 2.13).



Následující příklady ilustrují jev, kdy hodnota limity funkce závisí na cestě, po které se k limitnímu bodu blížíme — tj. funkce nemá v daném bodě limitu.

Příklad P.2. Funkce

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

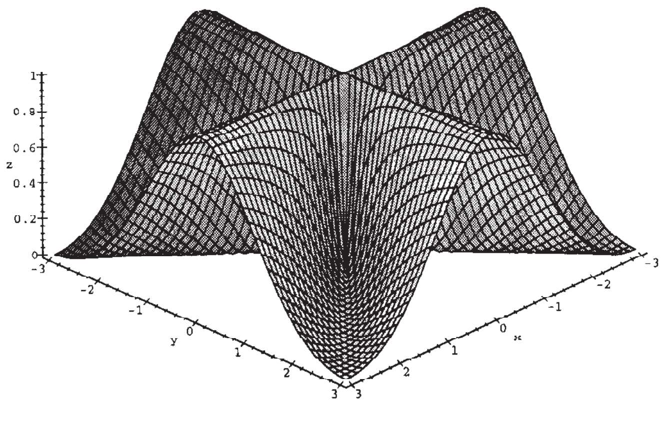
nemá v bodě [0, 0] limitu. Jestliže se k bodu [0, 0] blížíme po přímkách $y = \pm x$, dostáváme

$$\lim_{x \to 0} f(x, \pm x) = 0,$$

ale po osách x a y dostáváme

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 1, \qquad \lim_{y \to 0} f(0, y) = 1.$$

Protože hodnota limity závisí na cestě, po které se k bodu [0, 0] blížíme, limita $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ neexistuje.

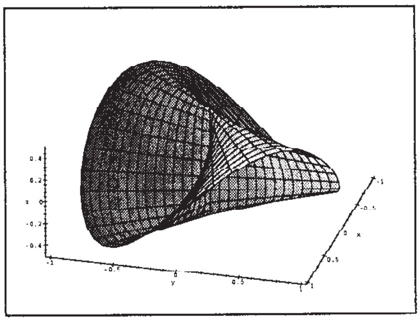


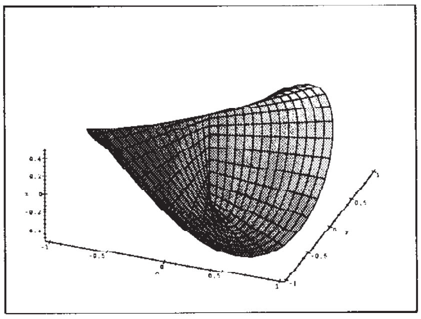
Příklad P.3. Funkce

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

nemá v bodě [0, 0] limitu: pokud se k limitnímu bodu blížíme po přímkách $y = kx$, dostáváme výsledek závisející na konstantě k

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

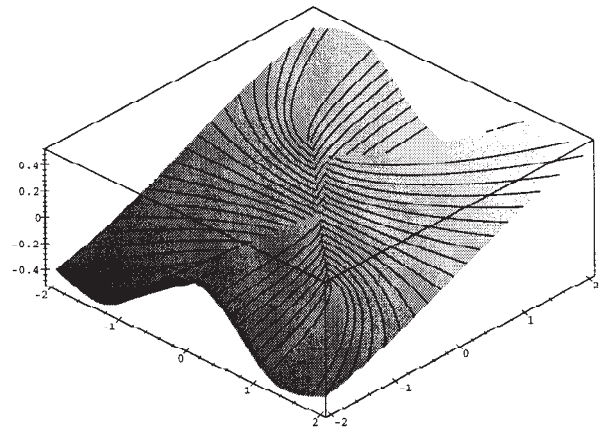




Příklad P.4. Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

nemá v bodě [0, 0] limitu. V tomto případě jsou všechny limity po přímkách $y = kx$ k bodu [0, 0] rovny 0, avšak po parabolách $y = kx^2$ hodnota limity záleží na konstantě k (viz poznámka 2.12).



Příklad P.5. Funkce

$$f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2 - 9}$$

není definovaná na množině $K = \{[x, y] : x^2 + y^2 = 9\}$, což je kružnice se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem $r = 3$, a nemá v žádném bodě této množiny limitu.

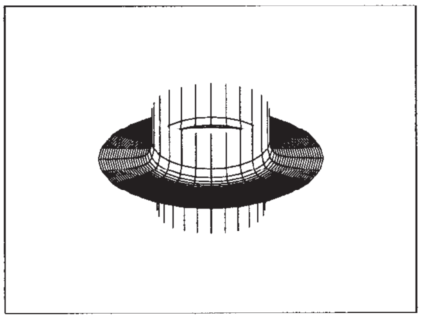
Nechť $[x_0, y_0] \in K$. Jestliže se k bodu $[x_0, y_0]$ blížíme po libovolné cestě L_1 ležící vně kružnice K, pak dostáváme

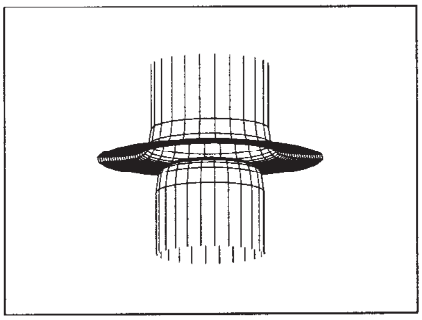
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in L_1}} \frac{2}{x^2 + y^2 - 9} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Jestliže se k bodu $[0, 0]$ blížíme po libovolné cestě L_2 ležící uvnitř této kružnice, dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in L_2}} \frac{2}{x^2 + y^2 - 9} = \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

Odtud plyne, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ neexistuje. Existují pouze limity po cestách ležících uvnitř a vně kružnice K.



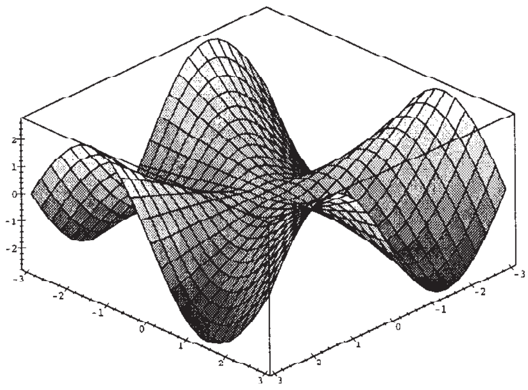


P 2. Parciální derivace a diferenciál

Příklad P.6. Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

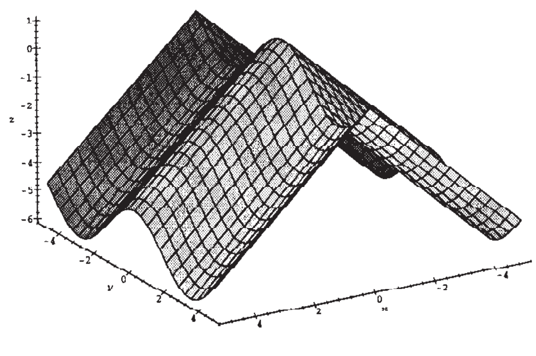
má v bodě $[0, 0]$ parciální derivace 1. řádu $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$ a smíšené parciální derivace $f_{xy}(0, 0) = 1$ a $f_{yx}(0, 0) = -1$. To znamená, že smíšené parciální derivace této funkce v bodě [0, 0] nejsou záměnné (nejsou splněny předpoklady Schwarzovy věty, viz věta 3.8).



Příklad P.7. Funkce

$$f(x, y) = \cos y - |x|$$

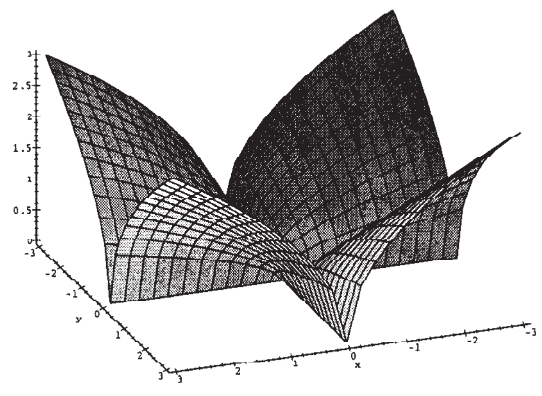
není diferencovatelná v bodech $[0, y]$, protože v těchto bodech neexistuje parciální derivace podle x.



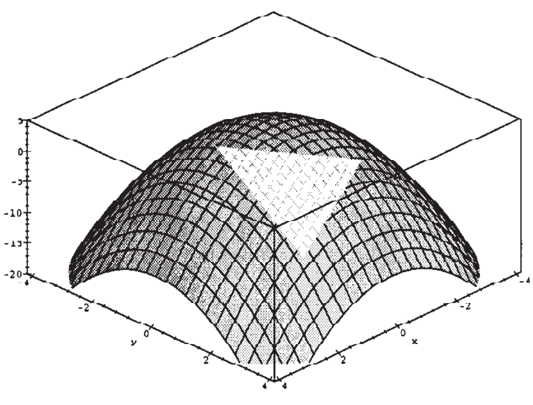
Příklad P.8. Funkce

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

je diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$ s výjimkou bodů osového kříže, tj. bodů $[x, y]$, kde $x = 0$ nebo $y = 0$.

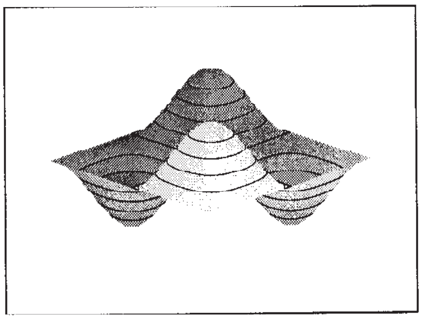


Příklad P.9. Funkce $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ je diferencovatelná v celém $\mathbb{R}^2$, tj. v každém bodě existuje její tečná rovina. Na obrázku je znázorněna tečná rovina $z = 17 - 6x - 4y$ k této funkci v bodě $[3, 2]$.

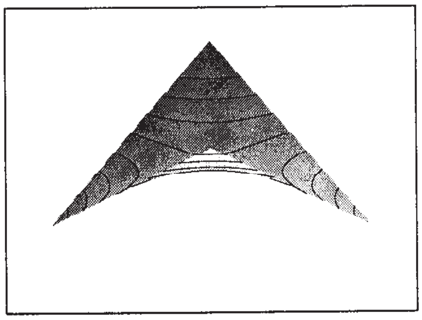


P 3. Taylorova věta

Příklad P.10. Funkce $f(x, y) = \sin x \sin y$ je diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$, její graf je znázorněn na obr. a). Její Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě $[0, 0]$ je $T_2(x, y) = xy$ a je znázorněn na obr. b).



obr. a)



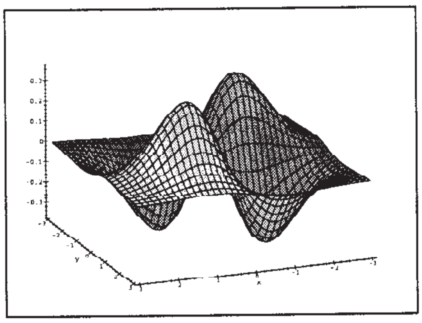
obr. b)

P 4. Lokální a absolutní extrémy

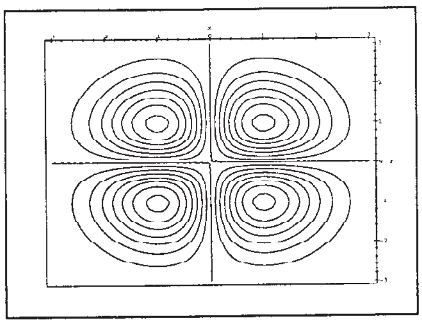
Příklad P.11. Funkce

$$f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

má lokální minima v bodech $[-1, 1]$, $[1, -1]$ a lokální maxima v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$. Její graf je na obr. c), vrstevnice této funkce na obr. d).

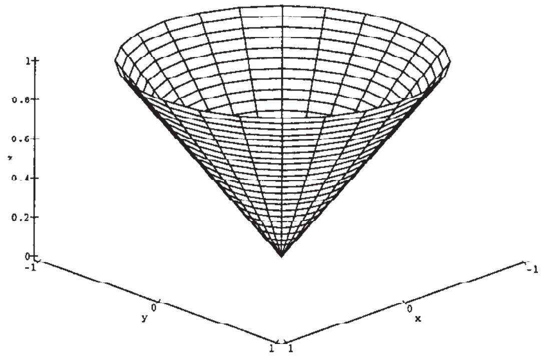


obr. c)

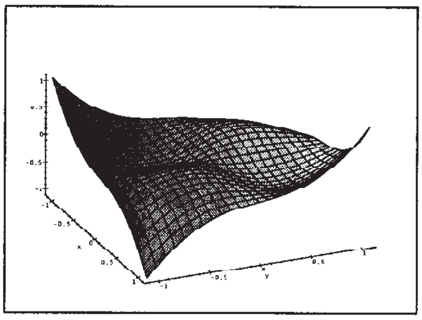


obr. d)

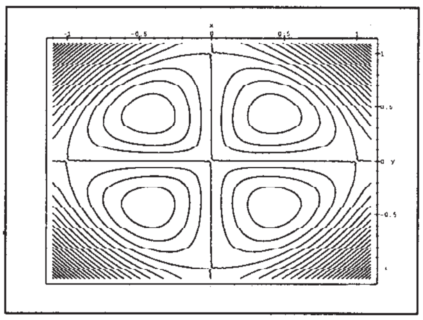
Příklad P.12. Funkce
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
má v bodě $[0, 0]$ ostré lokální minimum, přestože v tomto bodě neexistují parciální derivace.



Příklad P.13. Funkce
$$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$$
má lokální minimum v bodech $\left[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$ a $\left[\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right]$ a lokální maximum v bodech $\left[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right]$ a $\left[\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$ (viz příklad 6.9 ii)). Graf této funkce je znázorněn na obr. e), vrstevnice na obr. f).



obr. e)

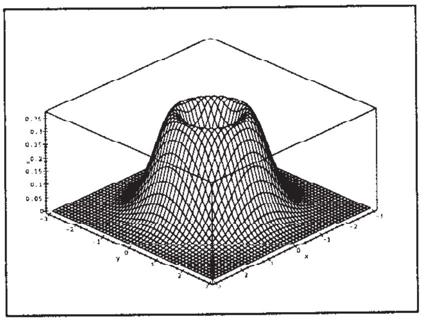


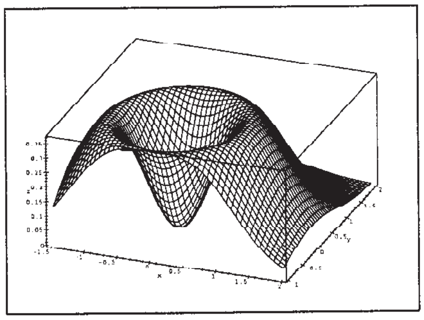
obr. f)

Příklad P.14. Funkce

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

má ve všech bodech kružnice $x^2 + y^2 = 1$ stacionární body, které jsou neostrými lokálními maximy, a má ostré lokální minimum v bodě $[0, 0]$.

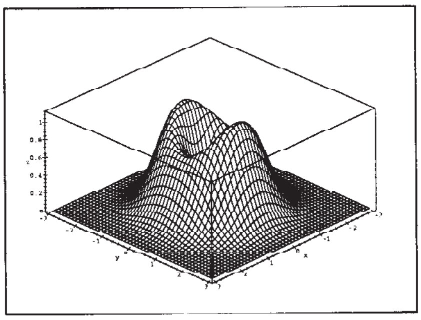


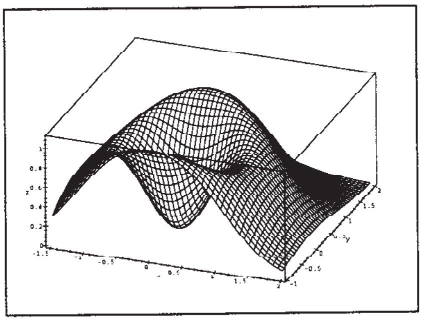


Funkce

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

má ostré lokální minimum v bodě $[0, 0]$, ostré lokální maximum v bodě $[0, \pm 1]$ a sedlové body v bodech $[\pm 1, 0]$. Absolutní extrém této funkce na kruhu $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 4\}$ byl řešen v příkladu 6.19 ii).





Následující příklad ilustruje situaci, kdy je matice druhých derivací dané funkce ve stacionárním bodě pouze semidefinitní. V tomto případě je $f''(0, 0) = 0$. Proto zde může i nemusí nastat lokální extrém, viz poznámka 6.14.

Příklad P.15. Funkce

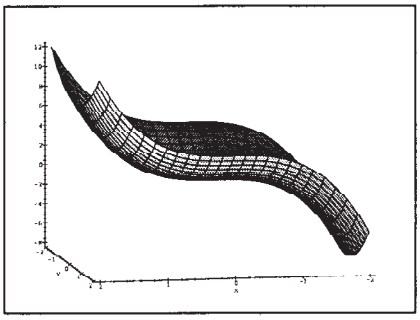
$$f(x, y) = x^3 + y^2$$

má diferenciál v bodě $[0, 0]$ roven nule ($\mathrm{d}f(0, 0) = 0$) a přitom je tento $[0, 0]$ sedlovým bodem, tj. extrém v něm nenastává, viz obr. g).

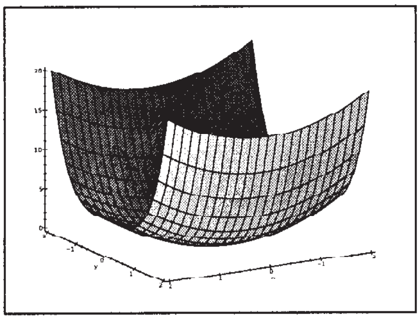
Funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^4$$

má rovněž diferenciál v bodě $[0, 0]$ roven nule a přitom v tomto bodě nastává lokální minimum, viz obr. h).

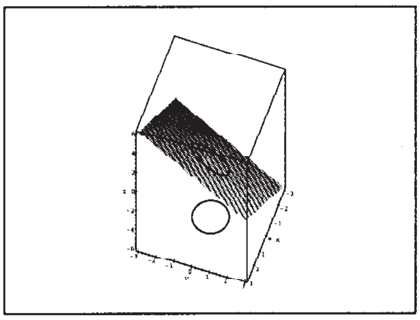


obr. g)

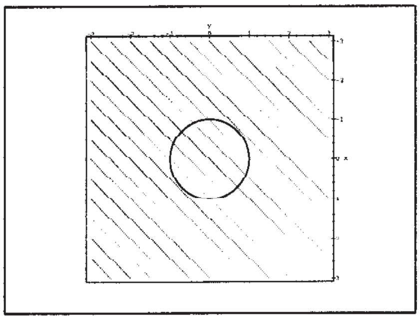


obr. h)

Příklad P.16. Funkce $f(x, y) = x - y$ nabývá na množině M: $x^2 + y^2 \leqq 1$ absolutního maxima $f_{\max} = \sqrt{2}$ v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a absolutního minima $f_{\min} = -\sqrt{2}$ v bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (viz příklad 6.20 ii)). Na obr. i) je prostorový pohled, na obr. j) jsou znázorněny vrstevnice (osa x je zde svislá, y vodorovná).

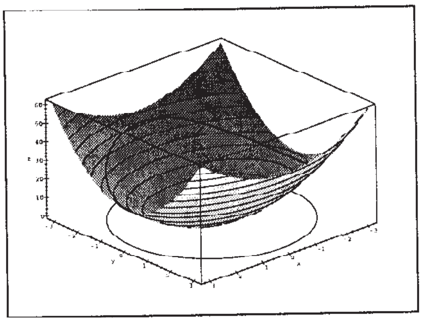


obr. i)

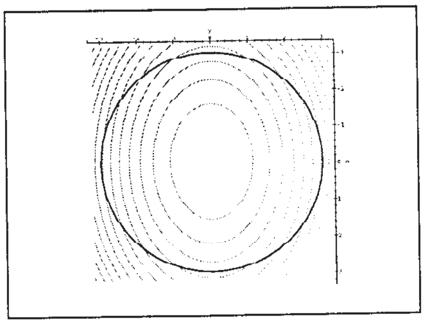


obr. j)

Příklad P.17. Funkce $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$ nabývá na množině $M: x^2 + y^2 \leqq 9$ absolutního maxima $f_{\max} = 36$ v bodech $[0, \pm 3]$ a absolutního minima $f_{\min} = 0$ v bodě $[0, 0]$. Na obr. k) je prostorový pohled, na obr. l) jsou znázorněny vrstevnice.



obr. k)



obr. l)

Výsledky cvičení

Obrázky ke cvičením kapitoly 1 jsou uvedeny na závěr.

KAPITOLA 2

2.1 a) Ke $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists\ \delta > 0$ takové, že pro $\forall[x, y]$, pro něž $0 < |x + 1| < \delta$, $0 < |y - 2| < \delta$, platí $f(x, y) > A$.
b) Ke $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$, $B \in \mathbb{R}$ taková, že pro $\forall x > B$, $|y - 1| < \delta$ je $f(x, y) < A$.

2.2 a) $\sqrt{2}$, b) 2, c) $\ln 2$, d) 0, e) 0.

2.3 a) neexistuje, b) neexistuje, c) 0, d) 1, e) 0, f) 2, g) 0, h) 2.

2.4 a) 0, b) e, c) neexistuje, d) 0, e) ∞, f) 1.

2.6 a) f je spojitá v $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 0]$, b) $\{[x, y] : x = -y\}$,
c) $\{[x, y] : x = -y\}$, d) $\{[x, y] : x = 0$ nebo $y = 0\}$,
e) $\{[x, y] : x = k\pi,\ y = k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$, f) $\{[x, y] : x^2 + y^2 = 1\}$.

2.7 a) $\{[x, y] : x = -y$ nebo $x = 0\}$, b) $\left\{[x, y] : y = \frac{x^2}{3}\right\}$,
c) $\{[x, y] : x = 0,\ y = 0\}$, d) $\{[x, y] : y = 0\}$,
e) $\{[x, y, z] : x = 0$ nebo $y = 0$ nebo $z = 0\}$, f) $\{[x, y, z] = [a, b, c]\}$.

2.8 a) je spojitá, b) není spojitá.

KAPITOLA 3

3.1 a) $z_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4$, $z_y = 2x^2 + 6xy - 5$,
b) $z_x = \frac{5x^3\sqrt{y}+3y}{\sqrt{x^2}}$, $z_y = \frac{x^3-6\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$,
c) $z_x = \sin(x + 2y) + x\cos(x + 2y)$, $z_y = 2x\cos(x + 2y)$,
d) $z_x = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $z_y = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$,
e) $u_x = \sqrt{1 - y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xz}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $u_y = -\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1 - x^2} + \frac{yz}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $u_z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

f) $z_x = -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$, $z_y = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$,
g) $z_x = \frac{1}{x+4}$, $z_y = -\frac{2}{|y|}$,
h) $z_x = \frac{1}{1+x^2}$, $z_y = -\frac{1}{1+y^2}$,
i) $z_x = -\frac{2x\sin x^2}{y}$, $z_y = -\frac{\cos x^2}{y^2}$,
j) $z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$,
k) $u_x = 2xe^{x^2(1-y-z)}$, $u_y = u_z = -e^{x^2(1-y-z)}$,
l) $z_x = \frac{y}{x^2+y^2}$, $z_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$,
m) $z_x = \frac{\sqrt{2}xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$, $z_y = -\frac{\sqrt{2}x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$,
n) $\frac{u_x}{x} = \frac{u_y}{y} = \frac{u_z}{z} = \frac{2}{r(r^2-1)}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.2 a) $z_x = yx^{xy}(1+\ln y)$, $z_y = x^{xy+1}\ln x$,
b) $z_x = -\frac{y}{\sqrt{xy-x^2y^2}(1+\sqrt{xy})}$, $z_y = -\frac{x}{\sqrt{xy-x^2y^2}(1+\sqrt{xy})}$,
c) $z_x = -\frac{1}{y}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{y}}\ln 3$, $z_y = \frac{x}{y^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{y}}\ln 3$,
d) $z_x = y\left[\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right]$, $z_y = x\left[\ln(x+y) + \frac{y}{x+y}\right]$,
e) $z_x = 2(2x+y)^{2x+y}[\ln(2x+y)+1]$, $z_y = (2x+y)^{2x+y}[\ln(2x+y)+1]$,
f) $z_x = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$, $z_y = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$,
g) $z_x = ye^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$, $z_y = xe^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$,
h) $u_x = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $u_y = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $u_z = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$,
i) $z_x = \frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}$, $z_y = -\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}$,
j) $\frac{u_x}{x} = \frac{u_y}{y} = \frac{u_z}{z} = 2\cos(x^2+y^2+z^2)$,
k) $u_x = y^z x^{y^z-1}$, $u_y = x^{y^z}zy^{z-1}\ln x$, $u_z = x^{y^z}y^z\ln x\ln y$.

3.3 a) $z_x = 2\sqrt{5}$, $z_y = 10+\sqrt{5}$, b) $z_x = 0$, $z_y = \frac{1}{4}$, c) $z_x = 1$, $z_y = -1$.

3.4 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{3}{2}$.

3.6 a) $z_{xx} = 12x^2 - 8y^2$, $z_{xy} = -16xy$, $z_{yy} = 12y^2 - 8x^2$,
b) $z_{xx} = 0$, $z_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$, $z_{yy} = \frac{2x}{y^3}$,
c) $z_{xx} = 0$, $z_{xy} = -\frac{2}{y^3}$, $z_{yy} = \frac{6x}{y^4}$,
d) $z_{xx} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $z_{xy} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $z_{yy} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$,
e) $z_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $z_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$,
$z_{yy} = -x\sin(x+y)$,
f) $z_{xx} = -\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$, $z_{xy} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$, $z_{yy} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$,
g) $z_{xx} = x^{(x+y)}\left[(\ln x + \frac{x+y}{x})^2 + \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right]$, $z_{xy} = x^{(x+y)}\left[\ln^2 x + \frac{x+y}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right]$,
$z_{yy} = x^{(x+y)}\ln^2 x$,

h) $z_{xx} = \frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{xy} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{yy} = -\frac{2x(x^2+2y^2)}{y^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,
i) $z_{xx} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $z_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $z_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$,
j) $z_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{xy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,
k) $z_{xx} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{xy} = \frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$,
l) $z_{xx} = 2y(1+x^2)^{y-2}(-x^2+2x^2y+1)$, $z_{xy} = 2x(1+x^2)^{y-1}[1+y\ln(1+x^2)]$,
$z_{yy} = (1+x^2)^y \ln^2(1+x^2)$.

KAPITOLA 4

4.1 a) $2\,\mathrm{d}x$, b) $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$, c) $\frac{1}{4}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$,
d) $\mathrm{d}x + 2\ln 2\,\mathrm{d}y - 2\ln 2\,\mathrm{d}z$, e) $\frac{3}{5}\,\mathrm{d}x + \frac{4}{5}\,\mathrm{d}y$, f) $\mathrm{d}f = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\,\mathrm{d}y$,
g) $\mathrm{d}f = -2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z$, h) $\mathrm{d}u = \frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\left[\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}z}{z}\ln\frac{x}{y}\right]$.

4.2 a) $\frac{\pi}{4} + 0{,}035$, b) $\frac{\pi}{6} - \frac{0{,}09}{\sqrt{3}}$, c) $2{,}95$, d) $-0{,}06$,
e) 1, f) $1{,}13$, g) $\mathrm{d}V \doteq \frac{50\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$, h) $\mathrm{d}h \doteq 1$ cm.

4.3 a) Není diferencovatelná, např. pro $u = (1, 1)$ neexistuje směrová derivace $f_u(0, 0)$.
b) Není diferencovatelná, neboť $f_{(1,1)}(0, 0)$ neexistuje.
c) Ano, $\mathrm{d}f(0, 0) = 0$.

4.4 a) $x + y + z = \sqrt{3}$, b) $3x + 5y - z = 4$,
c) $z_0 = -\frac{\pi}{4}$, $x + y - 2z = \frac{\pi}{2}$, d) $z_0 = 1$, $z = 1$.

4.5 a) $[2, 1], [2, -1]$, b) $\left[\frac{-a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right]$, c) $[-1/2, 1/2]$,
d) $[1, 1]$, e) $\left[\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\left[-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,
f) tečna existuje $\iff a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$;
pak $[x_1, \dots, x_n] = [-a_1, \dots, -a_n]$.

4.6 a) $f_{(1,2)}(1, 1) = 3$, b) $f_{(1,0,1)}(0, 1, 0) = 0$.

4.7 a) $\mathrm{d}^2 z = \frac{(\mathrm{d}x)^2}{x} + \frac{2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y} - \frac{(\mathrm{d}y)^2}{y^2}$,
b) $\mathrm{d}^2 z = 6(x-y)(\mathrm{d}x)^2 + 12(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6(x-y)(\mathrm{d}y)^2$,
c) $\mathrm{d}^n z =$
$= \mathrm{e}^{x+y}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}[n^2+2j^2-2nj-n+x^2+y^2+2xj+2(n-j)y](\mathrm{d}x)^j(\mathrm{d}y)^{n-j}$,
d) $\mathrm{d}^n z = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y)^n}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^n$,
e) $\mathrm{d}^n z = \frac{2}{(x+y)^{n+1}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}[(n-j)x + jy](\mathrm{d}x)^j(\mathrm{d}y)^{n-j}$,

f) $\mathrm{d}^n u = n!\,\mathrm{e}^{x+y+z} \sum\limits_{i+j+k=n} \frac{(x+i)(y+j)(z+k)}{i!j!k!} (\mathrm{d}x)^i (\mathrm{d}y)^j (\mathrm{d}z)^k$.

4.8 a) $\frac{x^2}{2} + x \ln y - \cos y + C$, b) $\frac{x^2}{2} \sin 2y + C$,
c) $\sqrt{x^2 + y^2} + C$, d) $xy^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + C$.

4.9 a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x + y \ln y + z$, b) $\operatorname{arctg} xyz$.

KAPITOLA 5

5.1 a) $z(x, y) = f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$, b) $z(x, y) = f\big(\frac{y}{x}\big)$,
c) $u(x, y, z) = f(x + y - 2z, x - 2y + z)$.

5.2 a) $z_{uv} = 0,\ z(x, y) = f(x - 2\sqrt{y}) + g(x + 2\sqrt{y})$,
b) $z_{vv} = 0,\ z(x, y) = f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big) + xyg\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$,
c) $u(4 - uv)z_{uv} - 2z_v = 0$, d) $z_{vv} + 2v^3 z_v = 0$,
e) $(u^2 - v^2)z_{uv} - vz_u = 0$, f) $(u^2 - v^2)z_{uv} + 4vz_u - 4uz_v = 0$,
g) $uz_{uu} - xz_{uv} + z_u = 0$,
h) $vz_{vv} + z_v = 0,\ z(x, y) = f(xy) \ln y + g(xy)$,
i) $z_{uv} = \frac{1}{2u} z_v,\ z(x, y) = \sqrt{xy}\, f\big(\frac{y}{x}\big) g(xy)$.

5.4 a) $T_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\big[\big(x - \frac{1}{2}\big) + \big(y - \frac{1}{2}\big)\big] - \frac{\sqrt{2}}{4}\big[\big(x - \frac{1}{2}\big)^2 +$
$+ 2\big(x - \frac{1}{2}\big)\big(y - \frac{1}{2}\big) + \big(y - \frac{1}{2}\big)^2\big]$,
b) $T_2(x, y) = \frac{\pi}{4} + x - \frac{xy}{2}$,
c) $T_2(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$,
d) $T_2(x, y) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 - \frac{1}{4}(y - 1)^2$,
e) $T_2(x, y) = x - x(y - 1)$,
f) $T_2(x, y) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}[(x - 1) + (y - 1)] - \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1)$,
g) $T_2(x, y, z) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) - (x - 1)(z - 1)$.

5.5 a) $\frac{\pi}{4} + 0{,}0297$, b) $\frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} + \frac{2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-1}{2} \frac{\pi^2}{2 \cdot 180^2}$.

KAPITOLA 6

6.1 a) $z_{\min} = -1$ v bodě $[1, 0]$,
b) $z_{\max} = \frac{64}{27}$ v $\big[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\big]$, ve stacionárních bodech $[0, 0]$, $[0, 4]$, $[4, 0]$ extrém nenastává,
c) $z_{\max} = 16$ v $[2, -2]$,
d) $z_{\min} = 30$ v $[5, 2]$,
e) $z_{\min} = 3 + \ln 3$ v $[1, 1]$,
f) V jediném stacionárním bodě $[1, 1]$ extrém nenastává,
g) $z_{\min} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ v $\big[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\big]$,

h) $u_{\min} = -6913$ v $[24, -144, -1]$,

i) $u_{\min} = 4$ v $\left[\frac{1}{2}, 1, 1\right]$,

j) $z_{\min} = 3\sqrt[3]{3}a^2$ v $\left[\frac{a}{\sqrt[3]{3}}, \frac{a}{\sqrt[3]{3}}\right]$,

k) $u_{\max} = \frac{27}{2}$, v $\left[3, \frac{3}{2}, 1\right]$,

l) $u_{\max} = \left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$ v $x_1 = \dots = x_n = \frac{2}{n^2+n+2}$,

m) $u_{\min} = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$ v $x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}, x_2 = 2^{\frac{2}{n+1}}, \dots, x_n = 2^{\frac{n}{n+1}}$.

6.3 a) $f_{\min} = -2$ v $[-1, -1]$, $f_{\max} = 2$ v $[1, 1]$,

b) $f_{\min} = \frac{3}{2}$ v $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f_{\max} = 3$ v $[0, 0]$,

c) $f_{\min} = 2 - \sqrt{2}$ v $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $f_{\max} = 2 + \sqrt{2}$ v $\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

d) $f_{\min} = -\sqrt{2}$ v $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$, $f_{\max} = \sqrt{2} + 1$ v $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$,

e) $f_{\min} = 0$ v $[0, 0, 0]$, $f_{\max} = 1$ v bodech $[x, y, 0]$, kde $x^2 + y^2 = 1$.

6.4 a) $f_{\max} = 7$ v $[0, -1]$, $f_{\min} = -4$ v $[1, 1]$,

b) $f_{\max} = 22$ v $[2, 2]$, $f_{\min} = -2$ v $[-2, 2]$,

c) $f_{\max} = 6$ v $[3, 0]$, $f_{\min} = -1$ v $[1, 1]$,

d) $f_{\max} = -\frac{1}{2}$ v $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $f_{\min} = -2$ v $[0, 0]$,

e) $f_{\min} = 0$ v $[0, 0]$, $f_{\max} = 36$ v bodech $[0, \pm 3]$ (viz Příklad P.17),

f) $f_{\min} = 3 - 2\sqrt{2}$ v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $f_{\max} = 3 + 2\sqrt{2}$ v bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

6.5 a) $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ v $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $f_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ v $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$,

b) $f_{\max} = 1$ v $[\pm 1, 0]$ a $[0, \pm 1]$, $f_{\min} = 0$ v $[0, 0]$,

c) $f_{\max} = 3 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ v $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1\right]$, $f_{\min} = -\frac{5}{12}$ v $\left[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}\right]$,

d) čísla $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ tvoří geom. posl. s kvocientem $q = \sqrt[n+1]{b/a}$.

6.6 a) $h/3$, b) $\sqrt[3]{h}$.

6.7 a) ostré lok.min., b) neostré lok.min., c) extrém nenastává.

KAPITOLA 7

7.1 a) $(F^{-1})'(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $(F^{-1})'(-2, 4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$,

c) $(F^{-1})'(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.2 a) $[x, y] \stackrel{F}{\longmapsto} \left[\frac{x(b^2-a^2)-2a(by+c)}{a^2+b^2}, \frac{y(a^2-b^2)-2b(ax+c)}{a^2+b^2}\right]$,

b) $[x, y] \stackrel{F}{\longmapsto} \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$,

c) $[x, y, z] \stackrel{F}{\longmapsto} \left[\frac{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right]$,

d) $[x, y, z] \xmapsto{F} \left[\frac{x}{rR}, \frac{y}{rR}, \frac{z}{rR}\right]$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $R = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$.

7.3 $r\frac{\partial R}{\partial r}(r, \varphi) = R(r, \varphi)\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(r, \varphi)$, $\frac{\partial R}{\partial \varphi}(r, \varphi) = -rR(r, \varphi)\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \varphi)$.

KAPITOLA 8

8.1 a) $[2, 2]$, $[-2, -2]$, b) body osy y,
c) body roviny $z = 0$ ležící na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8.2 a) $y' = \frac{y}{1+2y^2}$, b) $y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$.

8.3 a) $5y + 2x = 0$, $y = -2x$, b) $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 1$.

8.4 $[1, 1]$, $[1, -3]$.

8.5 $y'' = -(1 - c\cos y)^{-3}c\sin y$.

8.6 a) tečná rovina: $x - 3y - 4z - 4 = 0$, normála: $x = 2 + \frac{1}{2}t$, $y = \frac{4}{3} - \frac{3}{4}t$, $z = -1 - t$, $t \in \mathbb{R}$,
b) $x + 4y + 6z - 21 = 0$, $x + 4y + 6z + 21 = 0$,
c) $x - y + 2z \pm \sqrt{\frac{11}{2}} = 0$.

8.7 a) $z_x = z_y = -1$, $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 0$,
b) $z_x = \frac{xz}{x^2-y^2}$, $z_y = -\frac{yz}{x^2-y^2}$, $z_{xx} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}$, $z_{xy} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$,
$z_{yy} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$.

8.8 $y_{\min} = -0{,}5$ v $x = 0$, $y_{\max} = -2$ v $x = 0{,}5$.

8.9 a) $z_{\min} = -2$ v $[1, -1]$, $z_{\max} = 6$ v $[1, -1]$,
b) $z_{\min} = 1$ v $[-2, 0]$, $z_{\max} = -\frac{8}{7}$ v $\left[\frac{16}{7}, 0\right]$.

KAPITOLA 9

9.1 a) $f_{\max} = \frac{a^6}{6^6}$,
b) $f_{\max} = \frac{1}{8}$ v $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,
c) $f_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$, $\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$,
$f_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$ v $\left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]$, $\left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$, $\left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$,
d) $f_{\max} = 2$ v $[1, 1, 1]$,
e) $f_{\min} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-2}\right)^{-1}$ pro $x_i = a_i^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-2}\right)^{-1}$,
f) $f_{\min} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k\beta_k}\right)^2$ pro $x_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k\beta_k}\right)^{-1}$,
g) $f_{\max}$ nastává pro $x_i = \alpha_i / \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$.

9.2 a) Délky hran hranolu: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, $V_{\max} = \frac{8}{3\sqrt{3}}abc$.

b) Délky hran hranolu a, b, $\frac{c}{2}$, $V_{\max} = \frac{abc}{2}$.

c) Výška hranolu $v_{\text{hr}} = \frac{1}{3}h$, hrana základny $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $V_{\max} = \frac{8}{27}R^2h$.

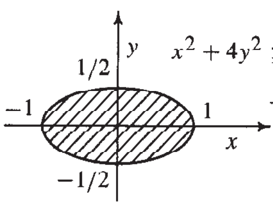
d) $a = b = c = \sqrt{\frac{P}{6}}$, $V_{\max} = \frac{P\sqrt{P}}{6\sqrt{6}}$.

e) $[x, y] = \left[\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right]$.

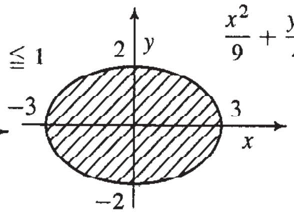
f) Normála k elipsoidu v hledaném bodě musí být kolmá na přímku spojující zadané dva body.

9.3 a) $f_{\min} = \frac{\|\alpha v - \beta u\|^2}{2(\|u\|^2\|v\|^2 - (u,v)^2)}$.

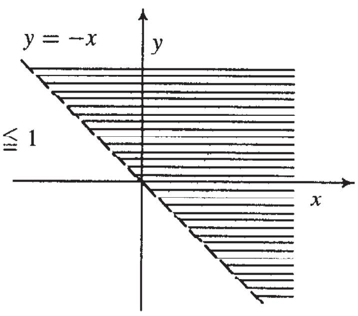
b) Nechť $B = (u_1, \dots, u_{n-1})$, je matice sestavená z vektorů $u_1, \dots, u_{n-1}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $f_{\min} = \langle (B^T B)^{-1}\alpha, \alpha \rangle$ pro $x = B(B^T B)^{-1}\alpha$.



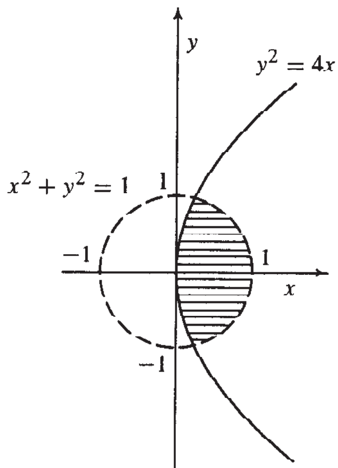
1.1 a)



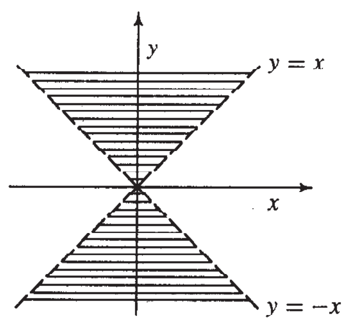
1.1 b)



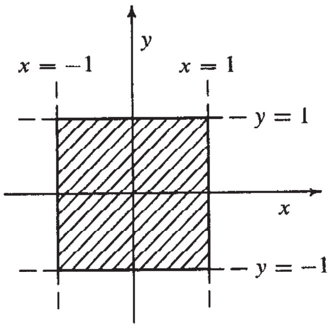
1.1 c)



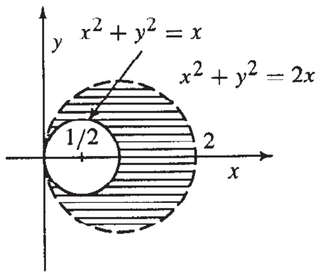
1.1 d)



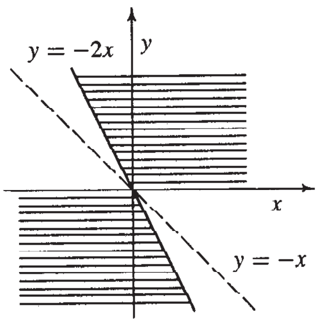
1.1 e)



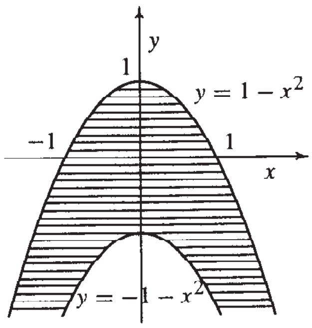
1.1 f)



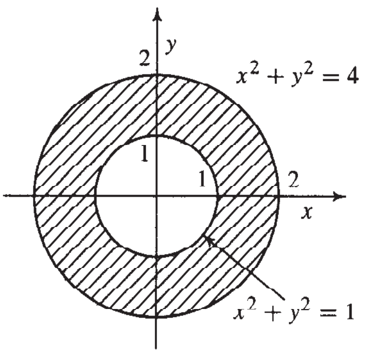
1.1 g)



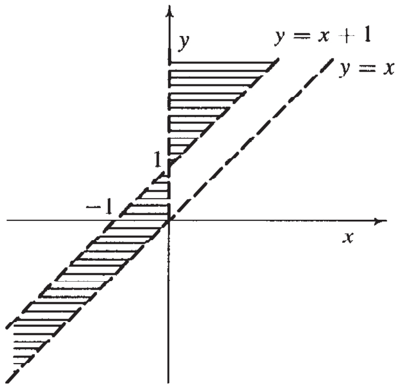
1.1 h)



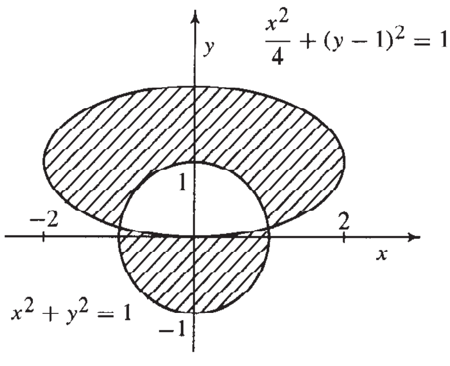
1.1 i)



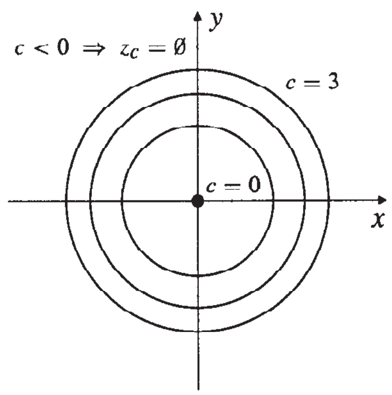
1.1 j)



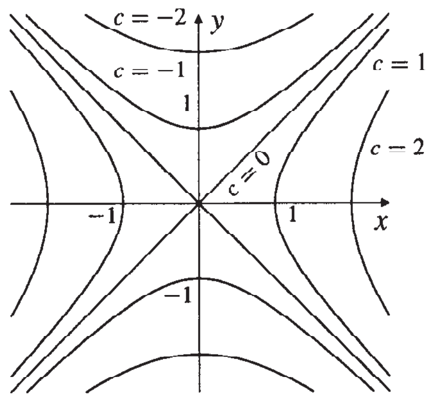
1.1 k)



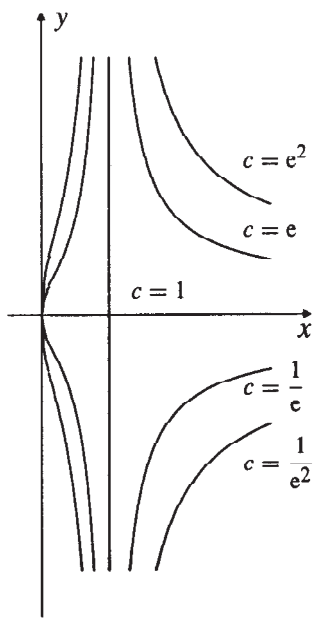
1.1 l)



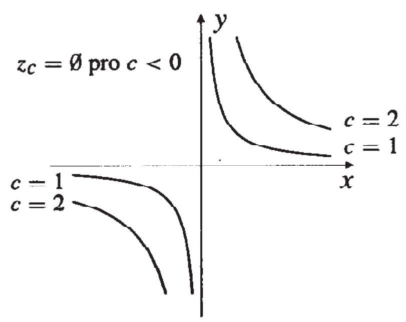
1.2 a)



1.2 b)



1.2 c)



1.2 d)