2. cviko - Př. 8. = SPRAVIŤ! ~~X~~

Př. 9. = v 4B cvičenie 2v - Př. 14. ~~X~~

1. cviko - Př. 4. 1.) SPRAVIŤ ~~X~~

2.) SPRAVIŤ ~~X~~

3.) SPRAVIŤ ~~X~~

cv. 3. riešení - př. 5.

3. cviko - Př. 4, př. 6. - obe sú v študijných mat. ~~X~~

Př. 5. - SPRAVIŤ ~~X~~

Př. 6. ~~Vypočítejte~~ Určete tayl. polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x^4 y + xy^2 + x + 2$ v bodě $[1,1]$

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)h + f'_y(x_0,y_0)k +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)hk + f''_{yy}(x_0,y_0)k^2\right) +$$

$$+ \underbrace{R_2(x,y)}_{\text{zvyšok, pre počítanie nepodstatné}}$$

$h = x - x_0$

$k = y - y_0$

$f'_x(x,y) = 4x^3 y + y^2 + 1$ $\qquad$ $f'_y(x,y) = x^4 + 2xy$

$f''_{xx}(x,y) = 12x^2 y$ $\qquad$ $f''_{yy}(x,y) = 2x$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4x^3 + 2y$$

$$T(1,1) = \overset{f(x_0,y_0)}{5} + \overset{f_x(x_0,y_0)}{6}.\underbrace{(x-1)}_{h} + \overset{f_y(x_0,y_0)}{3}.\underbrace{(y-1)}_{k} + \frac{1}{2}\left(12.(x-1)^2 + 2.6.(x-1).\right.$$

$$\left. .(y-1) + 2.(y-1)^2\right]$$

$$T(1,1) = 5 + 6x - 6 + 3y - 3 + 6x^2 - 12x + 6 + 6xy - 6x - 6y + 6$$
$$+ y^2 - 2y + 1 =$$

$$= \underline{\underline{6x^2 + y^2 + 6xy - 12x - 5y + 9}} \,;$$

Př. 4. Najděte body nespojitosti:

Využijeme následující teorémy:

Thm. 1.: Jsou li funkce f, g spojité v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $\boxed{f+g,\ f\cdot g}$ a je li $g(x_0, y_0) \neq 0$ je v tomto bodě spojitá také funkce $\boxed{f/g}$

Thm. 2.: Nechť funkce g, h jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$; $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$ a funkce f je spojitá v bodě $[u_0, v_0]$. Pak je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá složená funkce

$$F(x, y) = f(g(x,y), h(x,y))$$

---

a) $f(x,y) = \dfrac{2x - 5y}{x^2 + y^2 + 1}$ $\begin{matrix} \} \ g(x,y) \\ \} \ h(x,y) \end{matrix}$

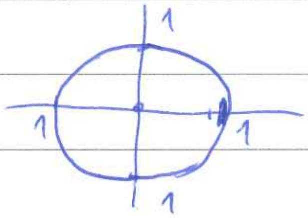
g, h jsou spojité polynomy v celém $\mathbb{R}^2$.

Potom využijeme $\underline{\text{Thm. 1}}$ a musí platiť, že pre podiel 2 ~~fknk~~ $\underbrace{\text{spojitých funkcií}}_{f = g/h}$, musí byť $h(x_0, y_0) \neq 0$

Preto musí $\boxed{x^2 + y^2 - 1 \neq 0}$ ($x^2+y^2=1$ je kružnica)

Ak $x^2+y^2-1=0 \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow$ toto sú naše body nespojitosti

$\downarrow$



b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y + xy^2)}{\cos(x-y)}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ obe opäť spojité

Hľadáme body $\cos(x-y) = 0$ (pre ktoré je $f(x,y)$ nespojitá)

$$x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$-y = -x + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$y = x - (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Preto sú to body $\{[x; x - (2k+1)\frac{\pi}{2}]; x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}\}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0, & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$

Vyšetríme opäť spojitosť funkcie $f(x,y)$. Vidíme, že (x^3+y^3) aj (x^2+y^2) sú spojité v celom $\mathbb{R}^2$. Potom pre podiel ~~t~~ týchto funkcií musí platiť aby

$x^2+y^2 \neq 0$ teda funkcia bude

nespojitá v $x^2+y^2=0 \iff [x,y]=[0,0]$

z definície spojitosti, ak ukážeme, že

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0,0)}}$ ← nami dodefinovaná hodnota 0.

tak bude funkcia spojitá na celom $\mathbb{R}^2$.

Pre výpočet limity (1) použijeme nasledujúcu teorému:

Thm. 1.: Ak pre funkcia $f(x,y)$ po transformácii do polárnych súradníc $(x=x_0+r\cos\varphi;\ y=y_0+r\sin\varphi)$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} h(r)\,g(\varphi) \quad (\text{"odseparujeme" } r \text{ a } \varphi)$$

a platí, že $\lim\limits_{r\to 0^+} h(r) = 0$ a funkcia $g(\varphi)$ je ohraničená pre $\varphi \in [0,2\pi)$ pak $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

transformácia do polárnych súradníc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{[x_0,y_0]=[0,0] \\ r\to 0^+}} \frac{r^3\sin^3\varphi + r^3\cos^3\varphi}{\underbrace{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} =$$

$[x_0,y_0]=[0,0]$

$x = x_0 + r\cos\varphi$

$y = y_0 + r\sin\varphi$

$$\lim_{r\to 0} h(r)\cdot g(\varphi)$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cdot(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = \underbrace{\lim_{r\to 0^+} r\cdot(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}$$

(Thm 1.)

1.) $\lim_{r\to 0^+} r = 0$ ✓

2.) funkcia $g(\varphi) = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi$ je ohraničená ✓

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0^+} r\cdot(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 0 = f(0,0)$$ ■

Funkcia je v bode $[0,0]$ spojitá $\Rightarrow$ na celom $\mathbb{R}^2$.

Pr. 5. Spočítajte Jacobiho maticu a Jakobián zobrazenia, ktoré popisuje transformáciu kartézskych do polárnych súradníc (a naopak).

kartézske $\to$ polárne

$[x,y] \to \ldots$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$$

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F: \quad [x,y] \longrightarrow \Big[\overset{=r}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;\ \overset{=\varphi}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\Big] \quad \text{pro } x>0$$

$$[x,y] \longrightarrow \Big[\sqrt{x^2+y^2}\,;\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big] \quad \text{pro } x<0$$

$$[0,y] \longrightarrow \Big[y\,;\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(y)\Big] \quad \text{pro } x=0$$

Jacobiho matice zobrazení F je:

$$(x>0, y>0): \quad F'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) & \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\det F'(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{r}\underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{\frac{y^2}{x^2}}{1+y^2/x^2}\right)}_{=1} = \boxed{\frac{1}{r}}$$

Naopak: $F: [r,\varphi] \to [\overset{=x}{r\cos\varphi}\,;\ \overset{=y}{r\sin\varphi}]$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det F'(x,y) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = \boxed{r}$$